

FIZYKA

Laboratorium – opracowanie danych pomiarowych

Dr hab. Maciej Czapkiewicz

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

czapkiew@agh.edu.pl

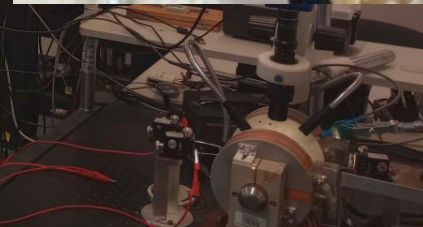
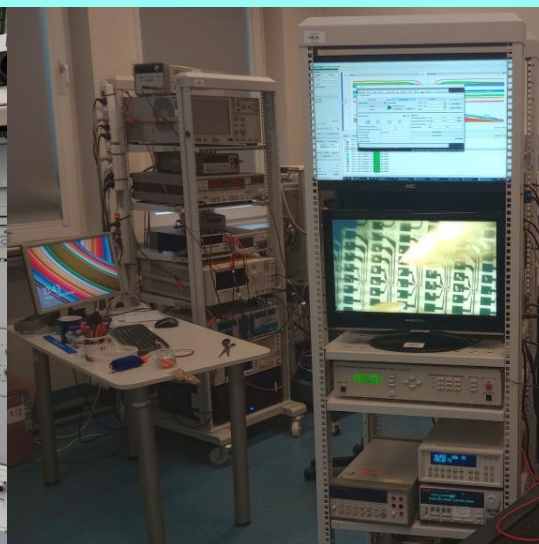
<http://layer.uci.agh.edu.pl/M.Czapkiewicz>

FIZYKA

- FIZYKA TO WIELKIE TEORIE ALE RÓWNIEŻ ...
- EKSPERYMENTY I POMIARY, A WYNIKI POMIARÓW PODAJEMY...
- JAKO ROZSĄDNĄ LICZBĘ, Z ODPOWIEDNIĄ DOKŁADNOŚCIĄ I JEDNOSTKĄ.

FIZYKA W PRAKTYCE

Zespół Magnetycznych Układów Wielowarstwowych i Elektroniki Spinowej
Eksperymentalne badania zjawisk spinowych w cienkich strukturach wielowarstwowych. Projektowanie, wytwarzanie i badanie nowatorskich prototypowych urządzeń spintronicznych, takich jak komórki pamięci, czujniki pola magnetycznego, komponenty wysokiej częstotliwości i elementy sieci neuronowych na potrzeby energooszczędnej elektroniki przyszłości. Badania nowych materiałów dla potrzeb spintroniki.



WPROWADZENIE do LABORATORIUM Z FIZYKI

EKSPERYMENT CZYLI LABORATORIUM FIZYCZNE DLA STUDENTÓW



□ Cele laboratorium:

- dydaktyczne:
 - umiejętność samodzielnych pomiarów
 - praktyczne zastosowanie wiedzy
 - oswojenie z nową metodą pracy
 - przygotowanie do prac dyplomowych
- wychowawcze:
 - samodzielność i jednocześnie praca zespołowa
 - odpowiedzialność
- umiejętność pracy w zespole

Browser address bar: <https://iet.agh.edu.pl/laboratorium-z-fizyki/>

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

iet WYDZIAŁ INFORMATYKI, ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI AGH

Szukaj na stronie ...

Regulamin laboratorium z fizyki

Pobierz plik .pdf

Rachunek niepewności pomiaru

Pobierz plik .pdf

Harmonogramy

Semestr zimowy	Semestr letni
Laboratorium dla Cyberbezpieczeństwa	
Laboratorium dla Elektroniki i Telekomunikacji - studia niestacjonarne	
Laboratorium dla Elektroniki	
Laboratorium dla Nowoczesnych Technologii w Kryminalistyce	

< > ↻ 🔒 <https://iet.agh.edu.pl/laboratorium-z-fizyki/>

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

iet WYDZIAŁ
INFORMATYKI, ELEKTRONIKI
I TELEKOMUNIKACJI AGH

Szukaj na stronie ... 🔍

Laboratorium dla Nowoczesnych Technologii w Kryminalistyce 📄

Laboratorium dla Inżynierii Akustycznej 📄

Instrukcje

- + Ćwiczenie 1
- + Ćwiczenie 2
- + Ćwiczenie 3
- Ćwiczenie 4

Temperaturowy współczynnik rezystancji 📄

- + Ćwiczenie 5
- + Ćwiczenie 6
- + Ćwiczenie 7
- + Ćwiczenie 8

https://iet.agh.edu.pl/wp-content/uploads/2025/07/In-4-TWR_verB.pdf

Konspekty

- + Konspekt 1
- + Konspekt 2
- + Konspekt 3
- Konspekt 4

Temperaturowy współczynnik rezystancji 📄

- + Konspekt 5
- + Konspekt 6
- + Konspekt 7
- + Konspekt 8
- + Konspekt 9

Nr	Opis ćwiczenia
0	Pomiar rezystancji - wyznaczanie niepewności pomiarowej
1	Współczynnik załamania światła dla ciał stałych
2	Badanie pola magnetycznego wytworzonego przez cewki i przewodniki
3	Rezonans akustyczny
4	Temperaturowy współczynnik rezystancji
5	Efekt Halla
6	Badanie zależności mocy użytecznej od obciążenia
7	Drgania harmoniczne sprężyny
8	Indukcyjność cewki
9	Poziomy energetyczne atomu wodoru. Stała Rydberga
10	Drgania tłumione w obwodzie RLC
11	Badanie zjawiska dyfrakcji i polaryzacji światła
12	Współczynnik lepkości

Instrukcje do ćwiczeń, konspekty, regulamin i harmonogram są dostępne on-line pod adresem:

iet.agh.edu.pl/laboratorium-z-fizyki/

Przebieg ćwiczeń:

1. Własny konspekt, wydrukowany i wypełniony
2. Wejściówka = ocena z teorii
3. Wykonanie ćwiczenia – zapis pomiarów
4. Obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym
5. Zapis rezultatów do konspektu
6. Prezentacja wyników i wykresów = ocena z części praktycznej

□ Samodzielne przygotowanie się do ćwiczenia:

★ Instrukcja

zagadnienia teoretyczne związane z wykonywanym ćwiczeniem.

★ Konspekt (wydrukuj)

Ikona  oznaczone są zagadnienia teoretyczne do samodzielnego przygotowania przed zajęciami

□ Samodzielne wykonanie ćwiczenia:

★ Instrukcja

Opis aparatury, wykonania ćwiczenia i opracowania wyników.

★ Konspekt (wypełnij)

Tabele do wpisania zmierzonych wartości i pola do wpisania obliczonych zgodnie z instrukcją wielkości.

Ćwiczenie 9

Poziomy energetyczny atomu wodoru. Stała Rydberga

Ćwiczenie wraz z instrukcją i konspektem opracował M. Czupkiewicz, M. Frankowski

Cel ćwiczenia

Analiza spektralna światła emitowanego przez zjonizowany gaz, wyznaczenie energii jonizacji atomu wodoru i stałej Rydberga na podstawie obserwowanych przejść elektronu pomiędzy poziomami energetycznymi.

Wymagane wiadomości teoretyczne

Widmo emisyjne wodoru w zakresie widzialnym, seria Balmera, równanie Rydberga. Model atomu wodoru według Bohra, postulaty Bohra, stany energetyczne, stała Rydberga, serie widmowe. Energia jonizacji atomu wodoru.

Siatka dyfrakcyjna, równanie siatki dyfrakcyjnej. Wyladowania elektryczne w gazach rozrzedzonych. Widmo emisyjne i absorpcyjne, widmo ciągłe, widmo liniowe. Zależność energii światła od długości fali świetlnej.

Wypożyczenie stanowiska

Dwie lampy spektralne: pomiarowa z wodorem i wzorcowa z innym gazem (hel lub rtęć) i wodór, komora z uchwytami do lamp spektralnych i zasilaczem wysokiego napięcia, siatka dyfrakcyjna, siatkowy mikrospektrometr światłowodowy, komputer.

