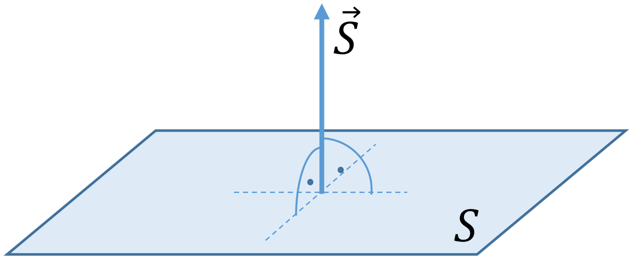
# Wykład 10

# Prawo Gaussa

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki,  paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

# Powierzchnia i wektor powierzchni

Powierzchnia $S$ i wektor powierzchni $\vec{S}$

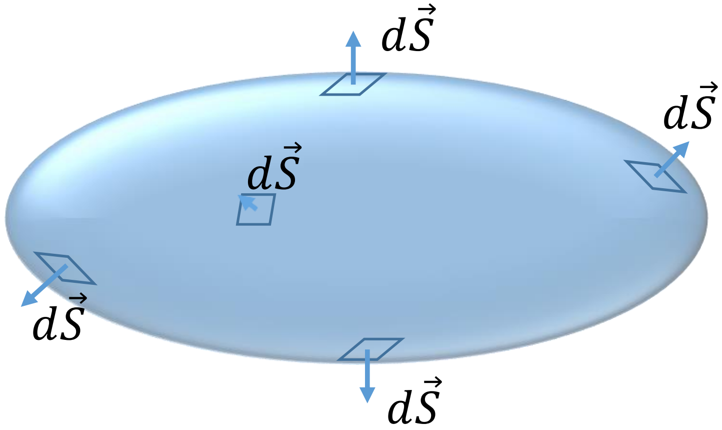



Wektor powierzchni $\vec{S}$ dla płaskiej powierzchni $S$ ma następujące własności: długość i kierunek:

- **długość wektora** jest równa liczbowo powierzchni $S$
- **kierunek wektora** jest prostopadły (normalny) do powierzchni

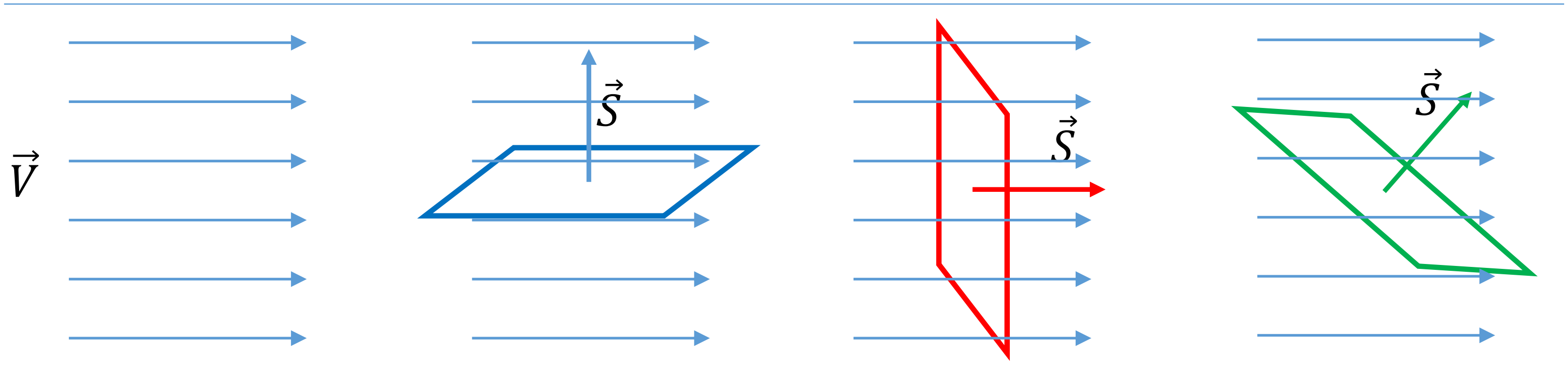
Dla zamkniętej powierzchni wektor normalny w każdym punkcie powierzchni jest skierowany od jej wnętrza na zewnątrz.

Powierzchnię trzeba podzielić na małe kawałki $dS$ aby móc zdefiniować wektor $d\vec{S}$ prostopadły do powierzchni.



# Strumień przez powierzchnię

Załóżmy, że mamy strumień przepływającej z jednorodną prędkością wody $\vec{V}$.



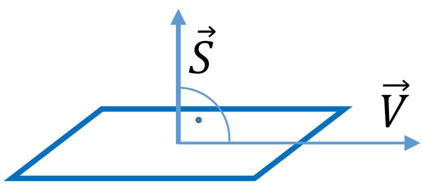

Do strumienia wkładamy ramkę o powierzchni $S$:

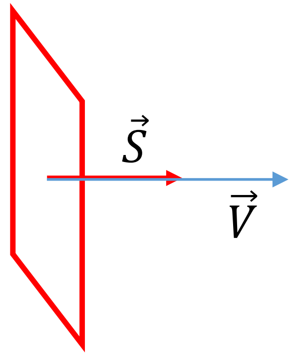
- **równolegle** do kierunku przepływu wody – przez ramkę nie przepływa woda: wektor powierzchni $\vec{S}$ **prostopadły** do wektora $\vec{V}$
- **prostopadle** do kierunku przepływu wody – przez ramkę przepływa maksymalna ilość wody: wektor powierzchni $\vec{S}$ **równoległy** do wektora $\vec{V}$
- **pochyloną** do kierunku przepływu wody – przez ramkę przepływa mniejsza ilość wody

