



# Indukcja magnetyczna

Dr hab. Maciej Czapkiewicz

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

[czapkiew@agh.edu.pl](mailto:czapkiew@agh.edu.pl)

<http://layer.uci.agh.edu.pl/M.Czapkiewicz/dydaktyka>



- Pole magnetyczne jest bezźródłowe i wirowe, powstaje gdy płynie prąd

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 J$$

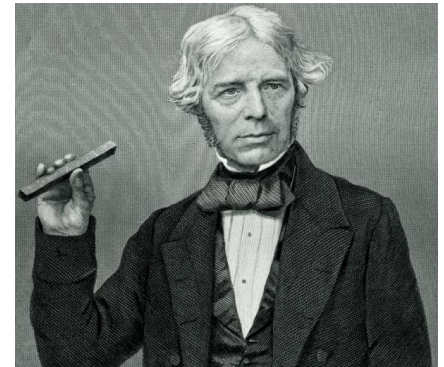
- Pole magnetyczne oddziałuje na przewodnik z prądem (poruszające się ładunki)

$$\mathbf{F}_B = I \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Czy pole magnetyczne może wytwarzać prąd?

1831, Michael Faraday

– indukcja elektromagnetyczna

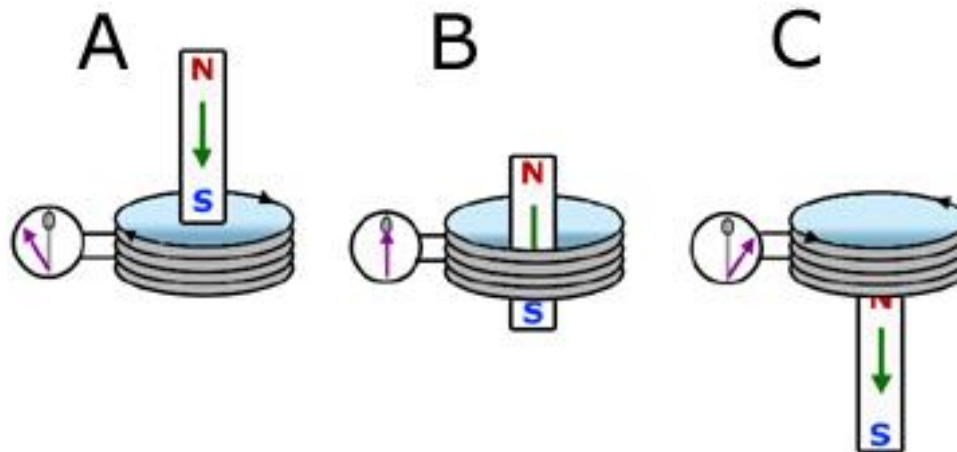


# Indukcja elektromagnetyczna



- M. Faraday: W zamkniętym obwodzie znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym pojawia się siła elektromotoryczna (indukuje się napięcie) równa szybkości zmian strumienia indukcji pola magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię rozpiętą na tym obwodzie.
- Reguła Lenza: siła elektromotoryczna indukcji przeciwstawia się jej przyczynie.

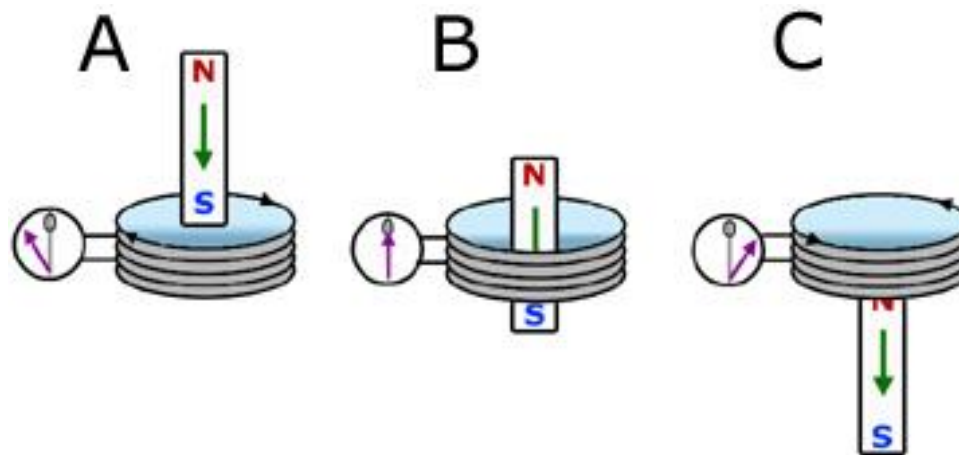
$$\mathcal{E}_{SEM} = - \frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$