Wykonanie ćwiczenia – część pierwsza – siatka dyfrakcyjna

1. Włączyć zasilanie lampy wodorowej.
2. Przeprowadzić obserwację widma emitowanego przez lampę poprzez siatkę dyfrakcyjną.

Zagadnienia do przedyskutowania:

Wychodząc z równania siatki dyfrakcyjnej, wskazać w obserwowanym widmie położenie prążka zerowego, pierwszego i drugiego rzędu. Co to jest rząd widma?

Korzystając z równania siatki dyfrakcyjnej, wskazać które prążki odpowiadają większej długości fali, a które mniejszej.

★ Instrukcja

Wykonanie ćwiczenia – część czwarta – stała Rydberga i energia jonizacji

Zagadnienia do przedyskutowania:

Na podstawie wzoru Rydberga naszkicować teoretyczną zależność odwrotności długości fali od $1/n^2$.

Podać sposób wyznaczenia stałej Rydberga i jej niepewności.

W jaki sposób wyliczyć energię jonizacji atomu wodoru?

Podać definicję jednostki energii [eV].

18. Odwrotności zmierzonych (i skorygowanych) długości fal wpisać do trzeciej kolumny Tabeli 1.

19. Wykonać wykres odwrotności długości fali od odwrotności kwadratu liczby kwantowej.

20. Do powyższego wykresu dopasować prostą metodą regresji liniowej i na tej podstawie wyznaczyć stałą Rydberga i jej niepewność.

21. Obliczyć energię jonizacji wodoru.

Literatura

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Tom IV i V, PWN (2005)

J.R. Rydberg, *Phil. Mag.* **29**, 331 (1890)

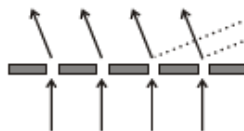
N. Bohr, *Phil. Mag.* **26**, 151 (1913)

Nr ćw. 9	Poziomy energetyczne atomu wodoru. Stała Rydberga		Ocena z teorii:
Nr zespołu:	Nazwisko i imię:		Ocena wykonania:
Data:	Dzień tyg. i godz.:	Kierunek, grupa:	Uwagi:

Część pierwsza – siatka dyfrakcyjna



Zasada działania siatki dyfrakcyjnej
(uzupełnij rysunek wprowadzając oznaczenia stałej siatki, długości fali, kąta ugięcia)



Równanie siatki dyfrakcyjnej:.....

Część druga – poziomy energetyczne atomu wodoru



Ponumeruj poziomy energetyczne i dorysuj pierwsze 3 przejścia serii Balmera:

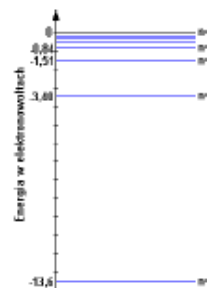


Tabela 1. Zmierzone długości fali widma wodoru i liczby kwantowe

Długość fali (nm)	Skorygowana długość fali (nm)	1/długość fali (nm ⁻¹)	n	1/n ²

★ Konspekt

Model: instrukcja + konspekt

- Większość prac teoretycznych (wyprowadzanie wzorów, obliczenia wzorów na niepewności) - przed zajęciami
- Jednolity poziom sprawdzanej wiedzy
- Lepsze przygotowanie do wykonania ćwiczenia
- Opracowanie wyników na zajęciach (większa samodzielność) – ponoszenie konsekwencji (braku) przygotowania
- Obsługa pakietu Open Office (darmowy Excel)
- Brak sprawozdań
- Samodzielność przygotowania – odpytywanie (krótkie) na zajęciach

Pierwsze zajęcia

UWAGA!! Nie drukujemy konspektu !

Na 1. zajęciach odbędzie się:

1. Podział na STAŁE zespoły 2-osobowe
2. Zapoznanie się z regulaminem i ZASADAMI BHP
3. Ćwiczenie „0”

Konspekty drukujemy dla drugiego i następnych ćwiczeń zgodnie z harmonogramem dla danego zespołu:

Harmonogram zajęć w laboratorium dla Elektroniki									
	Tydzień →								
Zespół ↓	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	0	2	3	4	6	7	8	9	zal
2	0	3	4	6	7	8	9	10	zal
3	0	4	6	7	8	9	10	11	zal
4	0	6	7	8	9	10	11	12	zal

Wymagania:

1. Znajomość teorii do danego ćwiczenia;
2. Umiejętność rozplanowania działań;
3. Umiejętność posługiwania się arkuszem kalkulacyjnym;
4. Umiejętność wykonywania wykresów;
5. Znajomość podstaw rachunku niepewności;
6. Praca w zespole.

Rachunek niepewności pomiaru – opracowanie danych pomiarowych

Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru

(Guide to Expression of Uncertainty in Measurements -
Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

<http://physics.nist.gov/Uncertainty>

Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999

H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999

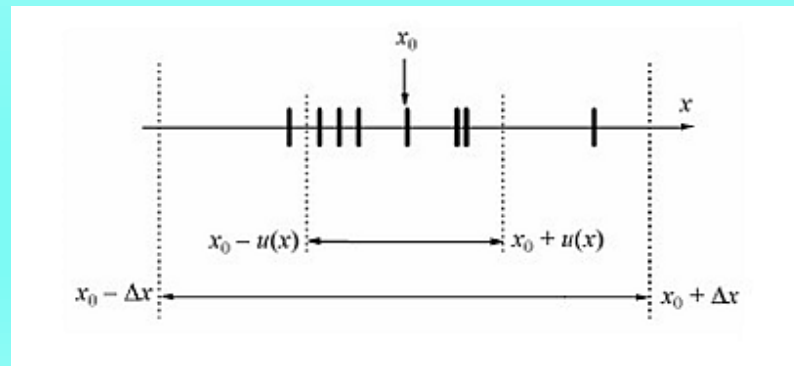
A.Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

Wstęp

W trakcie każdego pomiaru uzyskujemy wyniki $x_1, x_2, \dots$ będące tylko wartością przybliżoną rzeczywistej wartości x_0 . Pomiar zawsze odbywa się z ograniczoną dokładnością, wynikającą zarówno z czynności pomiarowych, jak i z wykonania samego przyrządu pomiarowego. Wynik pomiaru nigdy nie jest liczbą – to przedział wartości, w którym zawiera się wartość x_0 .

Możemy określić przedział wartości, w którym się najprawdopodobniej mieści się prawdziwa wartość wielkości mierzonej. Połowę szerokości tego przedziału nazywamy *niepewnością pomiarową* Δx . Przyjmujemy, że wartość rzeczywista mieści się z dużym prawdopodobieństwem w przedziale między: $(x_0 - \Delta x)$ a $(x_0 + \Delta x)$



Niepewność pomiarowa jest miarą precyzji pomiaru.

Na jej podstawie możemy określić, czy uzyskany wynik pomiaru wielkości jest zgodny ze wzorcem tej wielkości lub czy wyniki dwóch pomiarów tej samej wielkości są ze sobą zgodne.

Znaczenie słowa *błąd* to:

(1) ilościowo - różnica (nieznana) między wartością zmierzoną i prawdziwą:

$$\text{błąd bezwzględny } \Delta x = x - x_0$$

$$\text{błąd względny } \delta = \frac{\Delta x}{x_0} \quad (\text{może być wyrażony w \%})$$

(2) jakościowo - używany jest w terminach takich jak:

- *błąd przypadkowy,*
- *systematyczny*
- *gruby.*

Błędy grube można łatwo wykryć i usunąć, dla *błędów systematycznych* stosujemy poprawki, a *błędy przypadkowe* - podlegają rozkładowi Gaussa, wynikają z wielu losowych przyczynków, nie dają się wyeliminować ale można je oszacować (estymować).