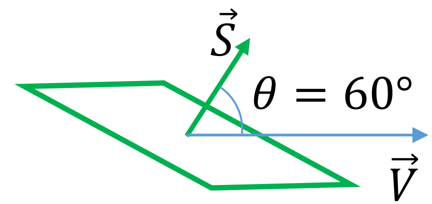
# Strumień przez powierzchnię

Strumień wody przepływający przez powierzchnię S rozpostartą na ramce opisuje wzór:

$$\boxed{\Phi = \vec{V} \circ \vec{S}}$$



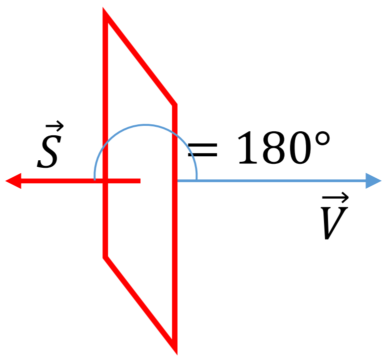




$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 90° = 0$$

$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 0° = V \cdot S$$

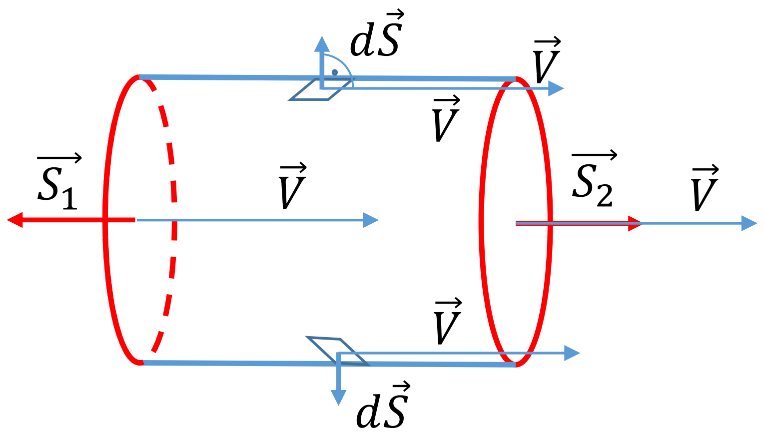
$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}(V \cdot S)$$




Gdy zwroty wektora prędkości $\vec{V}$ i wektora powierzchni $\vec{S}$ są przeciwne strumień jest ujemny!

$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 180° = -(V \cdot S)$$

# Strumień przez powierzchnię zamkniętą




Przykład: rura z podstawami – wektor powierzchni prostopadły w każdym miejscu do powierzchni.

Powierzchnia złożona:

$$\boxed{\Phi_{całk} = \sum \Phi_i}$$

$$\boxed{\Phi_{całk} = \oint \vec{V} \circ d\vec{s}}$$

Dla podstaw:

$$\Phi_1 = V \cdot S_1 \cdot \cos 180° = -(V \cdot S)$$

$$\Phi_2 = V \cdot S_2 \cdot \cos 0° = (V \cdot S)$$

Dla powierzchni bocznej:

$$\Phi_B = V \cdot dS \cdot \cos 90° = 0$$

Całkowity strumień:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_B =$$

$$= -(V \cdot S) + (V \cdot S) + 0 = 0$$

# Prawo Gaussa - grawitacja

➢ Dla pola grawitacyjnego:

Całkowity strumień pola grawitacyjnego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą (tzw. powierzchnię Gaussa), jest proporcjonalny do masy będącej źródłem tego pola – masy, która jest zamknięta wewnątrz powierzchni Gaussa.

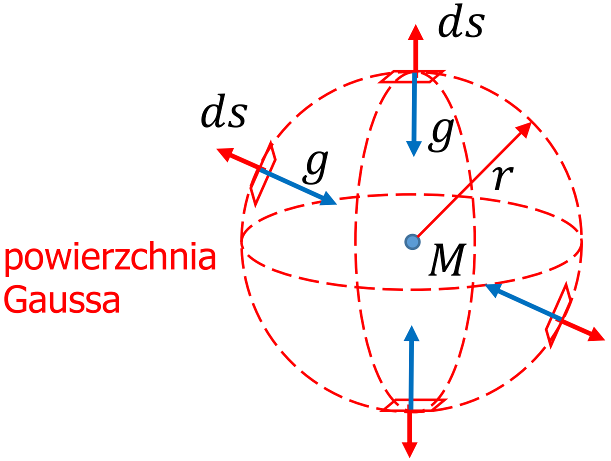
$\Phi_g = -4\pi GM$ ale już wiemy: $\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s}$ więc: $\boxed{\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi GM}$

➢ Właściwości powierzchni Gaussa:

- Powierzchnia Gaussa jest tworem hipotetycznym, matematyczną konstrukcją myślową,
- Jest dowolną powierzchnią zamkniętą, lecz w praktyce powinna mieć kształt związany w symetrią pola,
- Powierzchnię Gaussa należy tak poprowadzić aby punkt, w którym obliczamy natężenie pola elektrycznego leżał na tej powierzchni.

