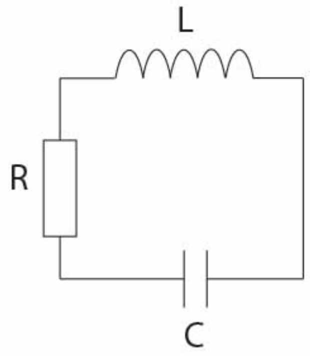
# Wykład 8

# Drgania
# oscylator harmoniczny

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki,  paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

# Drgania

Drgania - zjawiska powtarzające się okresowo




Drgania harmoniczne – wielkość drgająca zmienia się sinusoidalnie

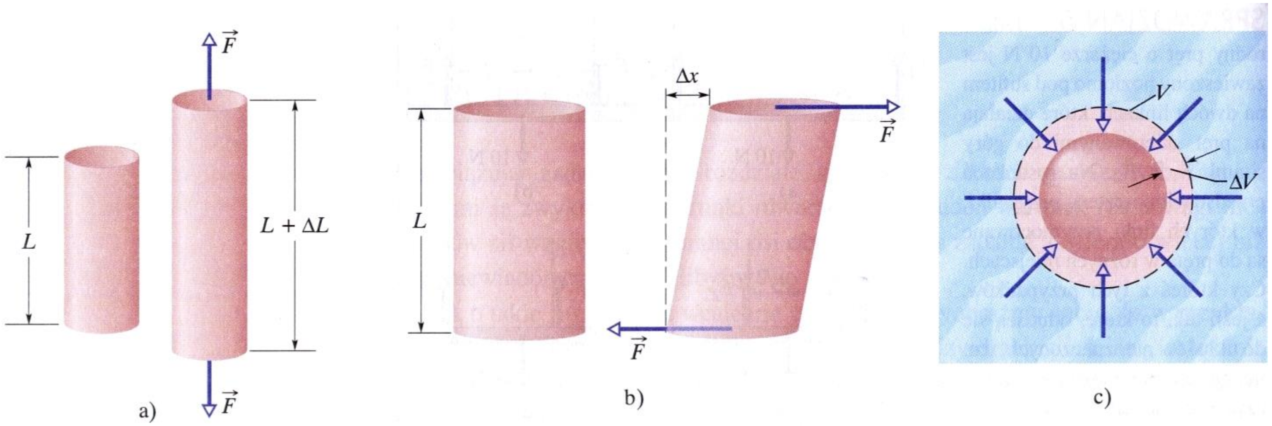
- Drgania mechaniczne
- Drgania elektromagnetyczne

Ruch okresowy (periodyczny) - stan układu powtarza się w jednakowych odstępach czasu.

# Wielkości w ruchu okresowym harmonicznym

- Okres – czas trwania jednego pełnego drgania
- Częstotliwość – liczba drgań w jednostce czasu
- Położenie równowagi – położenie w którym na punkt materialny nie działa żadna siła
- Przemieszczenie – odległość od położenia równowagi w dowolnej chwili
- Amplituda – maksymalne wychylenie z położenia równowagi

# Przyczyna drgań




naprężenie rozciągające

naprężenie ścinające

naprężenie objętościowe

**Naprężenie** to siła odkształcająca przypadająca na jednostkową powierzchnię na którą działa

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

**Naprężenie** zależy od materiału (moduł sprężystości) i odkształcenia

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

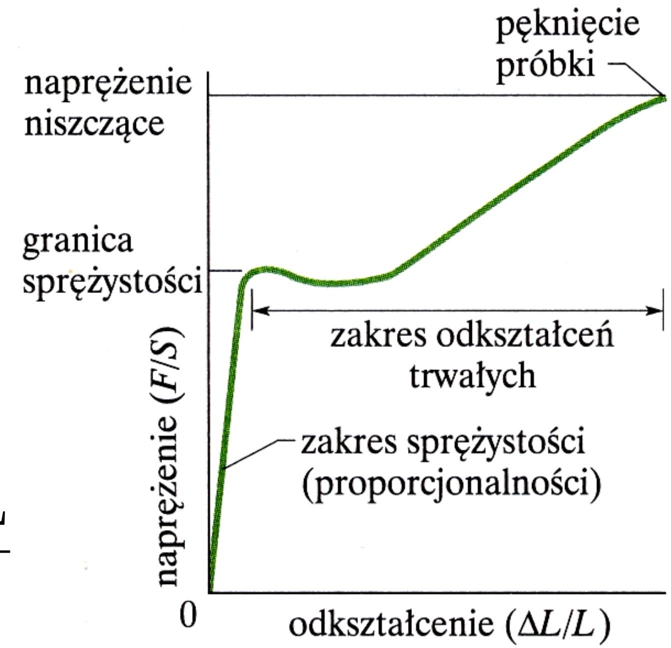
*E* – moduł Younga

# Naprężenie rozciągające (ściskające)

Naprężenie σ definiuje się jako: $$\sigma = \frac{F}{S}$$

gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa ΔL/L – względna zmiana długości