# Indukcja elektromagnetyczna



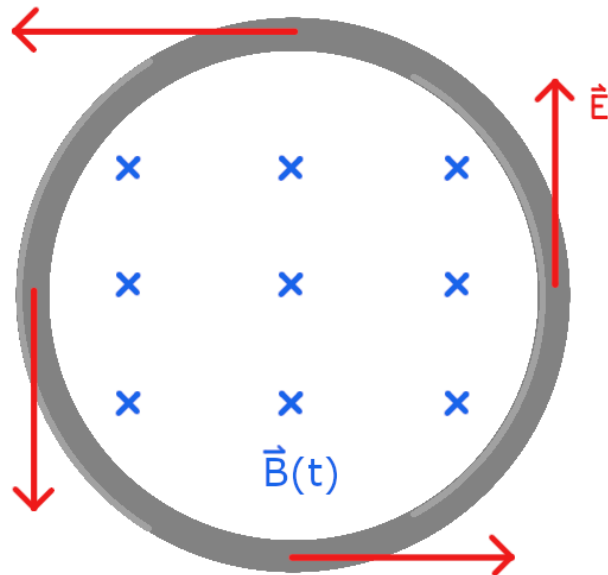
- Reguła Lenza: siła elektromotoryczna indukcji powoduje powstanie prądu który przeciwstawia się zmianie strumienia pola magnetycznego





# Indukcja elektromagnetyczna

- Jeżeli w zamkniętym obwodzie znajdującym, przez który przechodzi zmienny strumień indukcji pola magnetycznego, pojawia się siła elektromotoryczna, to znaczy że powstaje wir pola elektrycznego



$$\oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

# Strumień pola magnetycznego



$$\int_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = \varepsilon_{SEM} [\text{Wb} = \frac{\text{T}}{\text{m}^2}]$$

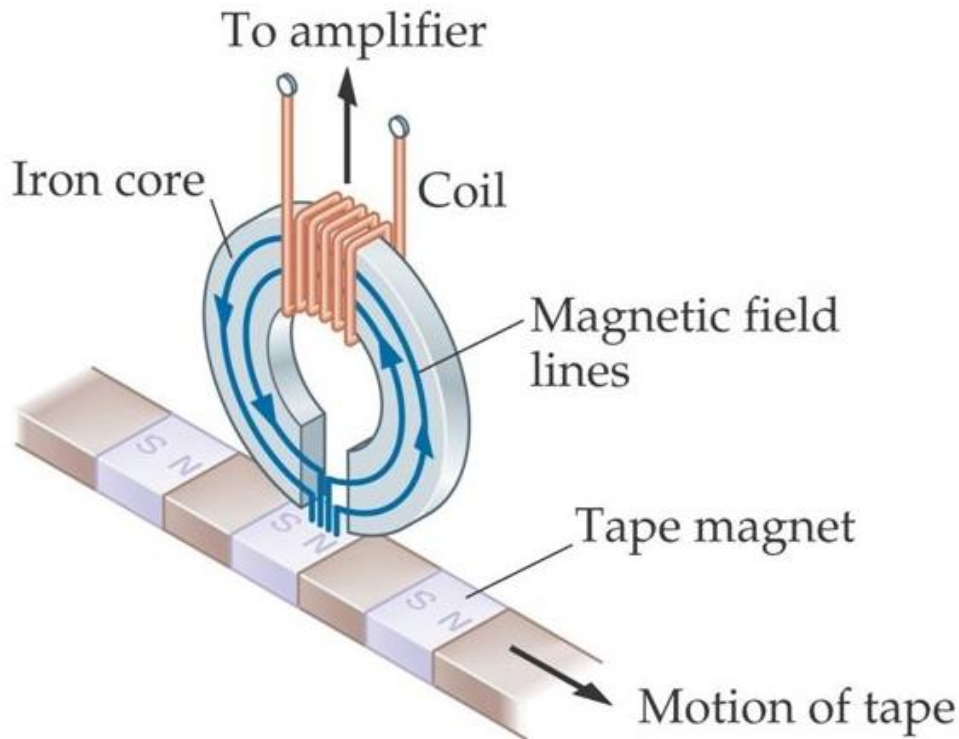
Jak zmieniać strumień?