# Prawo Gaussa – masa punktowa

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} = \oint g \cdot ds \cdot \cos(180°) = -\oint g ds =$$



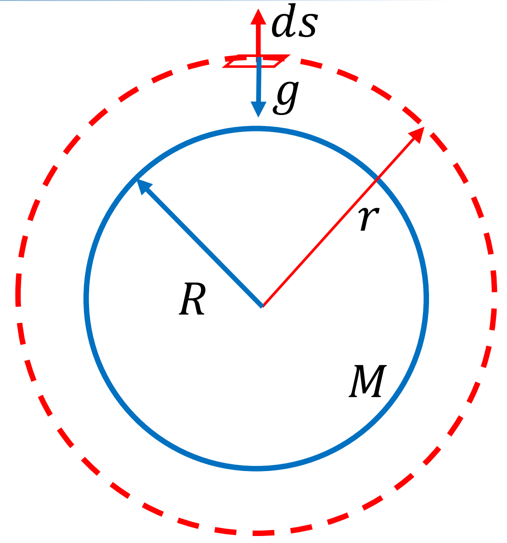

$$\Phi_g = -g \oint ds = -g 4\pi r^2$$

Z prawa Gaussa wiemy, że całkowity strumień pola grawitacyjnego jest równy:

$$\Phi_g = -4\pi G M$$

$$-g 4\pi r^2 = -4\pi G M \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

# Prawo Gaussa – sferyczny rozkład masy




Gęstość powierzchniowa:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4\pi R^2}$$

Obszar na zewnątrz sferycznej masy:

$$\boldsymbol{r > R}$$

Z prawa Gaussa:

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} \qquad \Phi_g = -4\pi G M$$

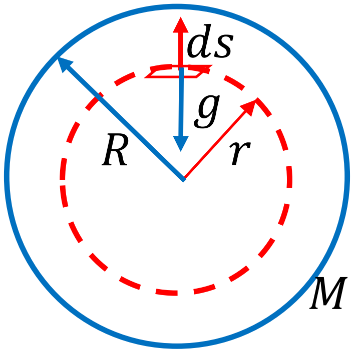
gdzie $M$ jest masą powłoki wewnątrz powierzchni Gaussa

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi G M \longrightarrow -g4\pi r^2 = -4\pi G M \longrightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

Jeżeli znamy gęstość powierzchniową $M = \sigma 4\pi R^2 \longrightarrow g = \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2}$

# Prawo Gaussa – sferyczny rozkład masy

Obszar wewnątrz sferycznej masy:




$\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}$

Z prawa Gaussa:

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} \qquad \Phi_g = -4\pi G M$$

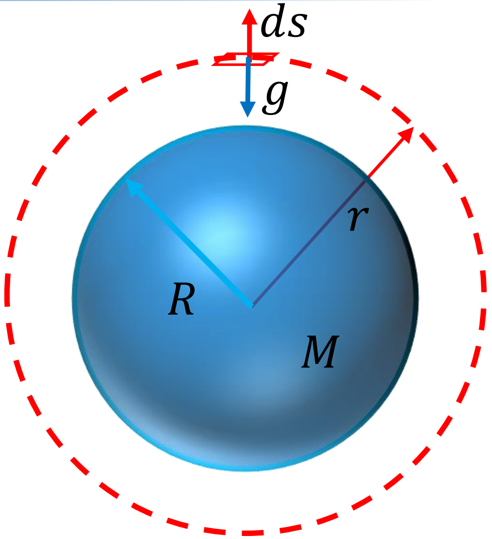
gdzie $\underline{M}$ jest masą zawartą wewnątrz powierzchni Gaussa

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = 0 \longrightarrow g = 0$$

wewnątrz wybranej powierzchni Gaussa nie ma żadnej masy! $\underline{M = 0}$

# Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy

Kula o promieniu $\boldsymbol{R}$ i masie $\boldsymbol{M}$




- $\boldsymbol{r > R}$

– promień powierzchni Gaussa większy niż promień kuli – cała masa zawarta wewnątrz powierzchni Gaussa

Z prawa Gaussa:

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi GM$$

$$-g4\pi r^2 = -4\pi GM \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

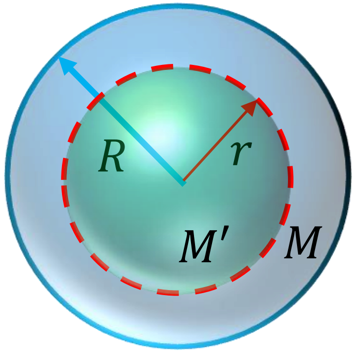
gdzie $M$ jest całą masą kuli wewnątrz powierzchni Gaussa

gdy $\quad r > R \quad$ cała masa kuli jest wewnątrz powierzchni Gaussa

# Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy

- $r < R$

– promień powierzchni Gaussa mniejszy niż promień kuli – tylko część masy zawarta wewnątrz powierzchni Gaussa




Objętościowy rozkład masy:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \qquad M' = M\frac{V'}{V} \qquad M' = M\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\frac{r^3}{R^3}$$

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi G M'$$

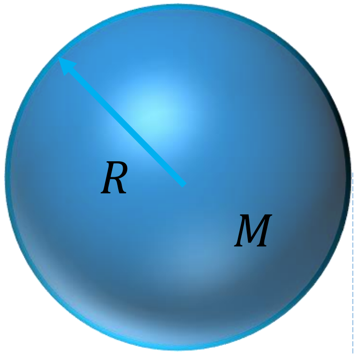
gdzie $M'$ jest masą kuli wewnątrz powierzchni Gaussa

$$-g4\pi r^2 = -4\pi G M' \longrightarrow g = \frac{GM'}{r^2} = \frac{G}{r^2}M\frac{r^3}{R^3} = \frac{GMr}{R^3}$$

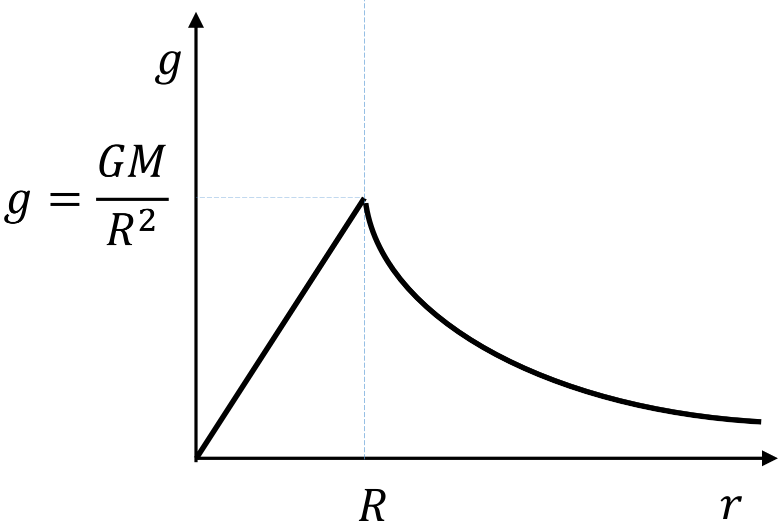
- Gdy $r = R$ $\qquad g = \frac{GM}{R^2}$

# Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy

Kula o promieniu $\boldsymbol{R}$ i masie $\boldsymbol{M}$

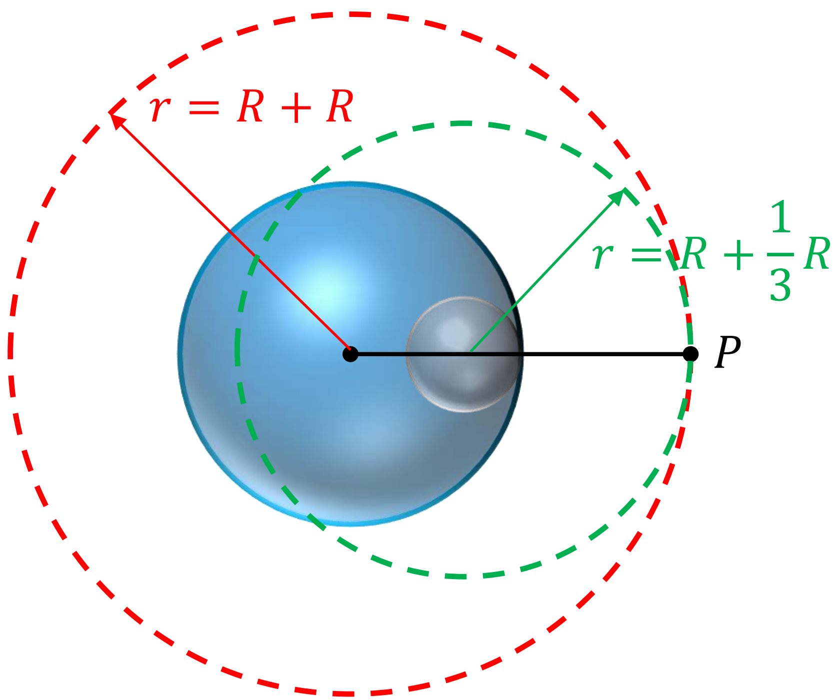



- $\boldsymbol{r < R}$ $$g = \frac{GMr}{R^3} = \frac{GM}{R^3}r$$
- $\boldsymbol{r > R}$ $$g = \frac{GM}{r^2} = GM\frac{1}{r^2}$$
- $\boldsymbol{r = R}$ $$g = \frac{GM}{R^2}$$



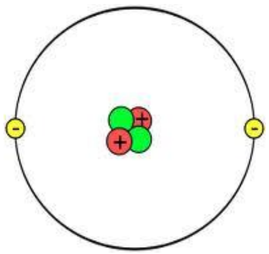
# Prawo Gaussa – Przykład

W jednorodnej kuli o promieniu R, wykonanej z materiału o gęstości $\rho_1$, wykonano kuliste wydrążenie o promieniu r = ⅓ R przylegające do powierzchni kuli. Wydrążenie wypełniono materiałem o gęstości $\rho_2 = ½\, \rho_1$. Korzystając z prawa Gaussa oblicz natężenie pola grawitacyjnego w punkcie P, w odległości R od powierzchni kuli. Zrób rysunek z zaznaczeniem wybranych powierzchni Gaussa.




$$g = \frac{23}{72}\pi G R \rho_1$$

# Prawo Gaussa - elektrostatyka



elektron ładunek ujemny = -$e$

proton ładunek dodatni = +$e$

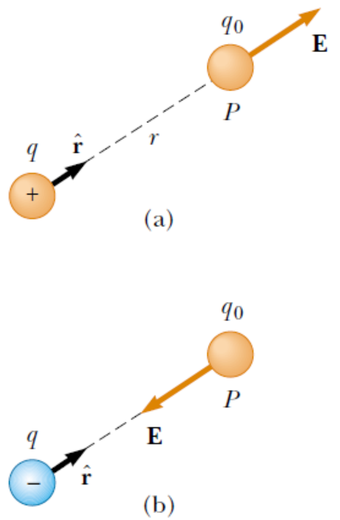
Ładunek elementarny

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Każdy inny ładunek jest wielokrotnością ładunku elementarnego

$|Q| = Ne$

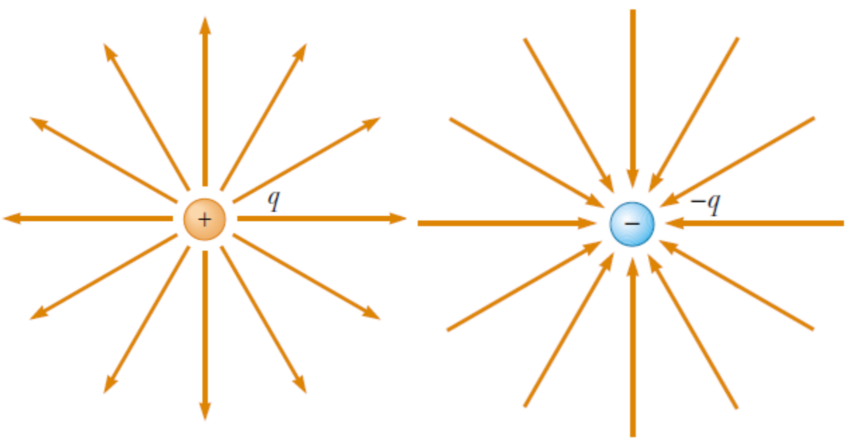
Natężenie pola elektrostatycznego:



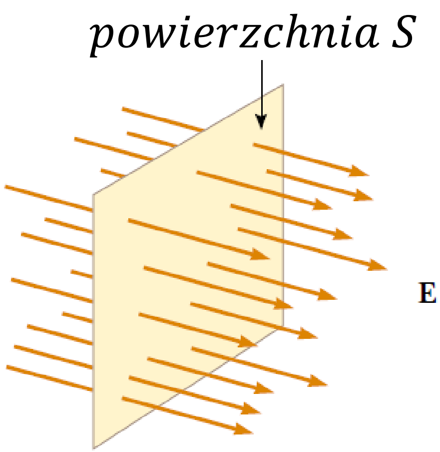

Pole ładunku punktowego:

dodatniego:

ujemnego:




Strumień pola elektrostatycznego :




$$\Phi_E = \vec{E} \circ \vec{S}$$

# Prawo Gaussa - elektrostatyka

➢ <u>Dla pola elektrostatycznego:</u>

Całkowity strumień pola elektrycznego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz tej powierzchni.

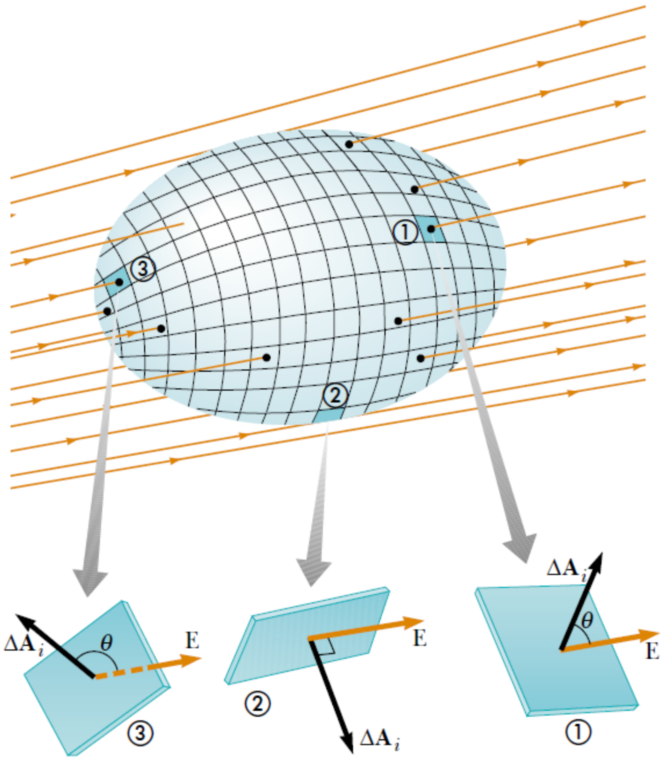
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

strumień dla pola $\vec{E}$:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{s}$$

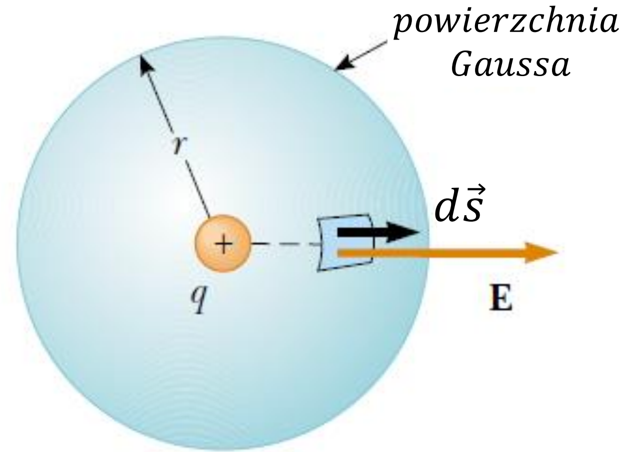
więc:

$$\boxed{\oint \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



# Prawo Gaussa – ładunek punktowy

Powierzchnia Gaussa – sfera o promieniu $r$




- ✓ Wektor **E** równoległy do wektora **ds** w każdym miejscu na sferze
- ✓ E = const na powierzchni

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{s} = \oint E \cdot ds \cdot \cos 0° = E \oint ds = E 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ więc: $$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

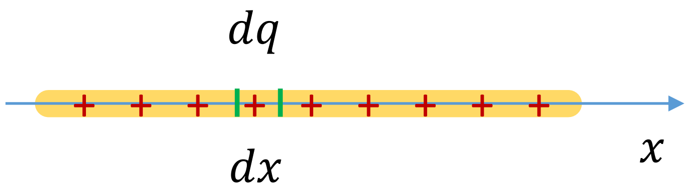
skoro: $$E = \frac{F}{q_0} \longrightarrow \boxed{F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}}$$