W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje **prawo Hooke'a**

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

E- moduł Younga

# Naprężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścinania) naprężenie σ definiuje się również jako:

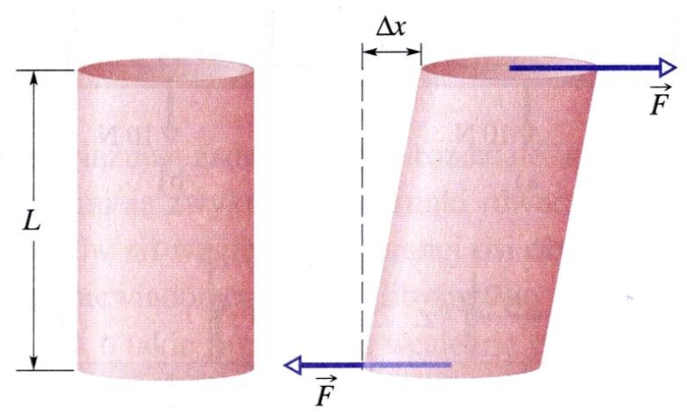
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ale siła działa równolegle do powierzchni S

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa Δx/L

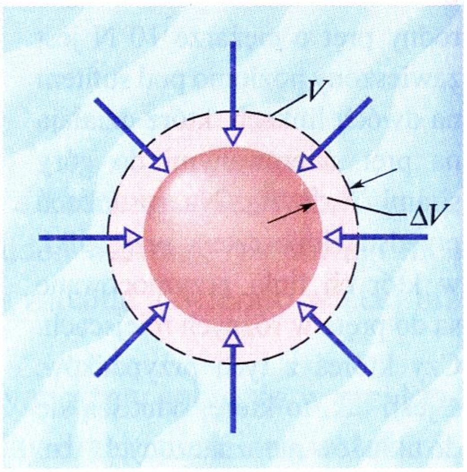
$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L}$$

moduł ścinania



# Naprężenie objętościowe

Naprężeniem jest ciśnienie p cieczy




$$p = \frac{F}{S}$$

Jednostką ciśnienia jest 1 Pa = 1N/m$^2$

Miarą odkształcenia jest względna zmiana objętości ΔV/V

$$p = K\frac{\Delta V}{V}$$

K - moduł sprężystości objętościowej lub moduł ściśliwości

# Przykład

Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie $4{,}0 \cdot 10^7$ N/m$^2$. Ile wynosi, związana z tym ciśnieniem, względna zmiana objętości ΔV/V wody a ile kulki wykonanej ze stali? Moduł ściśliwości wynosi $2{,}2 \cdot 10^9$ N/m$^2$ dla wody, a dla stali $16 \cdot 10^{10}$ N/m$^2$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

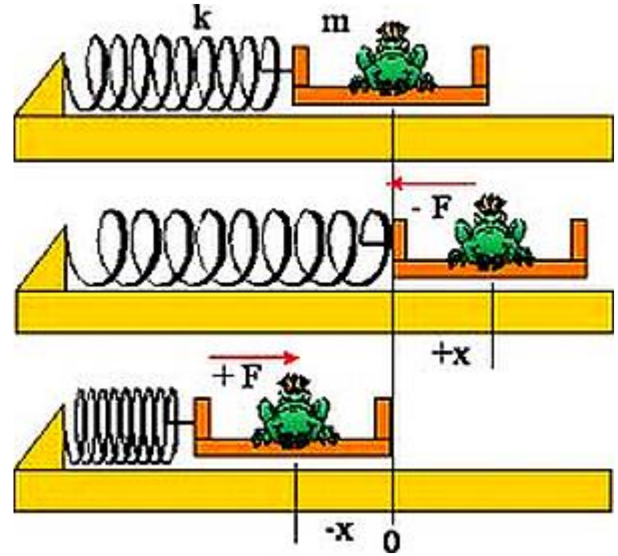
dla wody

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{2{,}2 \cdot 10^9} = 1{,}8\%$$

dla kuli stalowej

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{16 \cdot 10^{10}} = 0{,}025\%$$

# Oscylator harmoniczny




Dla małych wychyleń (w granicach sprężystości

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

$$F = \frac{E \cdot S}{L}\Delta L \qquad k = \frac{E \cdot S}{L}$$

Siła proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi.

Zwrot siły przeciwny do zwrotu wychylenia z położenia równowagi.

$$F = -kx$$

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad F\hat{\imath} = -kx\hat{\imath}$$

# Równanie ruchu oscylatora

Na oscylator działa siła: $F = -kx$

Z II zasady dynamiki Newtona: $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Porównując otrzymujemy: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Jest to równanie różniczkowe drgań harmonicznych

Przyjmując: $\dfrac{k}{m} = \omega^2 \longrightarrow \boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$

# Oscylator harmoniczny

Oscylator harmoniczny prosty

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Częstość drgań własnych $\longrightarrow$ $\omega$