- Zmiana odległości magnesu  
czujniki zbliżeniowe, głowice odczytowe,
- Zmiana powierzchni  
broń EMP (EPFCG)
- Zmiana kąta  
prądnice prądu przemiennego
- Zmiana pola  
transformatory,  
silniki asynchroniczne, piece indukcyjne,  
samoindukcja cewki

# Zmiana strumienia pola magnetycznego



Jak zmieniać strumień? Poruszanie magnesem/cewką:

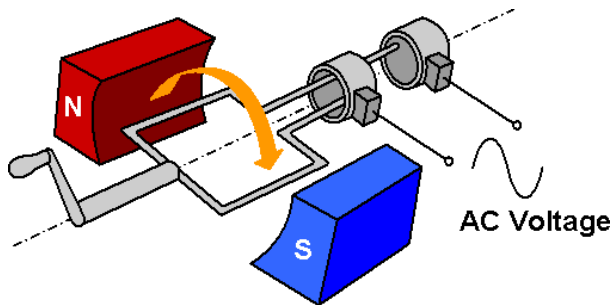
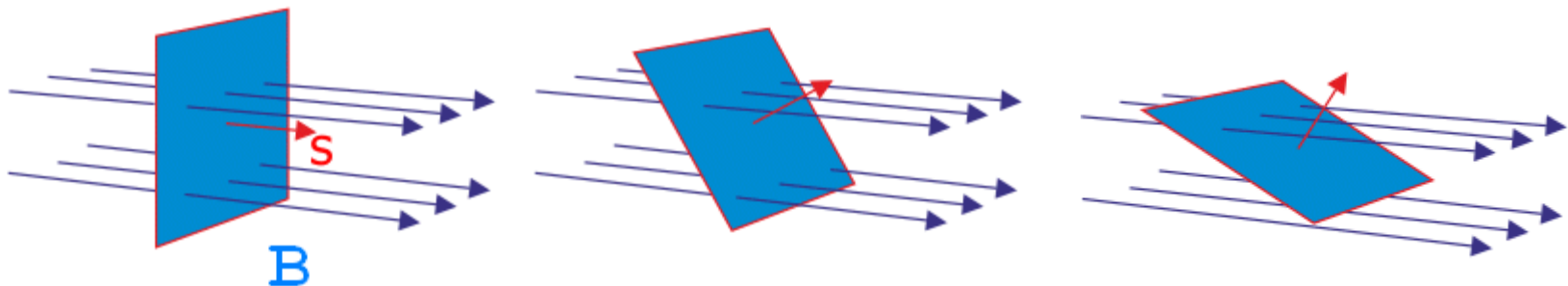


# Zmiana strumienia pola magnetycznego



$$\frac{d}{dt} \int_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = -\varepsilon_{SEM}$$

Jak zmieniać strumień? Zmiana kąta:



$$U(t) = \frac{d}{dt} \phi_B = \frac{d}{dt} (B \cdot S \cdot \cos(\omega t))$$

ponad 95% energii na świetle

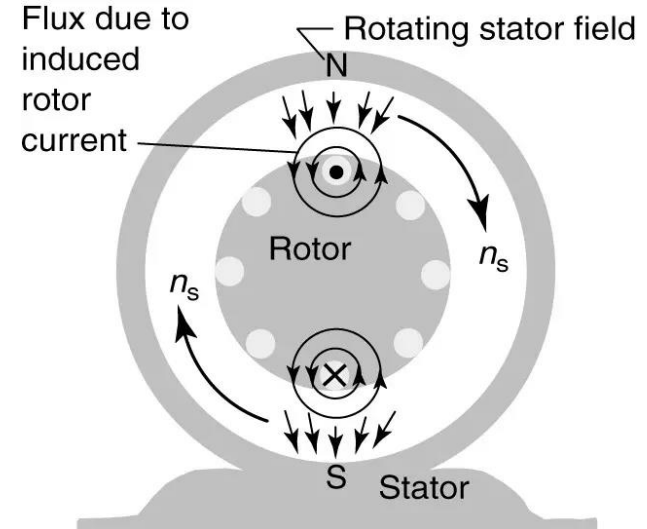
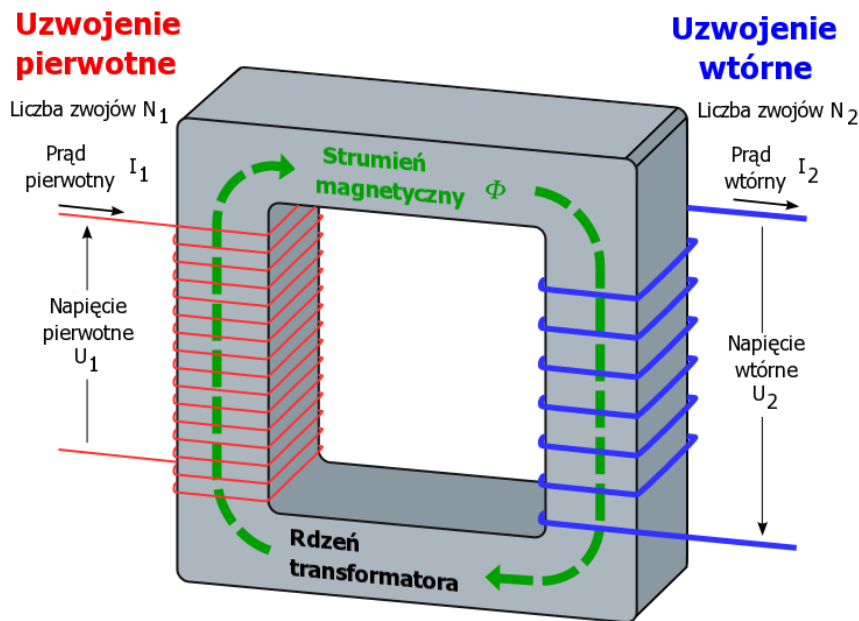


# Zmiana strumienia pola magnetycznego



$$\int_C \frac{d\mathbf{B}}{dt} \circ d\mathbf{s} = -\varepsilon_{SEM}$$

Jak zmieniać strumień? Zmiana natężenia lub kierunku pola:

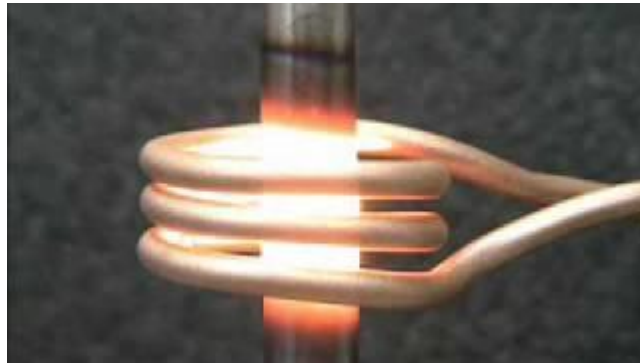


# Zmiana strumienia pola magnetycznego



$$\int_C \frac{dB}{dt} ds = -\varepsilon_{SEM}$$

Szybka zmiana pola magnetycznego generuje silne prądy wirowe



Jak szybko? Zależy od wielkości grzanego elementu, 5...500 kHz

# Cewka: zmienny prąd tworzy zmienne pole



$$B = J\mu_0 N/l$$

Siła elektromotoryczna generowana na jednym zwoju:

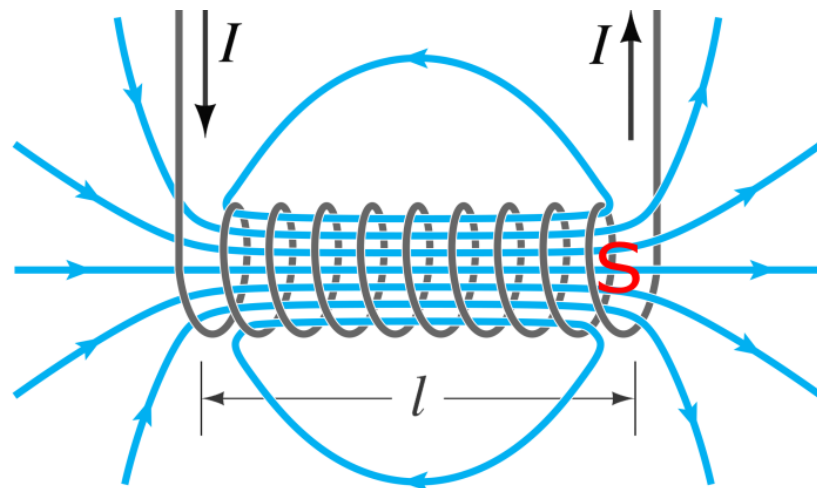
$$\varepsilon_{SEM} = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial t} S\mu_0 N/l$$