Prawo Coulomba

Prawo Coulomba wynika z prawa Gaussa

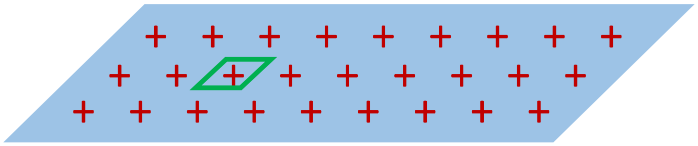
# Ciągły rozkładu ładunku

- gęstość liniowa ładunku: $\lambda$



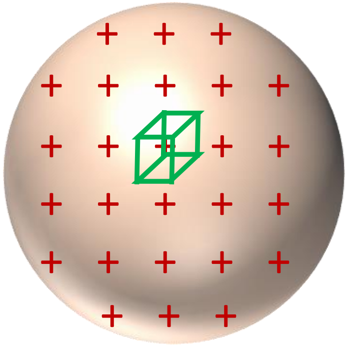

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

- gęstość powierzchniowa ładunku: $\sigma$



$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

- gęstość objętościowa ładunku: $\rho$



$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

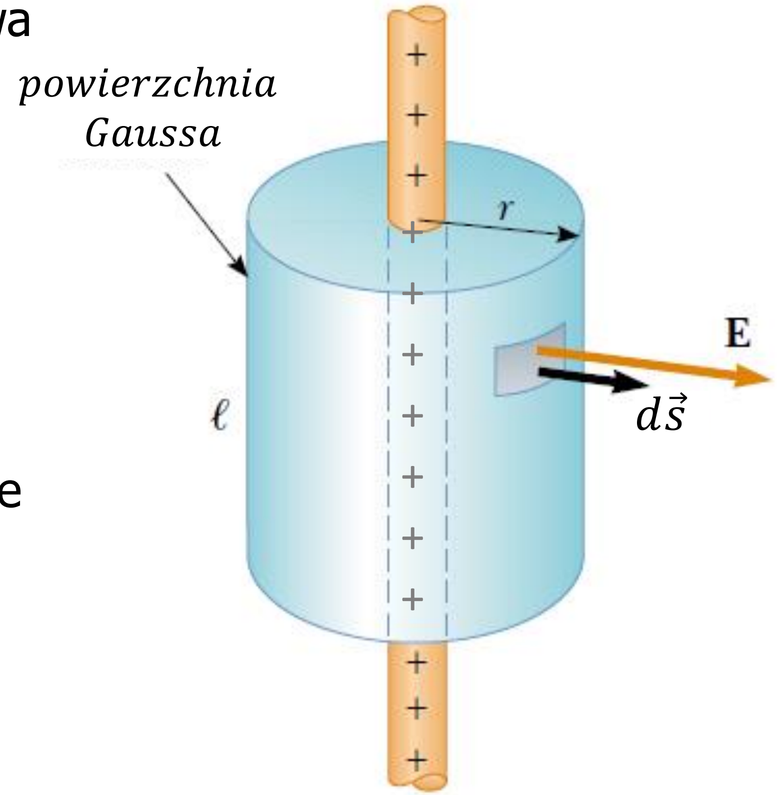
W zależności od rodzaju gęstości ładunku, pole wypadkowe może być całką liniową, powierzchniową lub objętościową:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_V k \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$

# Prawo Gaussa – liniowy rozkład ładunku

Powierzchnia Gaussa – powierzchnia walcowa o promieniu $r$

- ✓ Wektor **E** równoległy do wektora **ds** w każdym miejscu na powierzchni bocznej
- ✓ E = const na powierzchni bocznej
- ✓ Wektor **E** prostopadły do wektora **ds** w każdym miejscu na powierzchni podstaw, cos 90° = 0 ⇒ $\Phi_E$ = 0 przez powierzchnie podstaw




$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{s} = E \oint ds = E2\pi rl$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$\lambda = \dfrac{Q}{l}$ liniowa gęstość ładunku

# Powierzchniowy rozkład ładunku

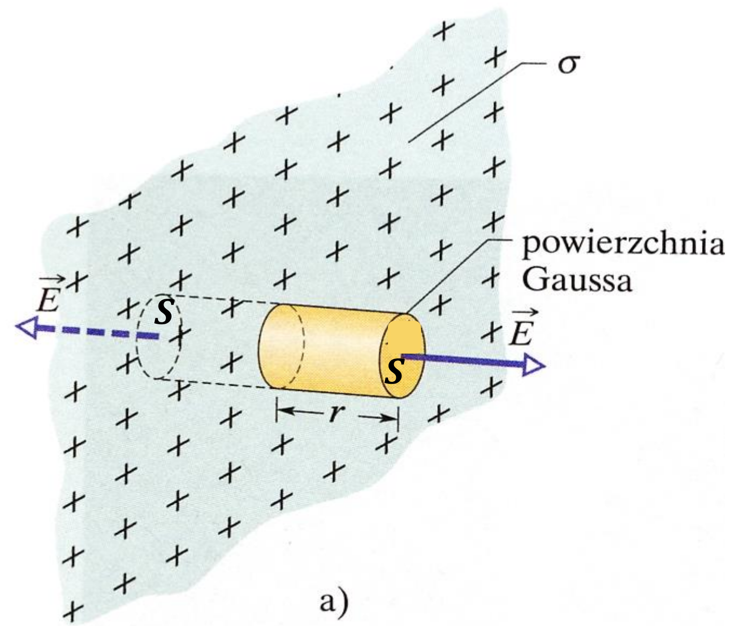
- ✓ **E** ⊥ **ds** w każdym miejscu na powierzchni bocznej ⇒ $\Phi_E = 0$
- ✓ **E** || **S** w każdym miejscu na powierzchni podstaw
- ✓ E = const na podstawach

$$\Phi_E = E2S$$

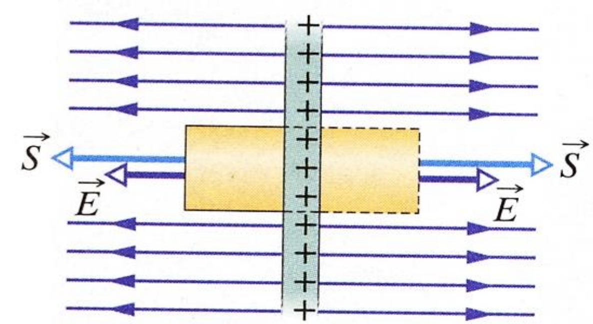
$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad E2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$\sigma = \frac{Q}{S}$ powierzchniowa gęstość ładunku

