



# Fizyka

Dr hab. inż. Jarosław Kanak [kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)

Dr hab. Maciej Czapkiewicz, [czapkiew@agh.edu.pl](mailto:czapkiew@agh.edu.pl)

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

<http://layer.uci.agh.edu.pl/J.Kanak>

# Zasady zaliczenia przedmiotu

---



- Obecność i aktywność na zajęciach (wykłady, ćwiczenia, laboratorium)
- Pozytywna ocena końcowa ( $\geq 3.0$ ) z ćwiczeń rachunkowych i laboratorium
- Egzamin pisemny. Na ocenę końcową przedmiotu wpływają wszystkie oceny (egz/ćw/lab: 50/30/20)



# Materiały do wykładu

- Tekst wykładu na stronie:

Wykłady z fizyki dla Elektroniki 1 semestr

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>

- Podręczniki:

1. D.Halliday, R. Resnick, J.Walker, Podstawy Fizyki, PWN W-wa, 2003 t. 1-5 (w skrócie HRW)

2. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman Mechanika, PWN W-wa 1975

3. E.M.Purcell, Elektryczność i magnetyzm, PWN W-wa 1971

4. Fizyka dla szkół wyższych t.1 <http://openstax.org>

Laboratorium:

A. Zięba, Pracownia Fizyczna, WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

# Co to jest Fizyka?

---



- Jest podstawową nauką przyrodniczą, zajmującą się badaniem najbardziej fundamentalnych i uniwersalnych właściwości materii i zjawisk w otaczającym nas świecie.
- Jest nauką, której celem jest badanie elementarnych składników materii oraz ich wzajemnych oddziaływań elementarnych.



- **400r p.n.e:** Demokryt z Tracji, nauczał, że materia zbudowana jest z maleńkich niepodzielnych cząstek, które nazwał atomami.
- **1687r** „Zasady matematyczne filozofii naturalnej” Jzaak Newton, posługując się opracowanymi przez siebie prawami oraz prawem powszechnego ciężenia wyjaśnił wiele spośród otaczających nas zjawisk – od ruchu planet aż po spadające jabłko.
- **1895r** - Fizyka współczesna – początek - odkrycie przez Wilchelma Röntgena promieni X
- **1905r** – szczególna teoria względności - Albert Einstein

# Co to jest Fizyka?

---



- To, co nazywamy fizyką, obejmuje całą grupę nauk przyrodniczych, które opierają swe teorie na pomiarach i których idee i twierdzenia dają się sformułować za pomocą matematyki.

Albert Einstein

# Fundamentalne oddziaływania w przyrodzie



Oddziaływanie fundamentalne	Natężenie względne	Czas charakterystyczny w sek.
grawitacyjne	$5.9 \cdot 10^{-39}$	-
elektromagnetyczne	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$10^{-20} - 10^{-16}$
silne (jądrowe)	1	$10^{-24} - 10^{-23}$
słabe	$10^{-5}$	$10^{-10} - 10^{-8}$



# Oddziaływanie grawitacyjne:

---

- Źródłem pola grawitacyjnego jest masa grawitacyjna.
- Jest najsłabsze ze wszystkich oddziaływań lecz długozasięgowe.
- Odgrywa decydującą rolę w zjawiskach astronomicznych dużej skali (w makroświecie), tworzy układy związane: planetarne, gromady gwiazd, galaktyki.



# Oddziaływanie elektromagnetyczne:

---



- Występuje pomiędzy ładunkami elektrycznymi lub pomiędzy momentami magnetycznymi.
- Jest stosunkowo silne i długozasięgowe.
- Odgrywa decydującą rolę w mikroświecie, w zjawiskach, takich jak emisja i absorpcja światła, sprężystość, tarcie, spójność; leży u podstaw procesów chemicznych i biologicznych; jest odpowiedzialne za wiązanie jąder atomowych i elektronów w trwałe układy: atomy, cząsteczki, kryształy.