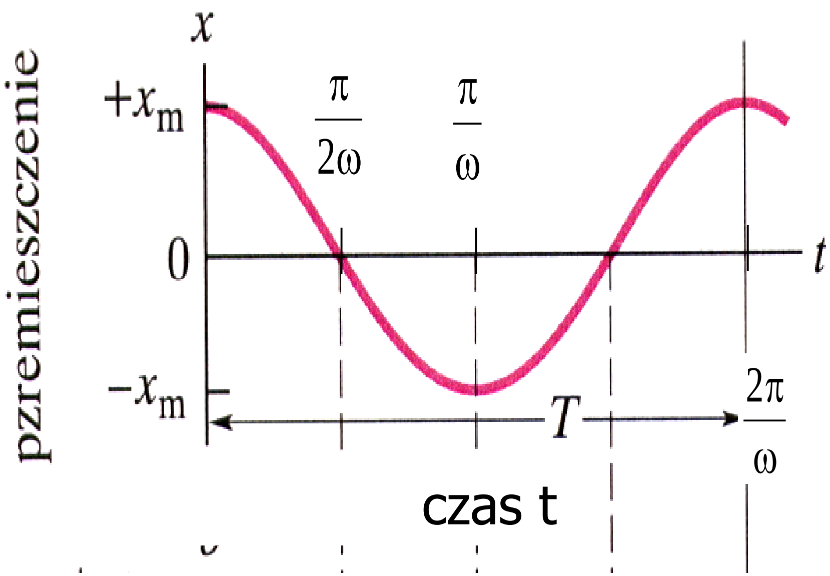
Dla układu masa **m** – sprężyna o stałej sprężystości **k** :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Stąd okres drgań **T** :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

# Rozwiązanie oscylatora harmonicznego




$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

wychylenie z położenia równowagi

amplituda

częstość

faza początkowa

**okres ruchu T** : czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

**amplituda** : wartość bezwzględna maksymalnego wychylenia z położenia równowagi, oznaczana $x_m$, A

$$T = \frac{1}{\nu}$$

**częstotliwość** : liczba drgań (cykli) na sekundę (jednostka 1Hz)

# Równanie ruchu oscylatora

a) rozwiązanie oscylatora
położenie:

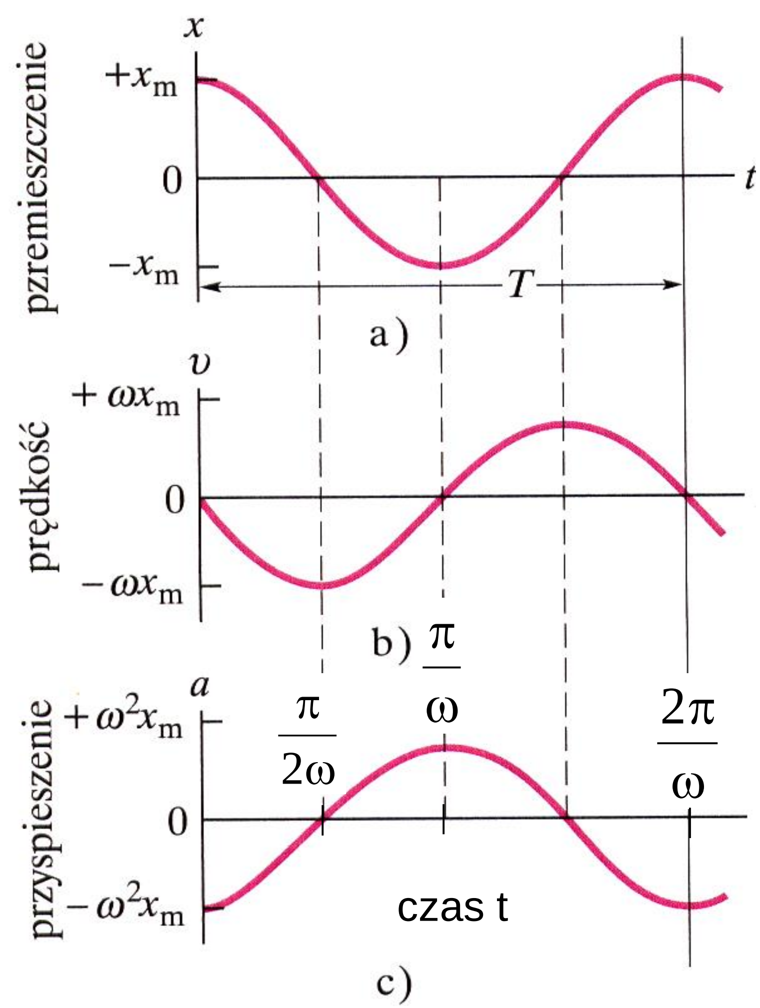
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

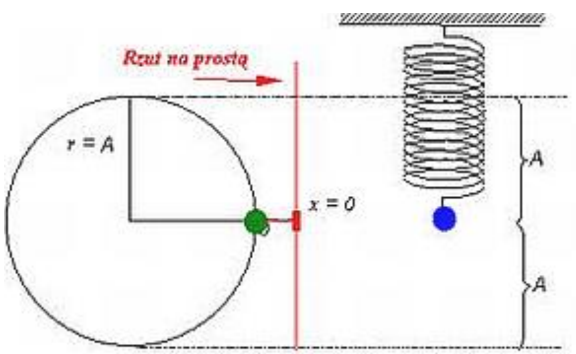
b) prędkość:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