Podstawową miarą dokładności pomiaru jest *niepewność standardowa*, $u(x)$ czyli oszacowanie *odchylenia standardowego*.

Ponieważ w praktyce nie znamy wartości rzeczywistych wielkości mierzonych, szacujemy niepewności pomiarowe wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów.

Typy oceny niepewności wg nowej Normy

Typ A

- ma zastosowanie do błędów przypadkowych
- wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru
- wykorzystuje statystyczną analizę serii pomiarów

Typ B

- stosuje się, gdy statystyczna analiza nie jest możliwa
- dla błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru
- opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności

Typ A – seria pomiarów

Błąd przypadkowy - gdy występuje statystyczny rozrzut wyników kolejnych pomiarów wokół wartości średniej $\bar{x}$

Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej.

W większości doświadczeń rozkład wyników opisany jest funkcją:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Rozkład ten znany jest jako *rozkład Gaussa* lub *rozkład normalny*.

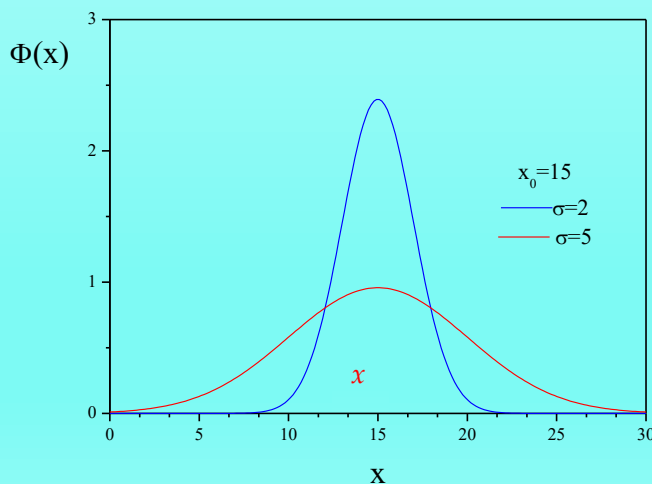
x_0 jest wartością najbardziej prawdopodobną i może być nią wartość średnia $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

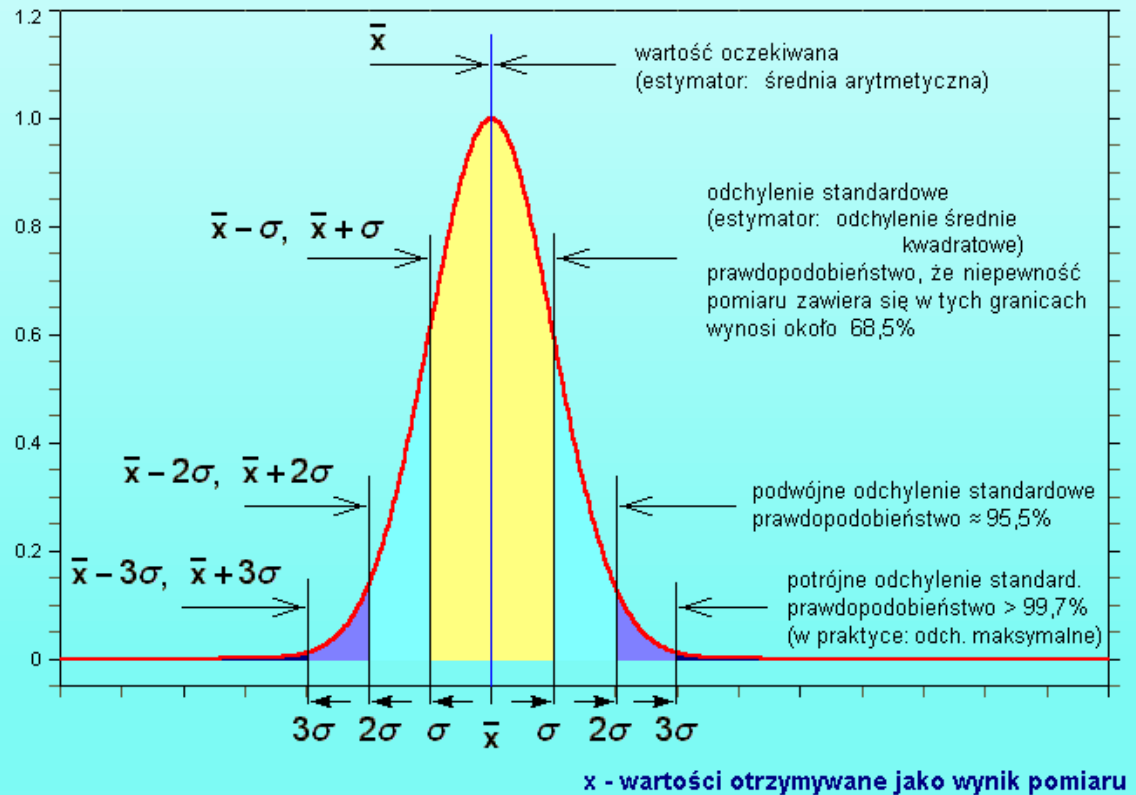
σ to punkt przegięcia krzywej Gaussa, określa rozrzut wyników, a w zakresie $\pm \sigma$ wokół wartości średniej mieści się 68% wyników pomiarów.

$$\sigma \approx u(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

(σ^2 to wariancja)



y - częstość pojawiania się wartości x
wśród wyników pomiaru



Powtarzanie pomiarów jest korzystne bo:

- zmniejsza niepewność spowodowaną błędem przypadkowym
- umożliwia oszacowanie niepewności.

Ile pomiarów?

Dla poprawnego określenia σ – co najmniej 5÷10 pomiarów (dokładność rzędu 20÷30%).

Np. dla serii 9 pomiarów, niepewność średniej jest 3-krotnie mniejsza od niepewności pojedynczego pomiaru.

Zbyt duża liczba pomiarów jest nieopłacalna, bo zwiększenie dokładności ze wzrostem n jest powolne.

Przykład 1 – niepewność pomiaru okresu drgań wahadła.

Wahadło matematyczne – zmierzono 9 razy czas 10 okresów:

12,77 12,83 14,09 12,80 12,78 12,79 12,77 12,80 12,78 [s]

Obliczone okresy drgań:

1,277 1,283 1,280 1,278 1,279 1,277 1,280 1,278 [s]

$$\bar{T} = \frac{1,277 + 1,283 + \dots + 1,278}{8} = 1,27933 \text{ [s]}$$

$$u(\bar{T}) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}}$$

$$u(\bar{T}) = \sqrt{\frac{(1,277 - 1,27933)^2 + (1,283 - 1,27933)^2 + \dots + (1,278 - 1,27933)^2}{8(8-1)}} = 0,00071 \text{ s}$$

Jak szacować niepewność, gdy mamy kilka pomiarów a urządzenie ma określoną dokładność?

Np: mierzymy kilkukrotnie grubość próbki śrubą mikrometryczną - dokładność śruby 0.01 mm, obliczone odchylenie standardowe wynosi 0.02 mm – wówczas jako niepewność należy przyjąć drugą wartość, ale:

gdy przy pomiarze np. suwmiarką, jej dokładność wynosi 0.1 mm, a odchylenie standardowe jest równe 0.02 mm – to jako niepewność powinno się przyjąć pierwszą wartość.

Zasadą jest, że za niepewność przyjmujemy zawsze większą wartość.

Typ B – pojedynczy pomiar !

Gdy analiza statystyczna serii obserwacji jest niemożliwa – dysponujemy pojedynczymi pomiarami, wówczas opieramy się na naukowym osądzie eksperymentatora i wykorzystujemy informacje o pomiarze (poprzednie dane pomiarowe, wiedza o mierzonych obiektach) oraz źródłach niepewności (np. informacje o przyrządach).