# Oddziaływanie silne (jądrowe):

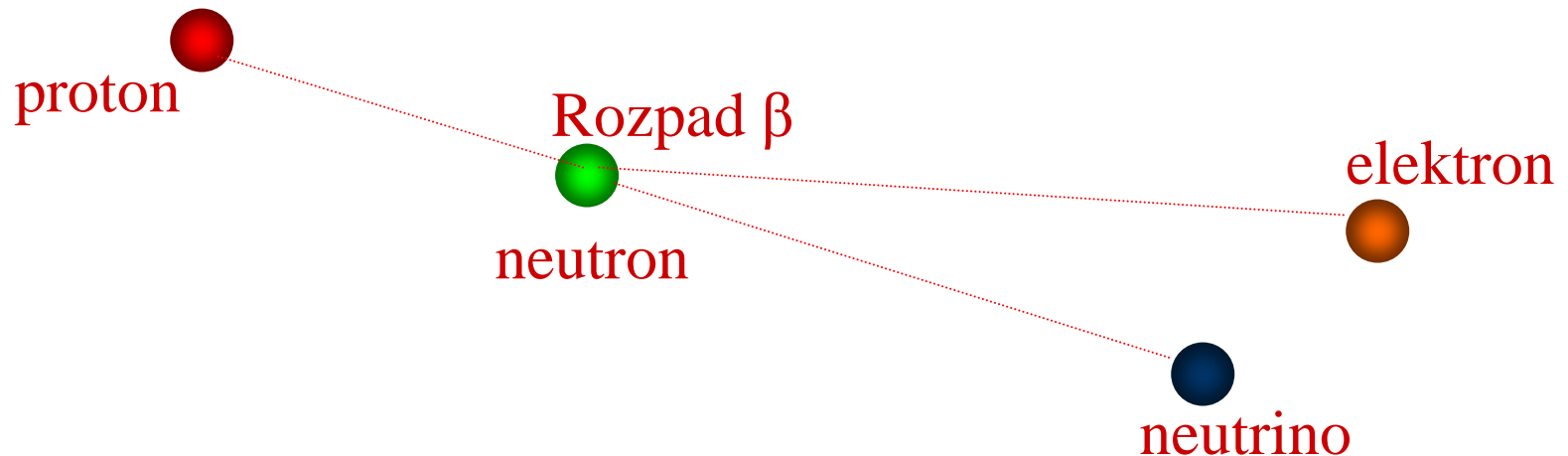
---

- Występuje pomiędzy sąsiednimi nukleonami.
- Jest krótkozasięgowe ( $10^{-15}$  m).
- Powoduje wiązanie nukleonów w trwałe struktury – jądra atomowe.
- Polega na wymianie gluonów między kwarkami w hadronie (neutronie lub protonie).



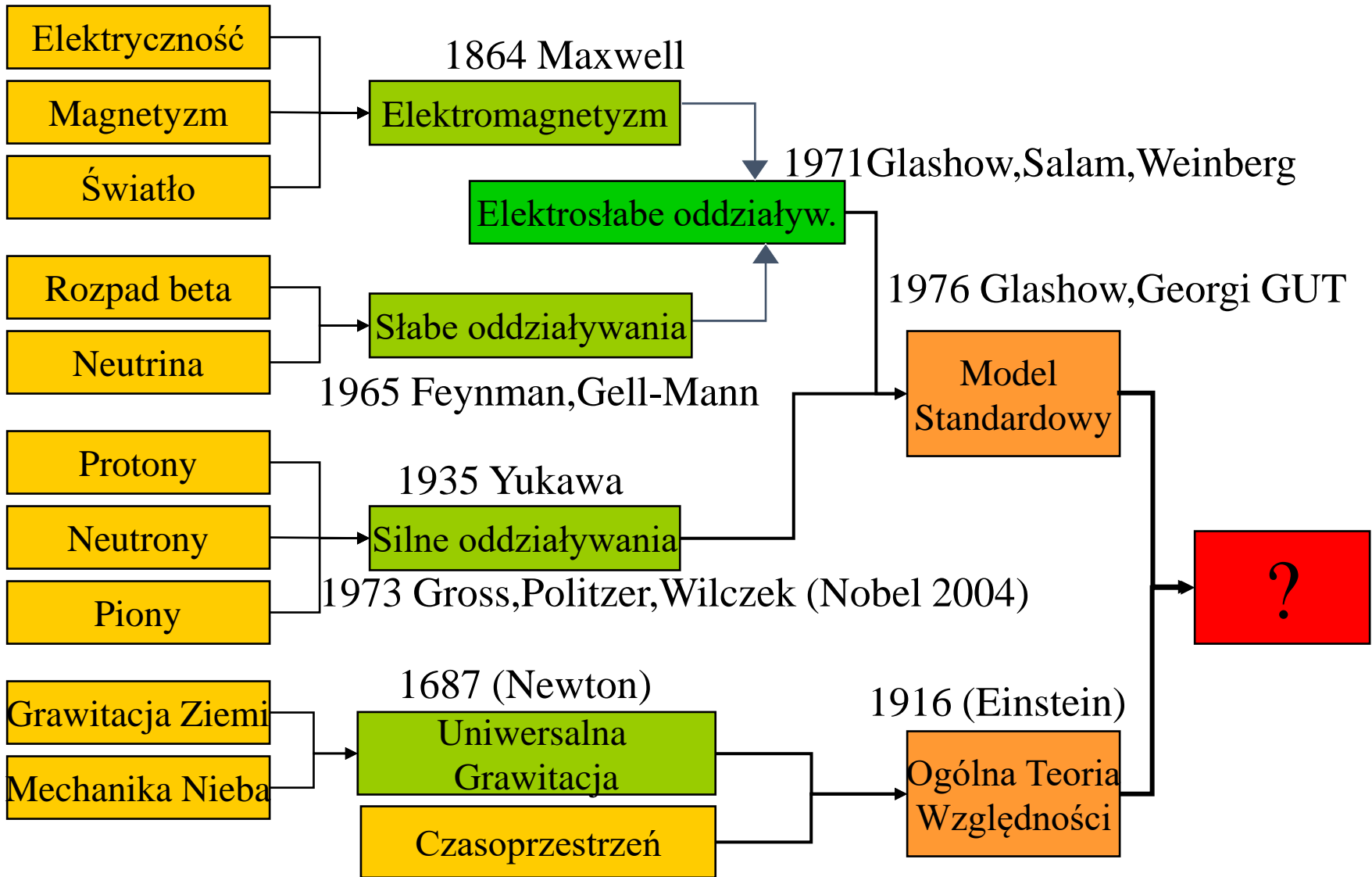
# Oddziaływanie słabe:

- Odpowiada za rozpad  $\beta$  (i radioaktywność).
- Jest krótkozasięgowe ( $<10^{-18}$  m).
- Jest  $10^9$  razy słabsze niż oddziaływanie silne





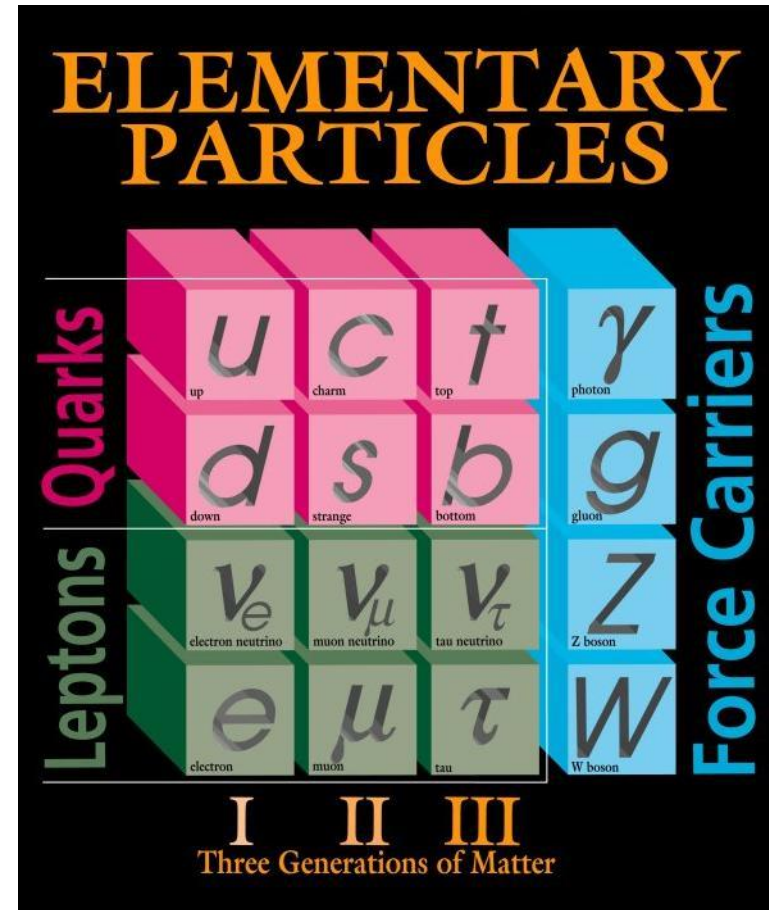
# Podstawowe oddziaływania - unifikacja



# Cząstki elementarne w Modelu Standardowym

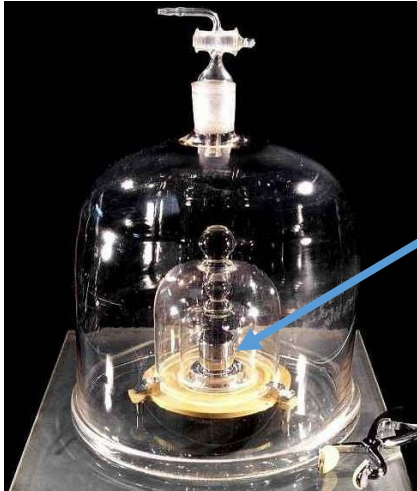
## Model Standardowy

- 6 leptonów
- 6 kwarków
- 4 cząstki pośredniczące
  - Wirtualny foton
  - Gluon  $g$
  - Ciężkie bozony
    - $W$  ( $80.4 \text{ GeV}/c^2, \pm e$ )
    - $Z$  ( $91.2 \text{ GeV}/c^2, 0$ )





- Fizyka opiera się na pomiarach wielkości fizycznych.
- Każdą wielkość fizyczną mierzymy porównując ją ze wzorcem. Mierzona wielkość wyrażamy w określonych jednostkach.
- Jednostka to nazwa miary danej wielkości.



Wzorzec kilograma - pod trzema szklanymi kloszami w Sevres pod Paryżem 1889 r. (BIPM)



platynoiroidowy wzorzec metra, 1799 r. (BIPM)

W 1791 r. we Francji przyjęto definicję metra jako  $1/10\ 000\ 000$  długości mierzonej wzdłuż południka paryskiego od równika do bieguna.