c) przyspieszenie:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

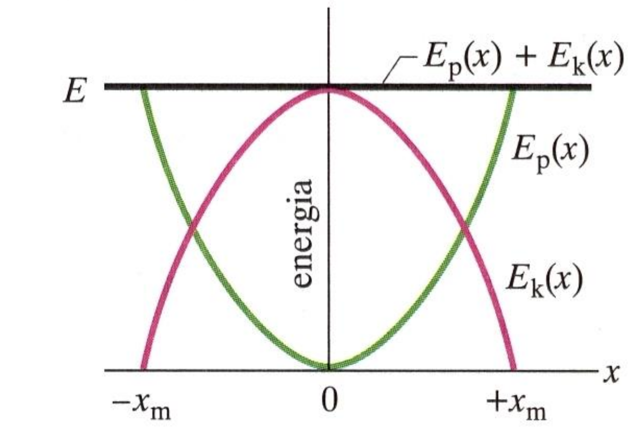


# Energia w ruchu harmonicznym

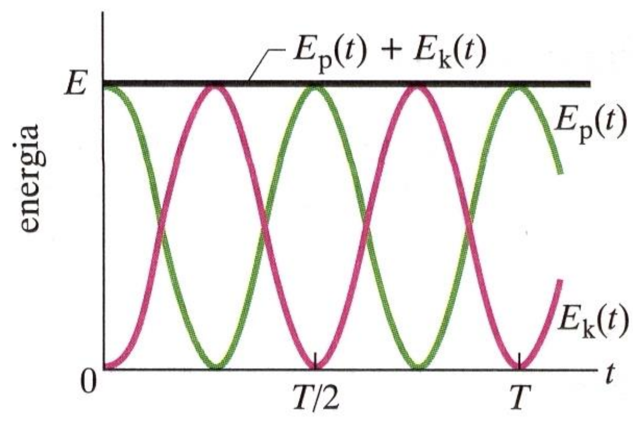
energia potencjalna sprężystości:

$$\boxed{E_p = k\frac{x^2}{2}} \qquad E_p = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$




energia kinetyczna:

$$\boxed{E_k = m\frac{v^2}{2}} \qquad E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

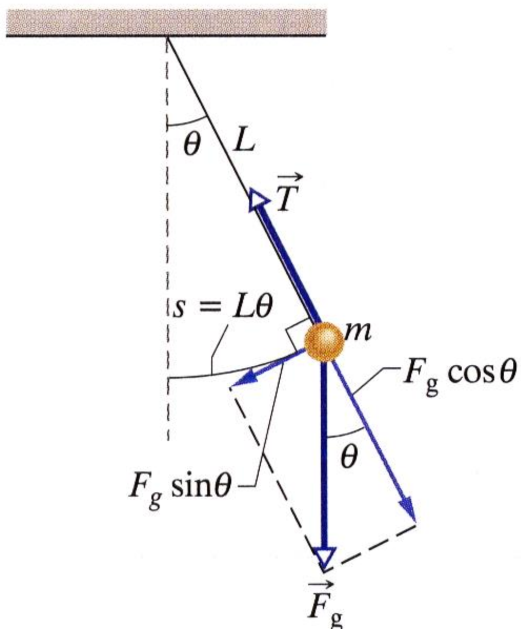



energia całkowita

$$E_C = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

# Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to przykład oscylatora harmonicznego:




Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$M = -L(F_g \sin\theta) = -Lmg\sin\theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Zakładamy, że kąt $\theta$ jest mały (małe drgania) czyli $\sin\theta \approx \theta$ :

$$M = -Lmg\theta$$

# Wahadło matematyczne

$$M = -Lmg\theta$$

Równanie oscylatora harmonicznego: $$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\,\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Lmg\,\theta}{I} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$

gdzie $\omega_o = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$

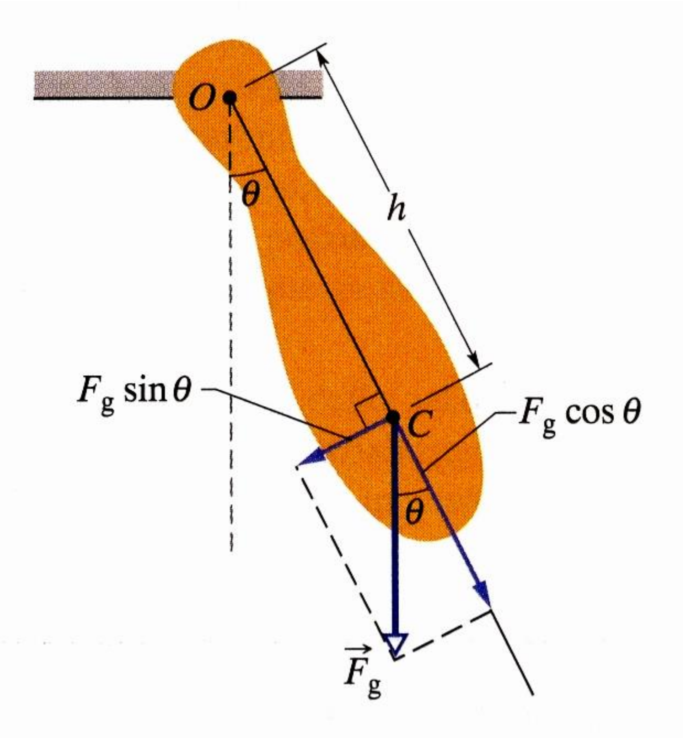
ale $I = mL^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

**wzór prawdziwy dla małych wychyleń**

# Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym




$$M = -mgh\sin\theta$$

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta$$

dla małych kątów $\sin\theta \approx \theta$

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\,\theta = 0$$

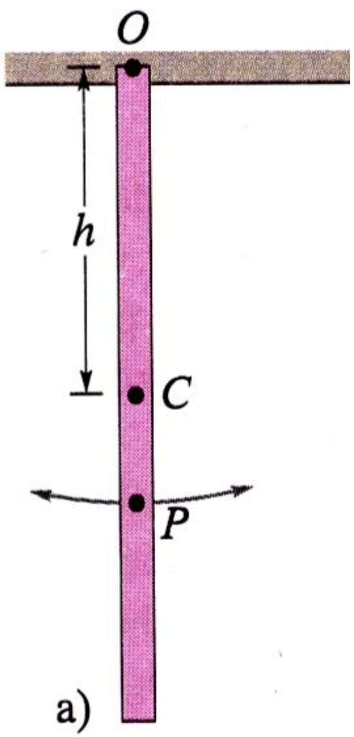
$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_{śm} + mh^2}}$$

wzór dla małej amplitudy drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{śm} + mh^2}{mgh}}$$

# Przykład wahadła fizycznego

Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O, znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T, wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.