Niepewność maksymalna (graniczna)

Zakładamy, że można określić przedział wielkości mierzonej, w którym na pewno znajdzie się wielkość rzeczywista x . W zapisie $x \pm \Delta x$ Δx jest niepewnością maksymalną i nie posługujemy się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Najczęściej ocena typu **B** dotyczy określenia niepewności wynikającej ze skończonej dokładności przyrządów.

Proste przyrządy mechaniczne

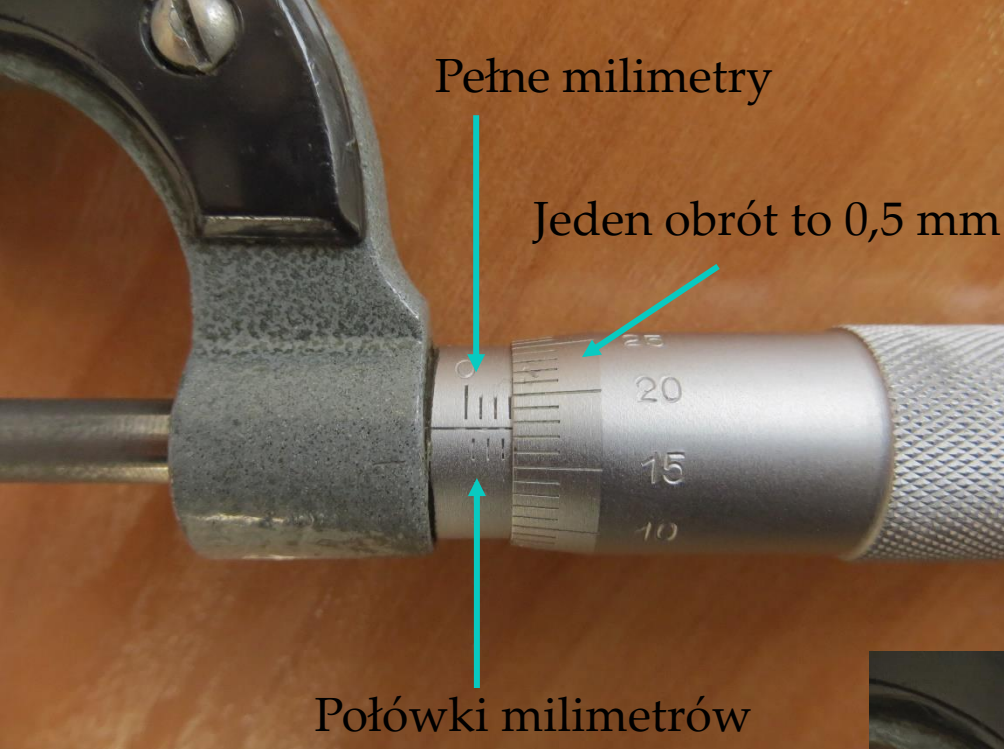
Przyjmuje się, że „dokładność” przyrządu jest równa wartości najmniejszej działki skali.

$$u(x) \approx \text{działka elementarna}$$



UWAGA!! Śruba mikrometryczna:

Mierząc grubość kręcimy **wyłącznie** sprzęgiełkiem – na końcu śruby !