Ale zwoje są połączone szeregowo, więc napięcie które prąd płynący przez cewkę indukuje w tej cewce (samoodukcja):

$$U_L = -\frac{\partial J}{\partial t} S\mu_0 N^2/l = -\frac{\partial J}{\partial t} L$$

indukcyjność cewki

$$L = S\mu_0 N^2/l \text{ [H = Wb/A}^2 \text{ = Vs/A]}$$



Dla cewki z rdzeniem indukcyjność jest  $\mu_r$  razy większa

# Cewka w obwodzie prądu przemiennego



Prąd przemienny

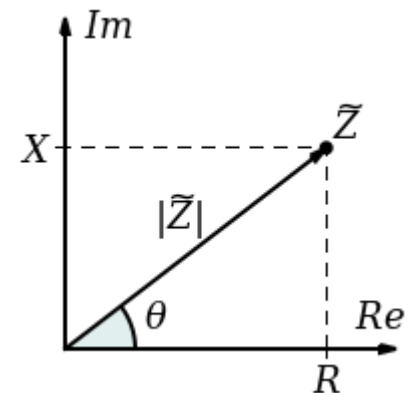
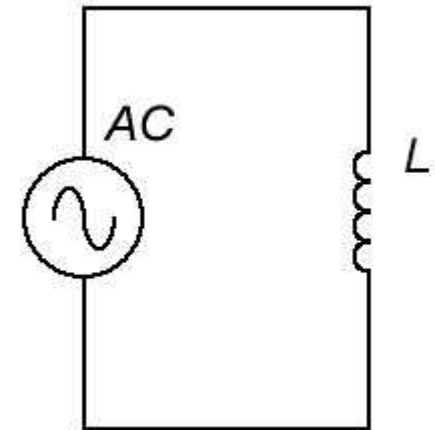
$$J(t) = J_0 \sin(\omega t)$$

Napięcie na cewce:

$$U_L = -\frac{\partial J}{\partial t} L = -J_0 \cos(\omega t) \omega L$$

- Przesunięcie fazowe  $\pi/2$  między prądem i napięciem
- Cewka tłumi sygnały o dużej częstotliwości
- Opór pozorny (bierny) czyli reaktancja:

$$X_L = \omega L = 2\pi f$$





# Cewka w obwodzie prądu stałego

Jak będzie się zmieniał prąd po włączeniu obwodu?

II prawo Kirchoffa:

$$V - JR - \frac{\partial J}{\partial t} L = 0$$

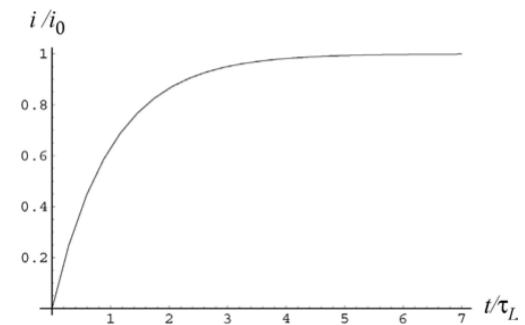
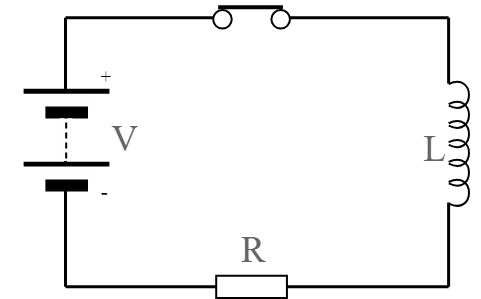
Jest to równanie różniczkowe niejednorodne zwyczajne pierwszego stopnia, można też je rozwiązać przez proste całkowanie po rozdzieleniu zmiennych:

$$\frac{1}{L} \int dt = \int \frac{1}{V - JR} dJ \qquad \frac{t}{L} + c = -\frac{1}{R} \ln(V - JR)$$

$$Ae^{-\frac{R}{L}t} = V - JR \qquad J = \frac{V}{R} - Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