Rozwiązanie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{śm} + mh^2}{mgh}} \qquad I_{śm} = \frac{1}{12}mL^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

# Zadanie

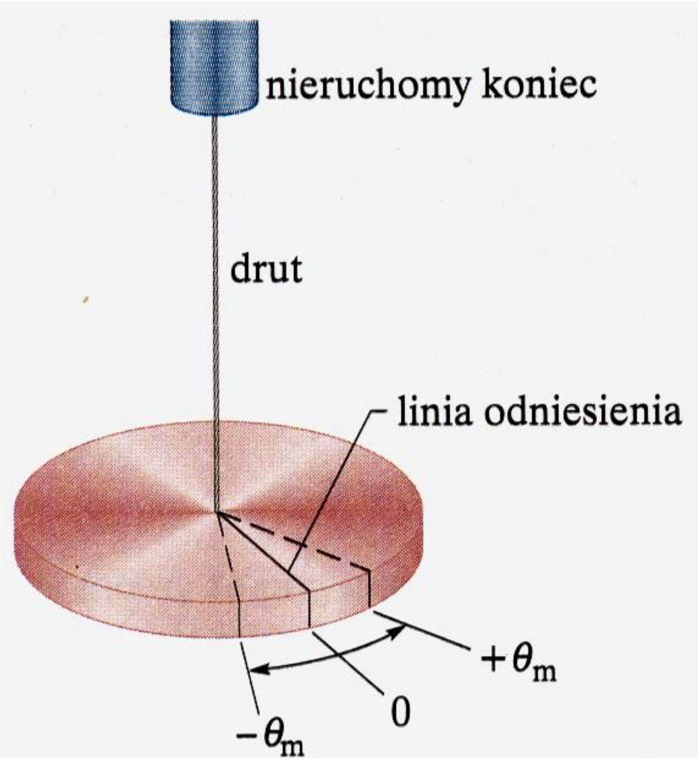
Cienki, jednorodny pręt o masie *m* i długości *L* zawieszono w odległości $x=1/3\ L$ od końca. Pręt wychylono o niewielki kąt z położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie.

a) Oblicz moment bezwładności takiego wahadła.

b) Oblicz wypadkowy moment siły działający na wahadło.

c) Podaj różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego stosując przybliżenie małych kątów i na jego podstawie oblicz okres drgań tego wahadła.

# Wahadło torsyjne



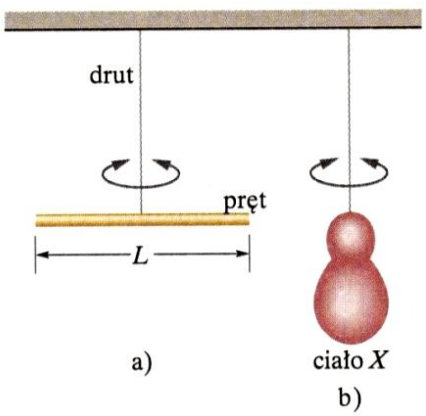

$$M = -\kappa\theta$$

moment kierujący $\kappa$ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

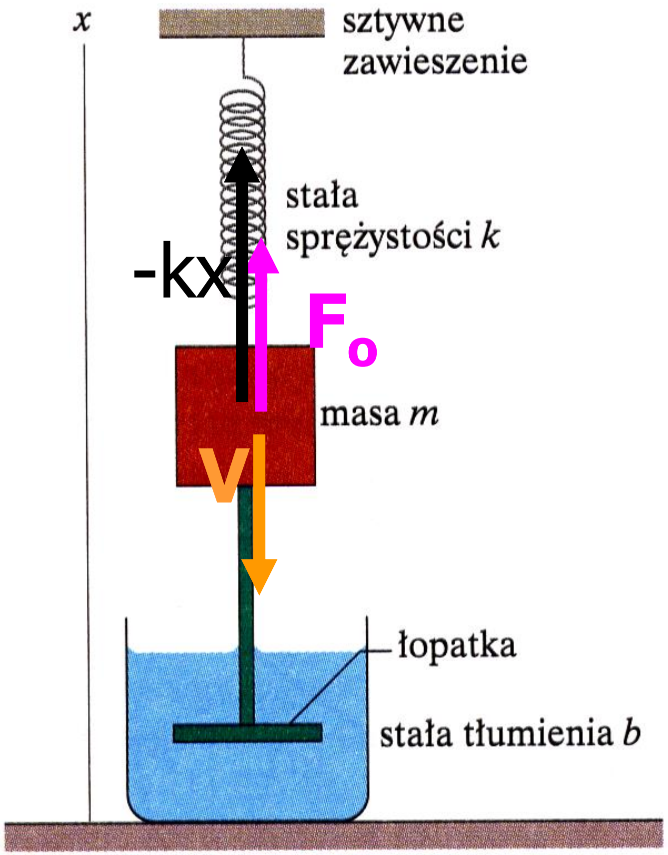
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \omega_o^2 = \frac{\kappa}{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$




Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach

# Oscylator harmoniczny tłumiony




$$F_{wypadkowa} = F_{sprężystości} + F_{oporu}$$

Siła oporu – siła Stokes'a

$F_{oporu} = -b \cdot V$ gdzie *b* to stała tłumienia

*zatem*

$$ma = -kx - bV$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

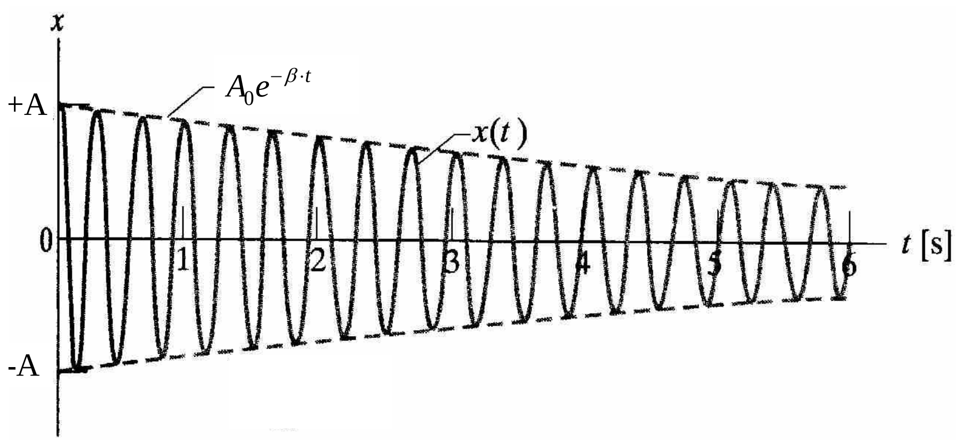
gdzie $\beta = \dfrac{b}{2m}$ to współczynnik tłumienia

# Oscylator tłumiony - rozwiązanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

<u>Dla małych wartości współczynnika tłumienia</u>, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta\cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$




gdzie *A(t)* jest malejącą w czasie amplitudą oscylatora harmonicznego

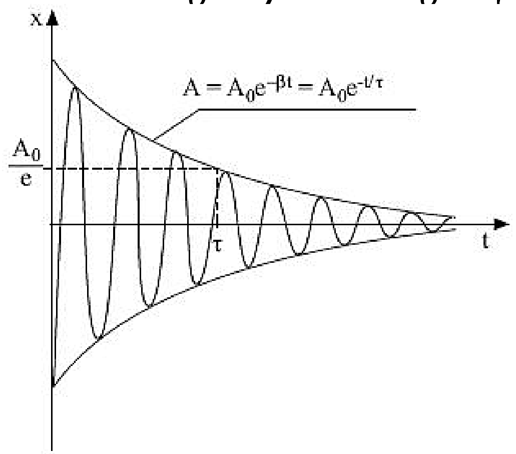
$$A(t) = A_o e^{-\beta.t}$$

# Oscylator tłumiony - rozwiązanie

oraz

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$



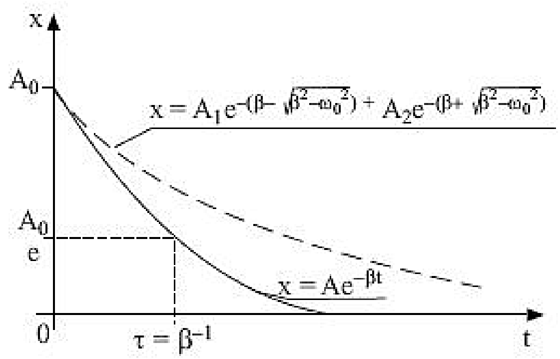

Zależność $x = x(t)$ dla drgań tłumionych

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia

rozwiązanie periodyczne – gdy:

$$\omega_0 >> \beta \quad bo \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

τ - czas relaksacji (amplituda maleje *e* – razy)




Zależności $x = x(t)$ dla dwóch rozwiązań aperio-dycznych $\beta = \omega_0$ i $\beta \rangle \omega_0$

Miarą tłumienia jest logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}$$

$\omega_0 = \beta$ rozwiązanie krytyczne

$\omega_0 < \beta$ rozwiązanie aperiodyczne

https://www.edukator.pl/resources/applet/drgania-tlumione

# Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego

Jeżeli chcemy podtrzymać drgania to musimy działać odpowiednią siłą zewnętrzną $F(t)$ Siłę taką nazywamy siłą wymuszającą

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

Równanie ruchu

$$ma = -kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F(t) \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t \qquad \tau = \frac{m}{\gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{oraz} \quad \alpha_0 = \frac{F_0}{m} \qquad \beta = \frac{1}{2\tau}$$

układ jest zasilany z częstością $\omega$ różną od częstości własnej $\omega_0$

Drgania (wymuszone) odbywają się z częstością siły zewnętrznej, a nie z częstością własną.