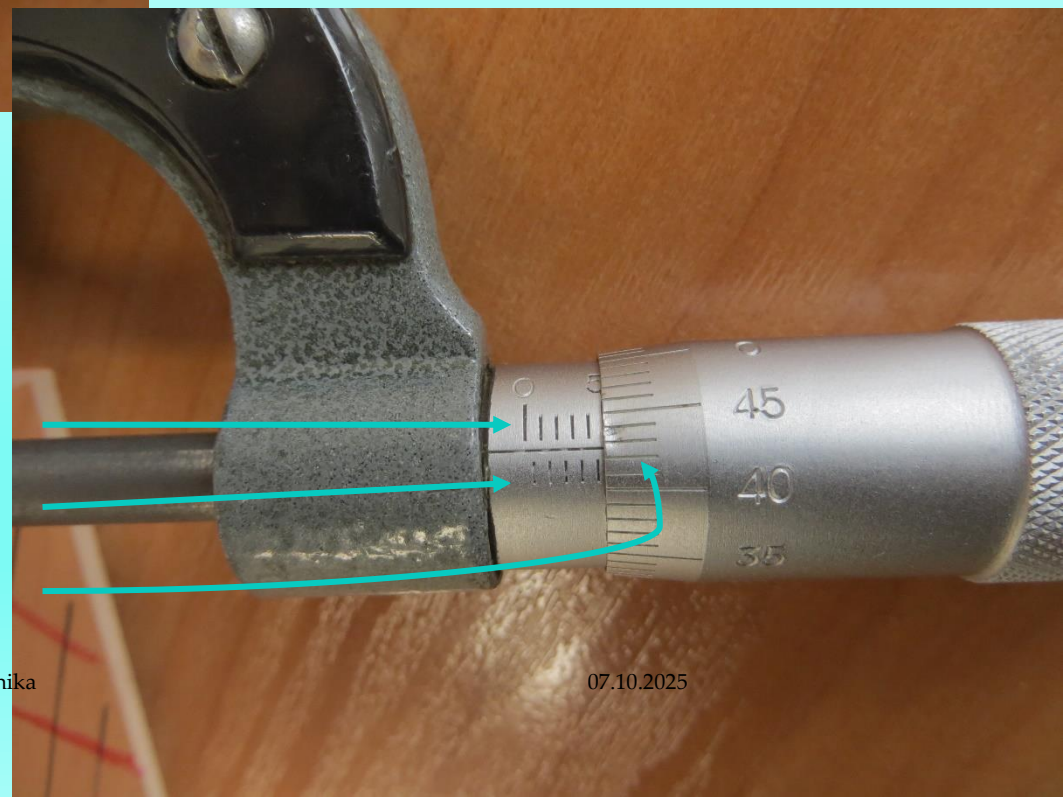


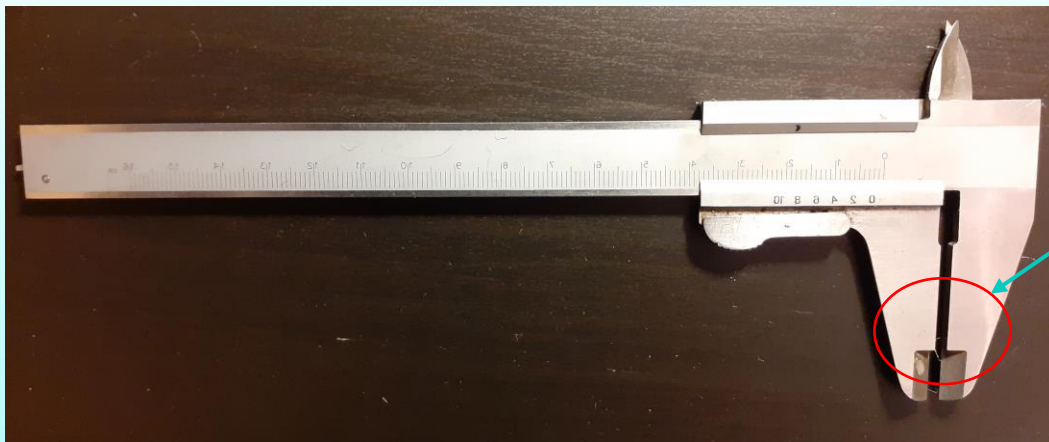
Śruba wskazuje:
3 mm oraz
0,18 mm

3,18 mm

Śruba wskazuje:
4 mm oraz
0,5 mm oraz
0,43 mm

4,93 mm



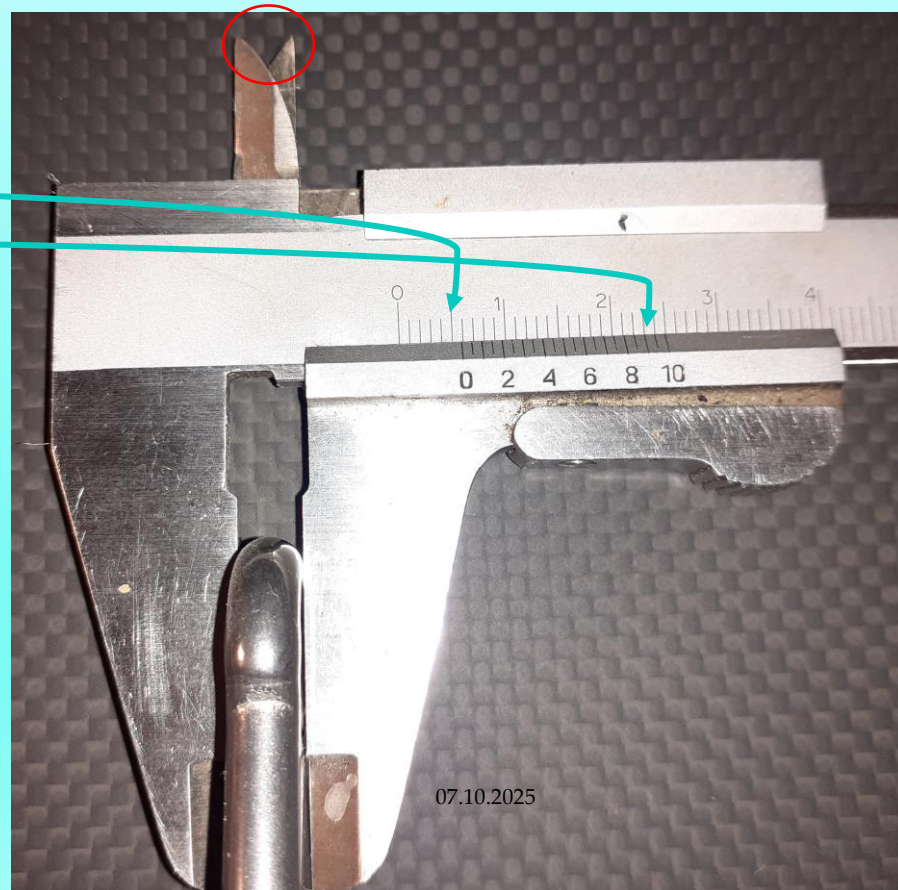


Suwmiarka – pomiar grubości/
średnicy zewnętrznej

lub
wewnętrznej

Suwmiarka wskazuje:
5 mm oraz
0,9 mm

Poprawny odczyt polega na
„zgraniu” górnej i dolnej
kreski



Elektryczne mierniki analogowe

Niepewność - korzystamy z *klasy przyrządu* określającej własności miernika

$$\Delta x = \frac{\text{klasa miernika}}{100} \cdot \text{zakres}$$



Zakres pomiarowy – największa wartość jaką może zmierzyć przyrząd pomiarowy przy określonym ustawieniu pokrętła (klawisza, przycisku,...)

Klasa przyrządu dokładność z jaką przyrząd pomiarowy przekształca sygnał pomiarowy na wskazanie odczytywane przez obserwatora. Klasa przyrządu jest podawana przez producenta w procentach **zakresu pomiarowego**.

Elektryczne mierniki cyfrowe

Niepewność jest zwykle podana w instrukcji, jako zależna od wielkości mierzonej x i zakresu pomiarowego z :

$$\Delta x = C_1 \cdot x + C_2 \cdot zakres$$

np. multimetr $C_1 = 0.2\%$, $C_2 = 0.1\%$

przy pomiarze oporu $R = 10 \text{ k}\Omega$ na zakresie $z = 20 \text{ k}\Omega$ da niepewność $\Delta R = 0.04 \text{ k}\Omega$, tj. równowartość 4 działek elementarnych

Zaleca się zamieniać niepewność maksymalną na niepewność standardową:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Prawo przenoszenia (propagacji) niepewności

Wiele wielkości fizycznych nie da się zmierzyć pojedynczym przyrządem, lecz wyznacza się metodą pomiaru pośredniego.

Ważnym zagadnieniem jest też problem niepewności przypisywanej wielkości złożonej (wyliczanej ze wzoru fizycznego) $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gdzie $x_1, \dots, x_n$ są wartościami otrzymanymi z bezpośrednich pomiarów i są obarczone niepewnościami $u(x_1), \dots, u(x_n)$.

Niepewność standardową wielkości złożonej $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako pierwiastek z sumy wariancji otrzymanych z różniczek cząstkowych:

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2) \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n} u(x_n) \right]^2}$$

Funkcja jednej zmiennej:

$$u(y) = \left| \frac{dy}{dx} \cdot u(x) \right|$$

Przykład 2 – obliczanie objętości kuli

Zmierzono średnicę D stalowej kulki suwmiarką, otrzymując wartość $D = 2,45 \text{ mm}$ z niepewnością (typu **B**) $u(D) = 0,05 \text{ mm}$.

Objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6}D^3 = 7,7 \text{ mm}^3$$

Niepewność objętości kuli:

$$u(V) = \frac{d}{dD} \left(\frac{\pi}{6} D^3 \right) u(D) = \frac{\pi}{2} D^2 u(D) = \frac{3,1416}{2} \cdot (2,45)^2 \cdot 0,05 \text{ mm}^3$$

$$u(V) = 0,47 \text{ mm}^3$$

Funkcja wielu zmiennych: $u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n}u(x_n)\right]^2}$

Przykład 3 – obliczanie niepewności g wyznaczonego z pomiaru okresu drgań i długości wahadła matematycznego.

W Przykładzie 1 określono wartość okresu drgań ($T = 1279,33$ ms) oraz niepewność $u(T) = 0,00071$ s.

Pomiar długości przymiarem milimetrowym dał wynik $L = 410$ mm, a $u(L)$ oszacowano (typ B) na 1 mm.

Z wzoru na okres wahadła $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ wyznaczono $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

$$g = \frac{4 \cdot 3,1416^2 \cdot 410 \text{ mm}}{(1,27933 \text{ s})^2} = 9890 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} = 9,890 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Obliczanie niepewności złożonej:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{T^2} u(L)\right]^2 + \left[-\frac{8\pi^2 L}{T^3} u(T)\right]^2} = 0,028 \frac{m}{s^2}$$

Niepewność rozszerzona:

$U(y) = k \cdot u_c(y)$ wówczas gdy $k = 2$ prawdopodobieństwo, że
wynik znajduje się w przedziale $y \pm U(y)$
wynosi 95 %.

$$U(g) = 2 \cdot u_c(g) = 0,056 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{exp} - g_{tab} = 9,89 - 9,811 \left[\frac{m}{s^2} \right] = 0,079 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

} $\Rightarrow ?$

Przykład 4 – obliczanie niepewności rezystancji wyznaczonej z prawa Ohma.

Gdy niepewności maksymalne $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ są małe w porównaniu z wartościami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ to **bezwzględna, niepewność maksymalna** wielkości y wyliczamy korzystając z prawa przenoszenia niepewności:

$$\Delta(R) = \sqrt{\left[\frac{\partial R}{\partial U} \Delta U\right]^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I} \Delta I\right]^2}$$

Z pomiarów U i I wyliczamy $R = \frac{U}{I}$

Niepewność maksymalna oporu ΔR :

gdzie

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \quad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta(R) = \sqrt{\left[\frac{1}{I} \Delta U\right]^2 + \left[\frac{U}{I^2} \Delta I\right]^2}$$

Niepewność względna to $\frac{\Delta R}{R}$

Zapis niepewności pomiaru

Niepewność zapisujemy z dokładnością dwu cyfr znaczących. Przy zaokrąglaniu do dwu cyfr znaczących niepewność graniczna spowodowana zaokrąglaniem wynosi od 5% do 0,5% (odpowiednio, dla cyfr 10 i 99). Taka dokładność wystarcza, gdyż ocena niepewności jest bardziej niedokładna.

Wartość mierzona zaokrąglamy do tego samego miejsca, co niepewność. Jeżeli ostatnią cyfrą wyniku jest zero, należy ją pozostawić, jako cyfrę znaczącą.