W momencie włączenia prąd nie płynie, więc  $A=V/R$  to prąd stanu ustalonego

$$J(t) = J_0 \left( 1 - e^{-R/L t} \right) \quad \text{Stała czasowa } \tau = R/L \text{ [s]}$$





- Pole magnetyczne jest bezźródłowe i wirowe

$$\oiint_S \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = 0 \qquad \oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_C \mathbf{j} \circ d\mathbf{s}$$

- Pole elektrostatyczne jest źródłowe i bezwirowe

$$\oiint_S \mathbf{E} \circ d\mathbf{s} = \frac{\iiint \rho dV}{\epsilon_0} \qquad \oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = 0$$

- Zmienny strumień pola magnetycznego tworzy wir pola elektrycznego

$$\oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{s}$$



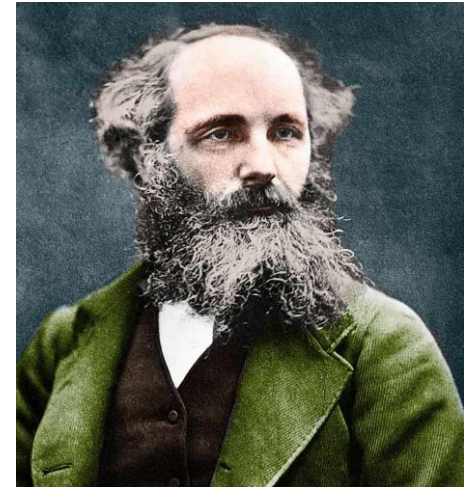
# Prąd przesunięcia

- James Clerk Maxwell, 1861: skoro zmiana pola magnetycznego indukuje wirowe pole magnetyczne, to powinno też być na odwrót – modyfikacja prawa Ampera:

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_D)$$

Prąd przesunięcia

$$I_D = \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$$



Wir pola magnetycznego generowany jest przez prąd lub zmienne pole  $E$

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_C \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \circ d\mathbf{s}$$

# Prawa Maxwella (całkowe)



## ➤ Prawa Gaussa

$$\oiint_S \mathbf{E} \circ d\mathbf{s} = \frac{\iiint \rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = 0$$

## ➤ Prawa indukcji

$$\oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = - \iint_{SC} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{SC} \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \circ d\mathbf{s}$$



# Indukcja elektryczna i magnetyczna



- Pole elektryczne  $\mathbf{E}$  i magnetyczne  $\mathbf{H}$ , w próżni
- Indukcja pola elektrycznego

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

- Indukcja pola magnetycznego

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \iint_{SC} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

- Prawa indukcji w próżni

$$\oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = - \iint_{SC} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \circ d\mathbf{s} \quad \oint_C \mathbf{H} \circ d\mathbf{l} = \iint_{SC} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

# Operator $\nabla$



$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient pola skalarnego jest wektorem:

$$\text{grad } V = \nabla V$$

Dywergencja pola wektorowego jest skalarem:

$$\text{div} \mathbf{E} = \nabla \circ \mathbf{E}$$

Rotacja pola wektorowego jest wektorem:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$$



# Dywergencja pola wektorowego

Dywergencja:

$$\nabla \circ \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{E} \circ d\mathbf{s}}{V}$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\oiint_S \mathbf{E} \circ d\mathbf{s} = \iiint_{VS} \nabla \circ \mathbf{E} dV$$

Prawa Gaussa, postać różniczkowa:

$$\nabla \circ \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \nabla \circ \mathbf{H} = 0$$



# Rotacja pola wektorowego

Rotacja:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{H} \circ d\mathbf{l}}{S}$$

Twierdzenie Stokesa:

$$\oint_C \mathbf{H} \circ d\mathbf{l} = \iint_{SC} \nabla \times \mathbf{H} \circ d\mathbf{s}$$

Prawa Ampera i Faradaya, postać różniczkowa:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

# Prawa Maxwella (różniczkowe)



- Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \circ \mathbf{H} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

# Prawa Maxwella dla próżni (różniczkowe)



- Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \circ \mathbf{H} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego, zmienne pole elektryczne indukuje wir pola magnetycznego