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$




a)




b)

# Sferyczny rozkład ładunku

✓ **E** || **ds** w każdym miejscu na powierzchni Gaussa

➢ $\boldsymbol{r > R}$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{s} = E \oint ds = E4\pi r^2$$

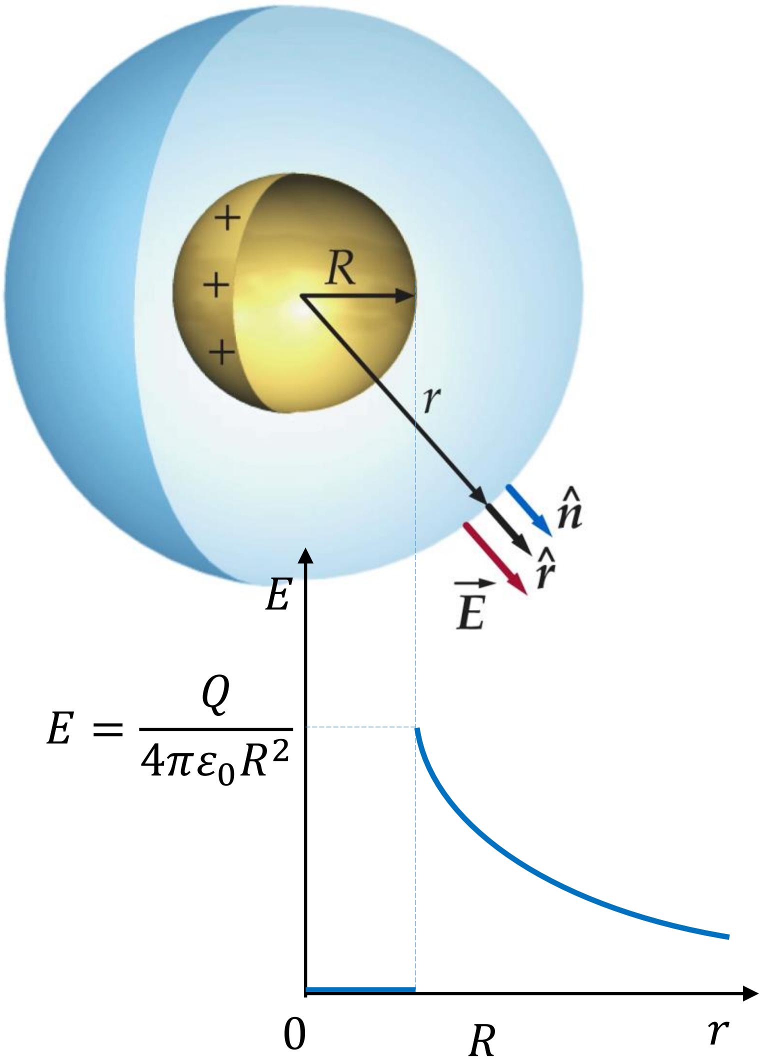
$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

pole na zewnątrz jak od ładunku punktowego

➢ $\boldsymbol{r < R}$

dla metalowej kuli ładunek całkowity Q jest rozłożony tylko na powierzchni sfery o promieniu $R$ więc $E = 0$



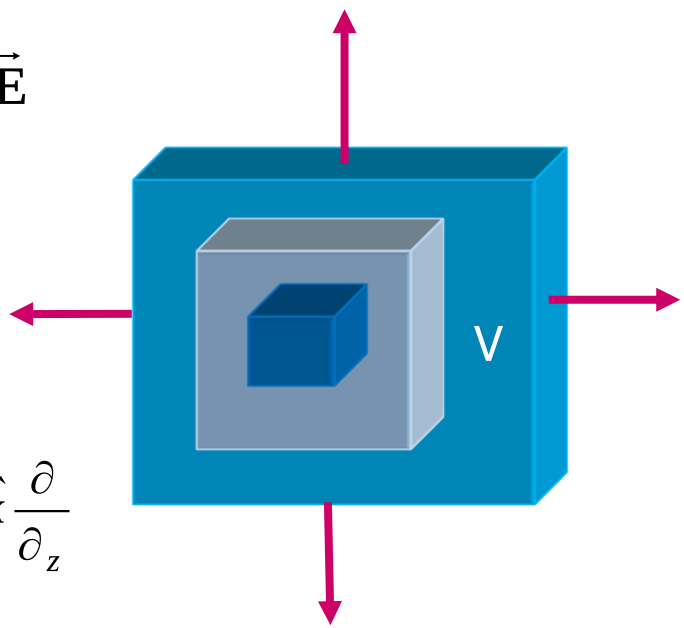
# Dywergencja pola wektorowego

Dywergencja (źródłowość) pola wektorowego - operator różniczkowy przyporządkowujący trójwymiarowemu polu wektorowemu pole skalarne będące formalnym iloczynem skalarnym operatora nabla z polem.