– zapis słowny: przyspieszenie ziemskie wynosi

9,890 m/s² z niepewnością rozszerzoną 0,056 m/s²

– zapis przy użyciu symboli: $g = 9,890 \text{ m/s}^2$; $U(g) = 0,056 \text{ m/s}^2$

– zapis skrócony: $g = 9,890 \pm 0,056 \text{ m/s}^2$

Graficzne przedstawianie wyników pomiarów

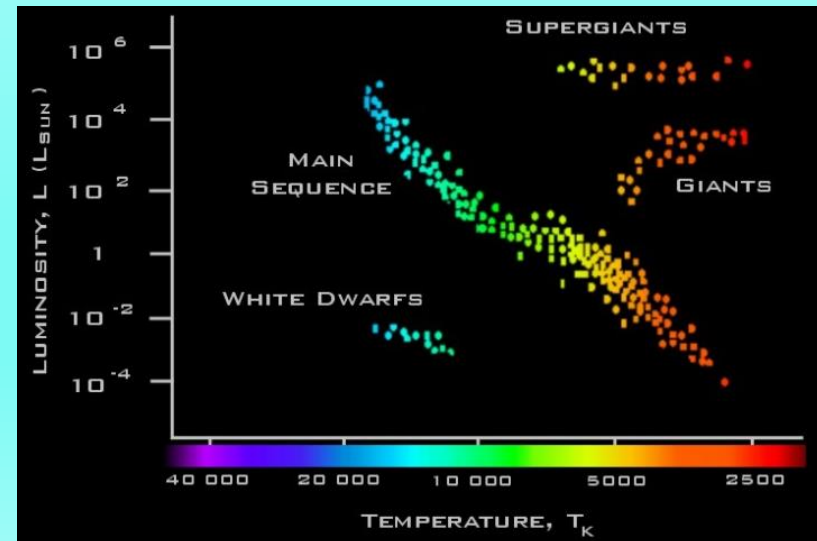
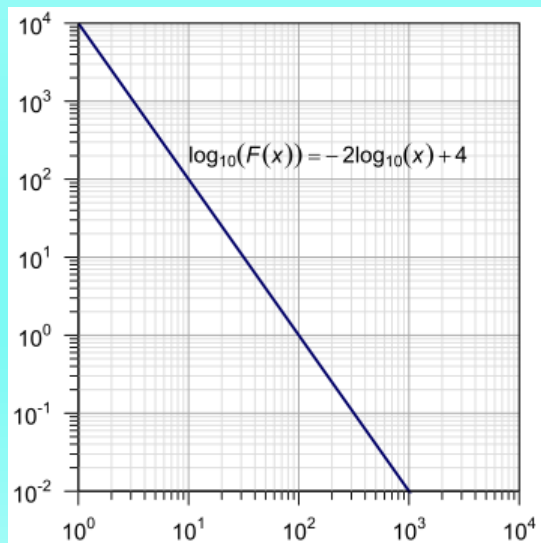
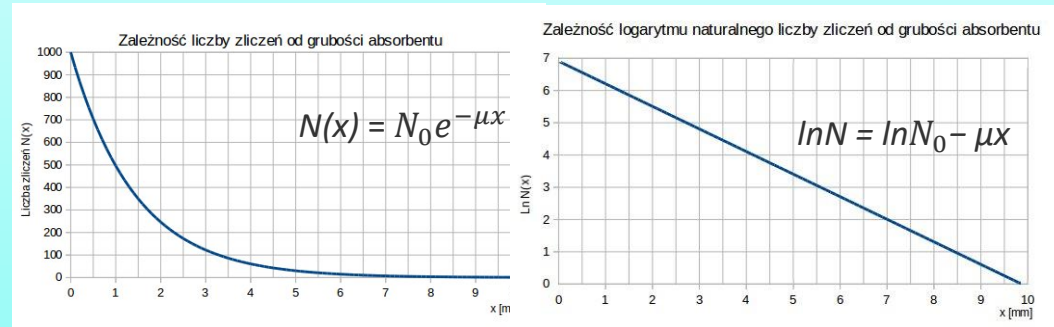
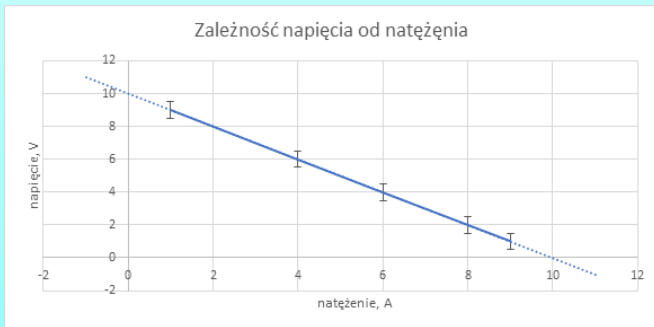
Wykonywane w fizyce wykresy przedstawiają zależności funkcyjne 2 lub więcej zmiennych. W wykresach przedstawiających wyniki pomiarów zaznaczamy punkty doświadczalne oraz interpretującą przebieg zjawiska krzywą ciągłą.

Poprawny wykres musi posiadać:

- układ osi z opisem, skalą, jednostkami;
- punkty doświadczalne – czytelne symbole wraz ewentualnym zaznaczeniem niepewności pomiarowych
- krzywą gładką (najlepiej pasującą do punktów i zgodną z teorią!)
- opis określający jednoznacznie co to za wykres

W fizyce najczęściej mamy do czynienia z zależnościami:

- liniowymi typu $y = ax + b$.
- wykładniczymi typu $y = Ce^{ax}$ które „prostują się” w układzie półlogarytmicznym $\ln(y) = f(x)$,
- potęgowymi $y = Cx^a$ które są liniowe w układzie logarytmicznym $\ln(y) = f(\ln x)$,



Metoda najmniejszych kwadratów - regresja liniowa

Często zachodzi potrzeba poprowadzenia prostej $y = ax + b$ jako najlepiej dopasowanej do zbioru punktów $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$. Parametry prostej muszą być tak dobrane, aby suma różnic wartości eksperymentalnych y_i i obliczonych $ax_i + b$ była jak najmniejsza:

$$S^2 = \sum_i^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min$$

Aby znaleźć a oraz b korzystamy z warunku istnienia minimum funkcji 2 zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

otrzymamy 2 równania liniowe, które mają rozwiązania:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

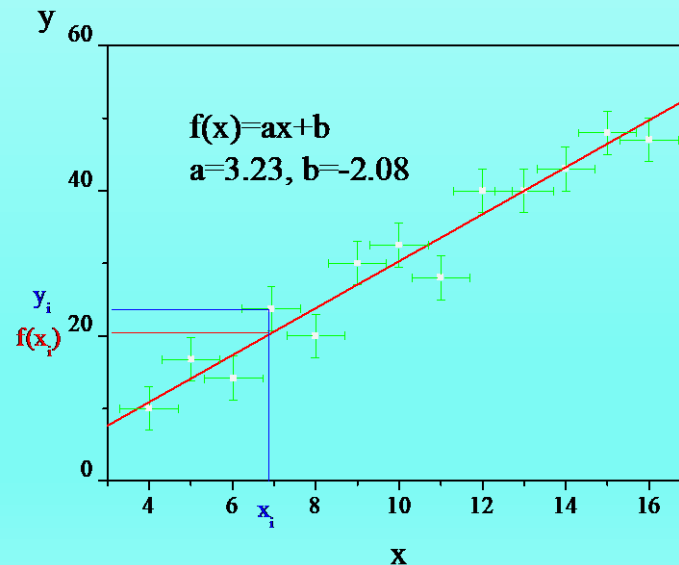
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

gdzie $W = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$

Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe obu parametrów prostej:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a) \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