# Rezonans

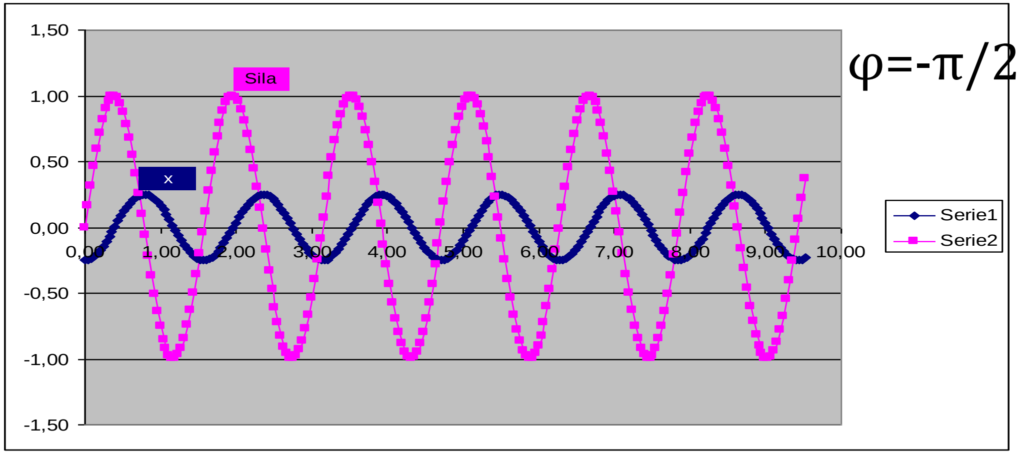
Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

- amplituda A(Ω) jest funkcją częstości wymuszenia

$$A(\Omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

$$tg\phi=\frac{2\beta\cdot\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

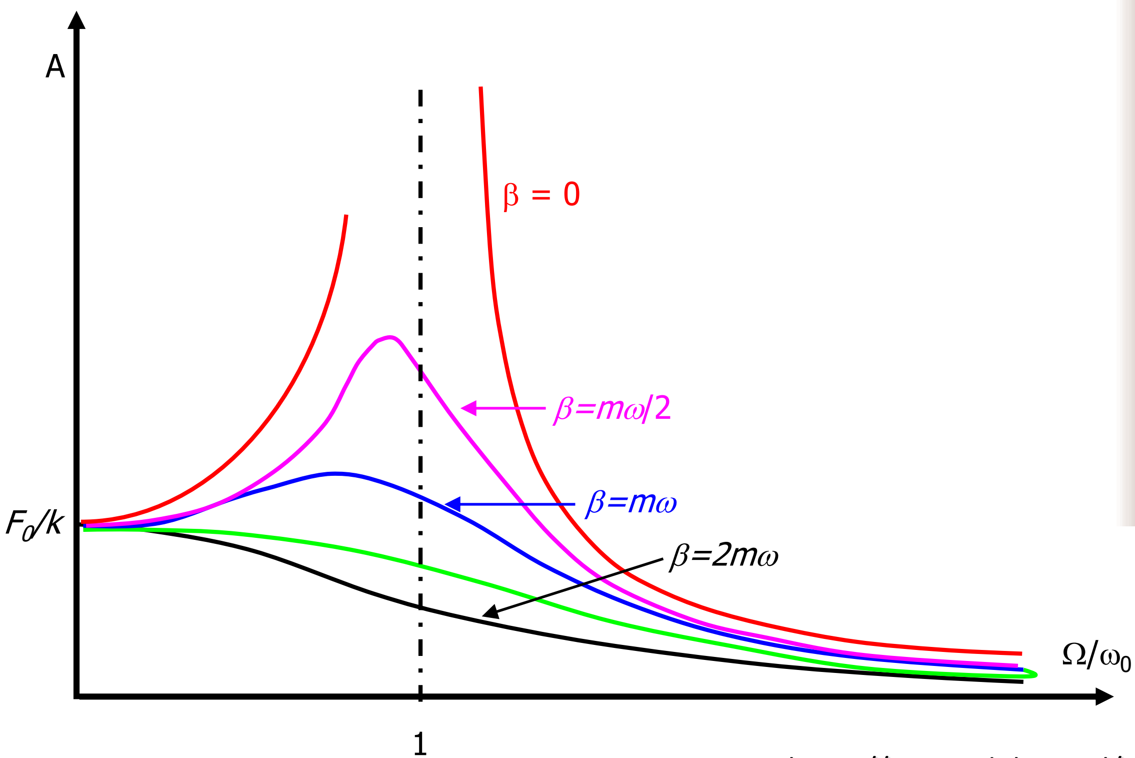
- przesunięcie fazowe φ(Ω) nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia. Informuje o jaki kąt maksimum wychylenia wyprzedza maksimum siły wymuszającej

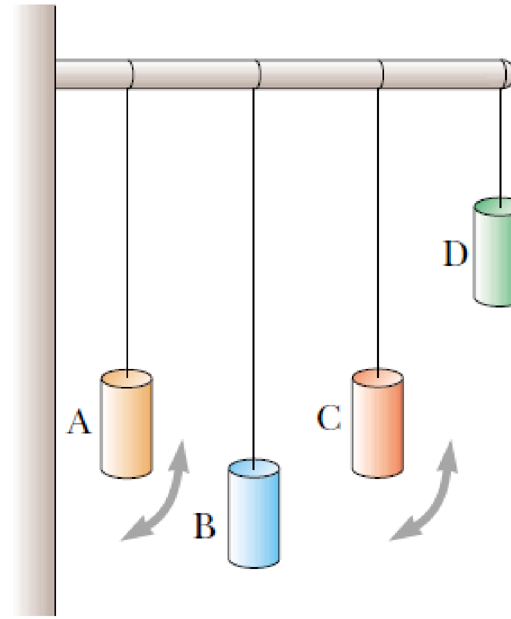



φ=-π/2

# Rezonans

**Rezonans** występuje gdy amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza że częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych




https://www.edukator.pl/resources/applet/drgania-wymuszone

# Składanie drgań

zachodzących w tym samym kierunku

$x_1(t)=A_1cos(\omega_1t+\varphi_1)$

$x_w(t)=x_1(t)+x_2(t)$

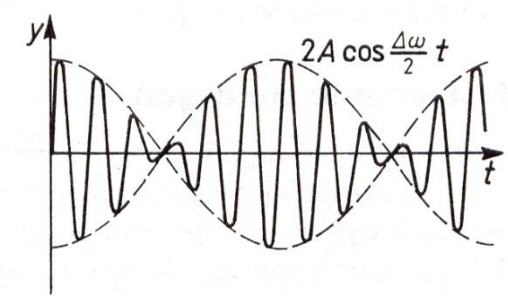
$x_2(t)=A_2cos(\omega_2t+\varphi_2)$

gdy amplitudy i częstości są jednakowe, a drgania są przesunięte w fazie o φ: $x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$

gdy φ = π - wygaszenie drgań

gdy φ = 2π - wzmocnienie

$x_{wyp}= 2A\ cos\ (\omega t)$



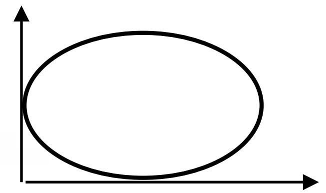

Gdy drgania mają zbliżoną częstotliwość otrzymujemy drgania o modulowanej amplitudzie.

# Składanie drgań

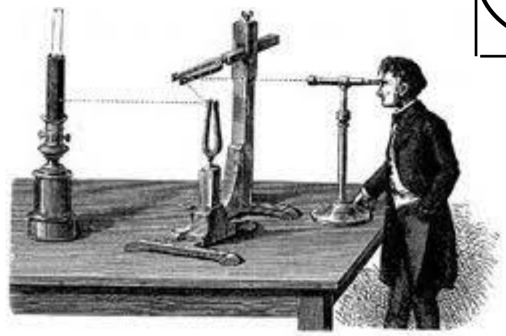
Składanie drgań zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

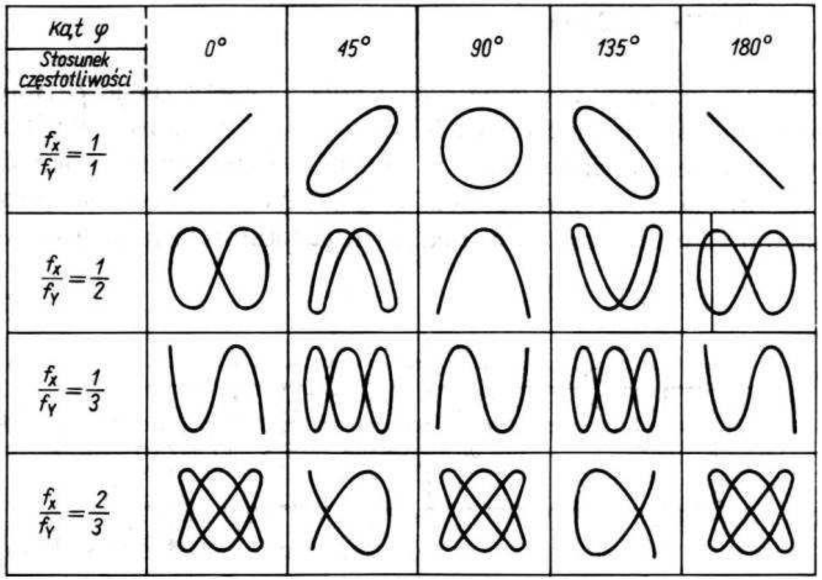
np.

$$x(t) = A_x \sin \omega t \qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad \frac{x^2(t)}{A_x{}^2} + \frac{y^2(t)}{A_y{}^2} = 1$$



Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857






# Przykład

Do płytek odchylania poziomego i pionowego oscyloskopu przyłożono napięcia: $U_x = a \cdot \sin\omega t$ oraz $U_y = b \cdot \cos 2\omega t$. Wyznaczyć tor promienia na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie:

Równanie toru – należy wyeliminować czas z równań:

$$\frac{U_y}{b} = \cos 2\omega t \qquad \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t$$

$$\frac{U_x}{a} = \sin \omega t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U_y}{b} = 1 - 2\left(\frac{U_x}{a}\right)^2$$

stąd $U_y = b - \frac{2b}{a^2} U_y^2$

parabola

# Zadanie

Ciało o masie *m* umocowane do sprężyny odciągnięto z położenia równowagi na odległość *L* i puszczono swobodnie aby wykonywało drgania harmoniczne o okresie *T*. Oblicz:

- czas, w którym ciało przebędzie drogę od położenia równowagi do połowy maksymalnego wychylenia.
- prędkość ciała w połowie maksymalnego wychylenia.
- maksymalną wartość siły sprężystości.
- całkowitą energię mechaniczną drgań.
- czas po którym energia kinetyczna oscylatora będzie równa jego energii potencjalnej.