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{\mathbf{E}} \circ \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{A}}}{V}$$

jest w granicy nieskończenie małej objętości V, strumieniem wychodzącym ze źródła i określa jego wydajność

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \circ \vec{\mathbf{E}}$$




Operator nabla:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial_z}$$

# Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

umożliwia zamianę całki powierzchniowej na objętościową (potrójną) i na odwrót

$$\boxed{\oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \oiiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}\, dV}$$

Z prawa Gaussa w postaci całkowej:

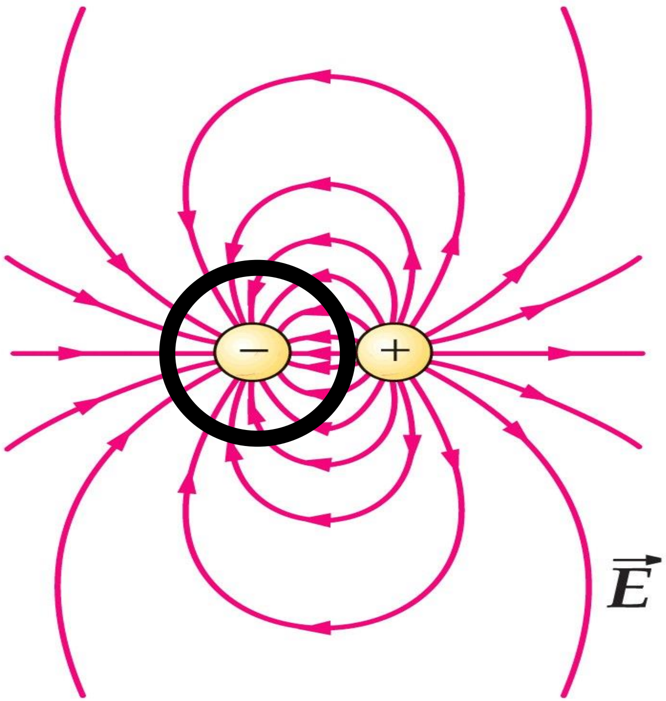
$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_o}$$ gdzie $$Q_{wew} = \oiiint_V \rho dV \quad \Rightarrow \oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\varepsilon_o} \oiiint_V \rho dV$$

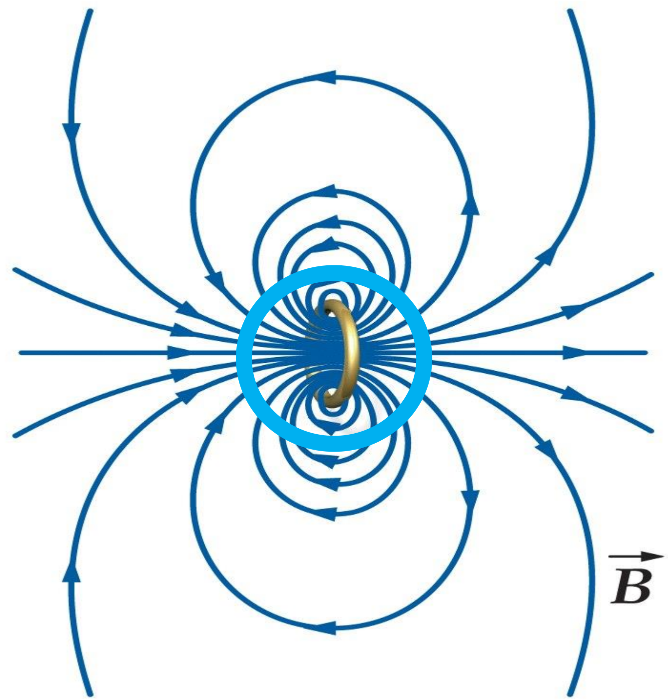
Porównując wyrażenia podcałkowe:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \circ \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}}$$

różniczkowa postać prawa Gaussa

# Prawo Gaussa dla magnetyzmu

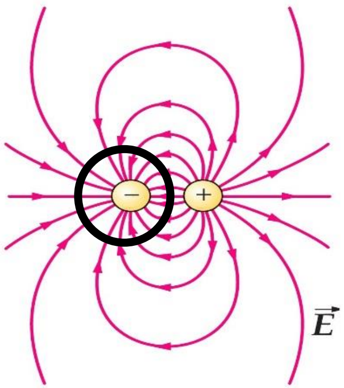



Istnieje pojedynczy ładunek punktowy – monopol elektryczny

Brak monopoli magnetycznych. Magnes czy pętla z prądem stanowią dipol magnetyczny

# Prawo Gaussa dla magnetyzmu

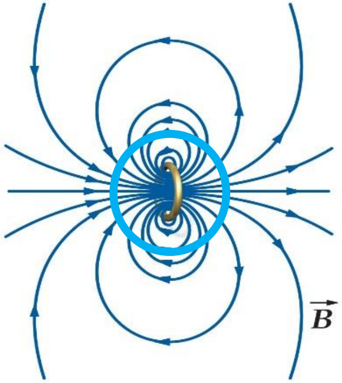



$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$div\,\mathbf{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$$

$$div\,\mathbf{\vec{B}} = 0$$




Treścią prawa Gaussa dla magnetyzmu jest fakt, że pole magnetyczne jest bezźródłowe. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zeru. Nie można wyodrębnić pojedynczego bieguna magnetycznego – nie istnieją monopole magnetyczne.

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{\vec{B}} \circ \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

# Prawo Gaussa - podsumowanie

**W praktyce zastosowanie prawa Gaussa jest ograniczone do konkretnych przypadków - symetrii:**

- pole (jednorodne) od naładowanej nieskończonej płaszczyzny (powierzchniowy rozkład ładunku)
- pole (o symetrii cylindrycznej) od nieskończenie długiego pręta (liniowy rozkład ładunku) lub walca (powierzchniowy rozkład ładunku – walec przewodzący, objętościowy rozkład ładunku - walec nie przewodzący)
- pole (o symetrii sferycznej) od naładowanej kuli lub powierzchni sferycznej

**Obliczenia - postępowanie:**

- Wybrać właściwą powierzchnię Gaussa – dopasowaną do symetrii rozkładu ładunku. Uzasadnić ten wybór. Wykonać odpowiedni rysunek
- Obliczyć strumień pola elektrycznego przez powierzchnię Gaussa (lewa strona prawa Gaussa).
- Znaleźć ładunek zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa (prawa strona prawa Gaussa).
- Porównać obie strony prawa Gaussa wyznaczając wartość wektora natężenia pola elektrycznego E.