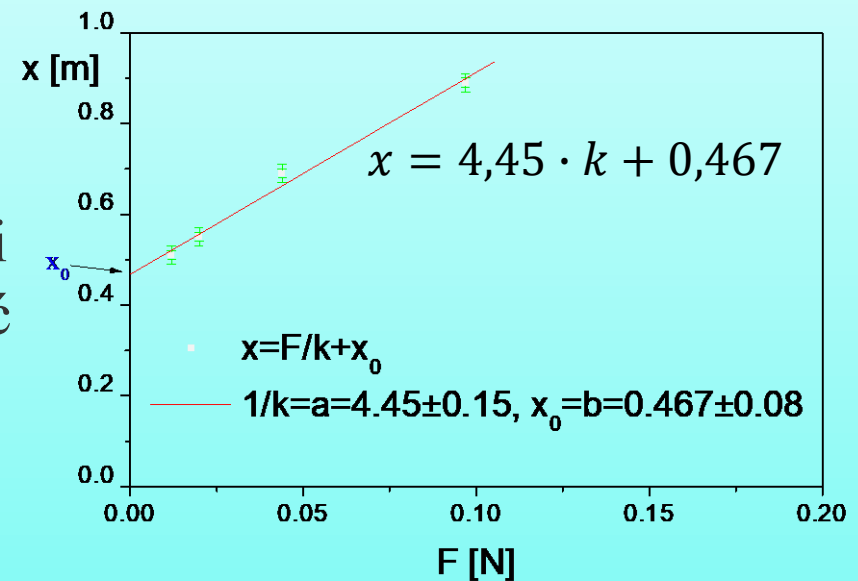


Przykład 5 - zastosowanie regresji liniowej do prawa Hooke'a

Mierzona jest długość sprężyny x , która jest stopniowo coraz bardziej obciążana.

Na osi Y wykresu podaje się wielkości obarczone niepewnościami i dlatego wykres przedstawia długość sprężyny w funkcji obciążenia czyli $x(F)$ a nie odwrotnie.

Współczynnik kierunkowy prostej odpowiada odwrotności współczynnika sprężystości, a wyraz wolny b oznacza długość początkową sprężyny bez obciążenia.



UWAGA!! Model matematyczny dopasowania musi odpowiadać modelowi fizycznemu.

Przykładem może być prawo Ohma:

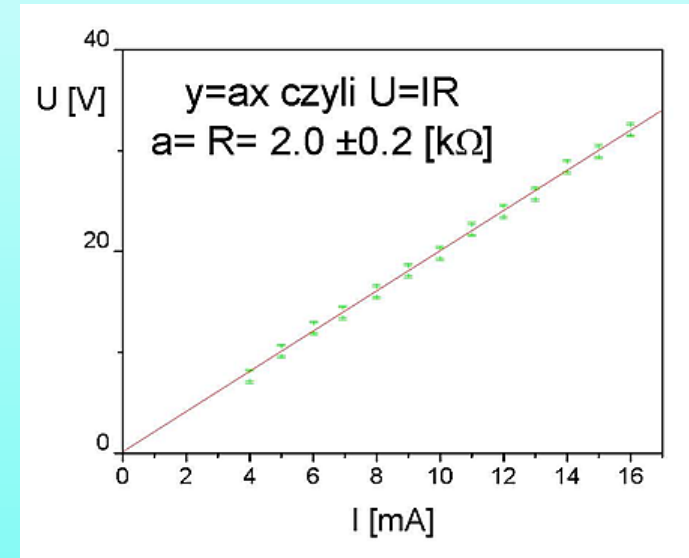
$$U = I \cdot R$$

czyli dopasowanie musi być opisane funkcją:

$$y = a \cdot x \quad \text{a nie } y = a \cdot x + b \rightarrow b = 0 !$$



konieczna jest regresja liniowa jednoparametrowa



Regresja liniowa jednoparametrowa

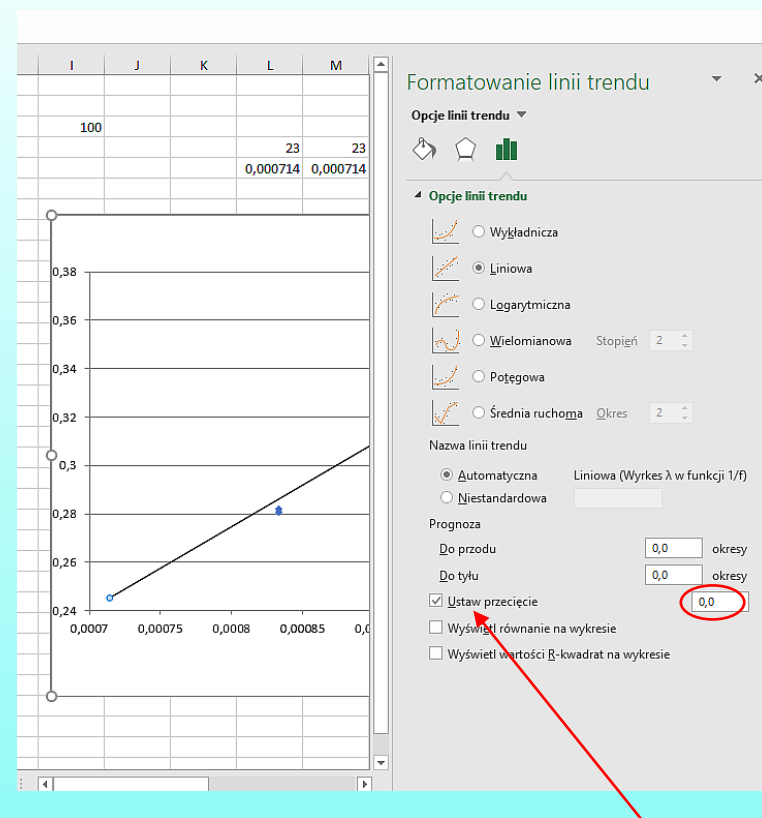
$$S^2 = \sum_i^n [y_i - ax_i]^2 = \min$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0$$

$$-2 \sum x_i y_i + 2a \sum x_i^2 = 0$$

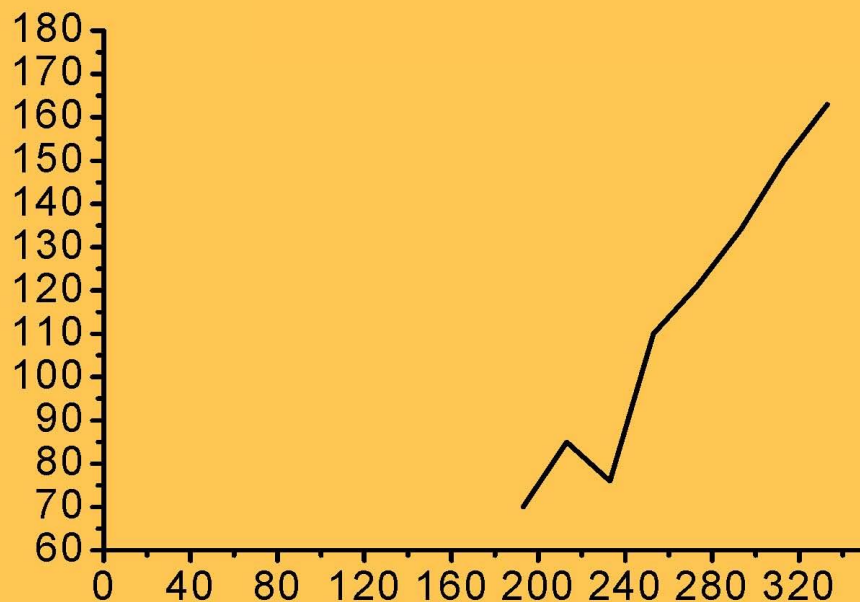
$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(ax_i - y_i)^2]}{\sum_{i=1}^n [x_i^2]}}$$

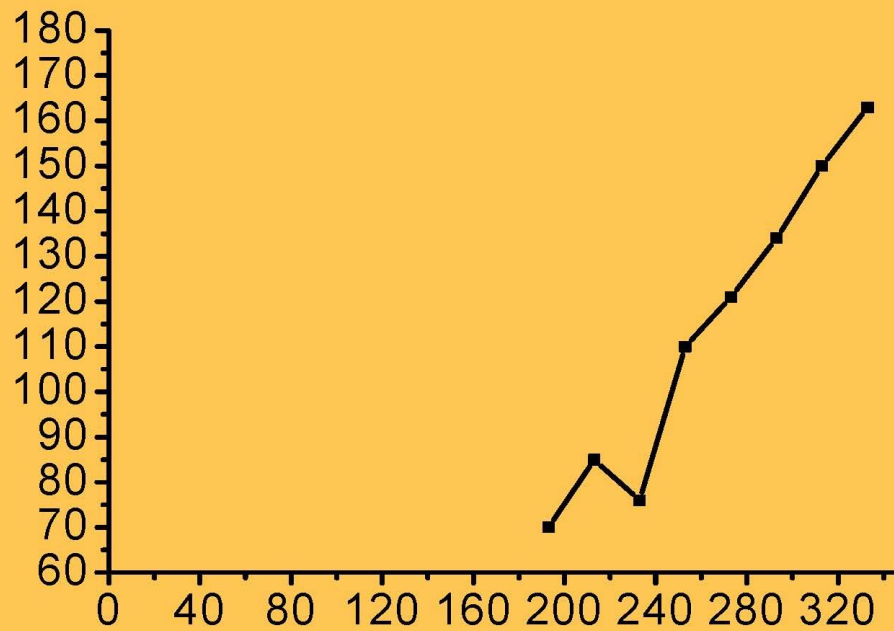


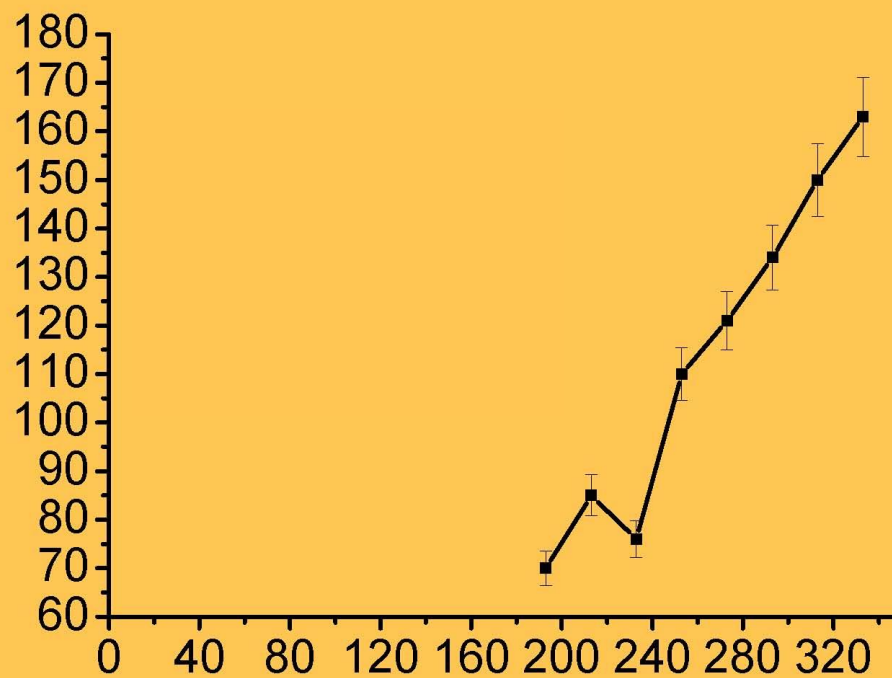
Zasady rysowania wykresów

Czy ten wykres jest narysowany zgodnie z zasadami?



2. Trzeba

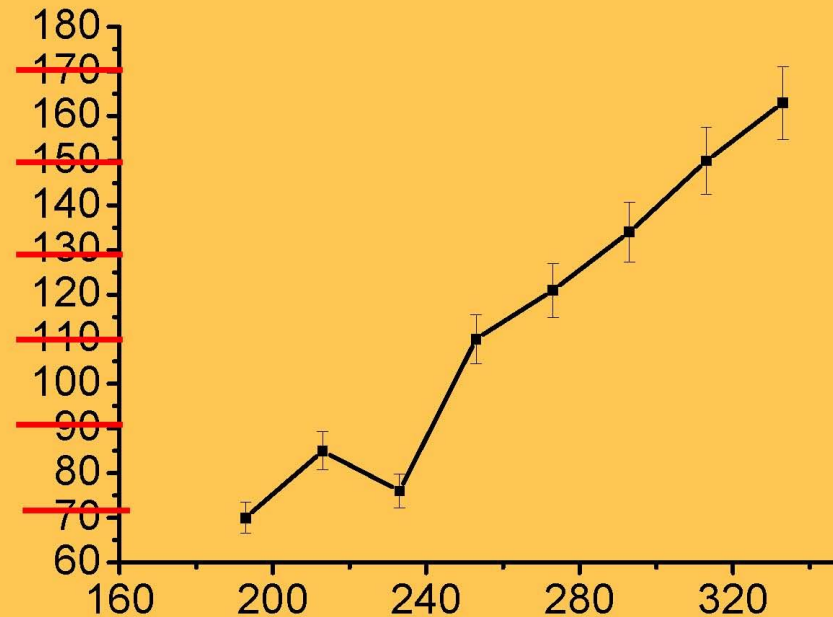




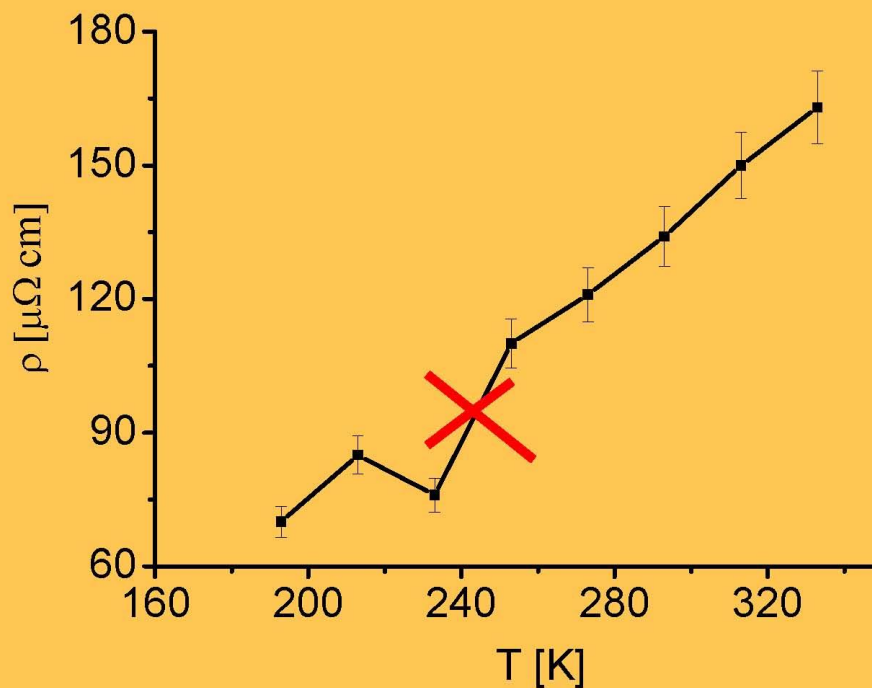
4. Właściwie opisać osie współrzędnych i dobrać skalę, tak aby łatwo można było odczytać wartości zmierzone.



*i co
jeszcze ??*



5. Nie łączyć punktów eksperymentalnych linią łamaną!!! Jeśli znany jest przebieg teoretyczny to dokonać dopasowania teorii do doświadczenia (przeprowadzić fitowanie)



6. Zadbać o aspekt estetyczny wykresu (opis, zamknięcie ramką, itp.)