I Generalna Konferencja Miar z 26 września 1889 r. ustaliła definicję metra jako odległości w temperaturze  $0\ ^\circ\text{C}$  i przy normalnym ciśnieniu atmosferycznym między dwiema głównymi kreskami na platynoiroidowym wzorcu, złożonym w Międzynarodowym Biurze Miar w Sévres pod Paryżem, oraz definicję i wzorzec kilograma.

# Międzynarodowy układ jednostek SI



W 1971 r., na XIV Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag dokonano wyboru siedmiu podstawowych wielkości fizycznych (nadając im jednostkę), tworząc w ten sposób układ SI (fr. *Système Internationale*):

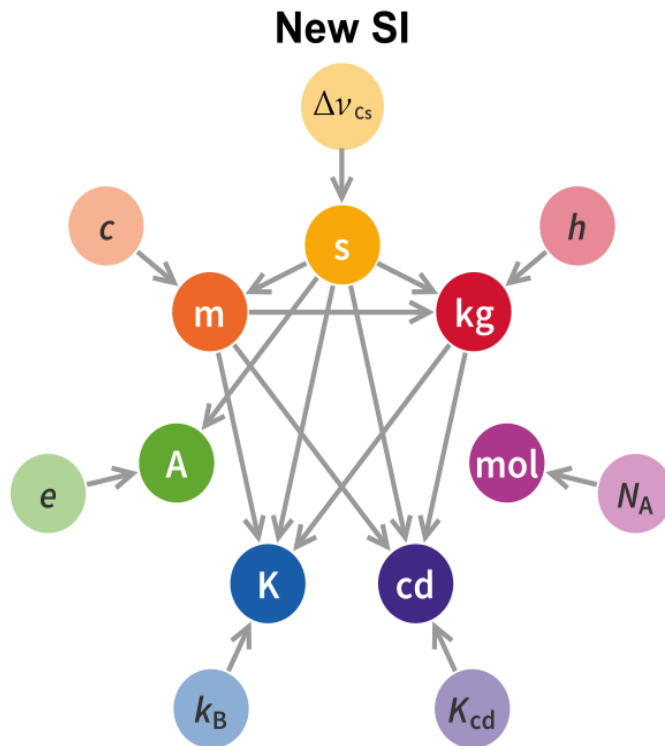
- długość (metr)
- czas (sekunda)
- masa (kilogram)
- natężenie prądu elektrycznego (amper)
- temperatura (kelwin)
- liczność materii (mol)
- światłość (kandela)





# Nowe definicje jednostek

20 maja 2019 roku weszły w życie nowe definicje jednostek wyrażone przez stałe podstawowe.



Zależność podstawowych jednostek od fundamentalnych stałych fizycznych o ustalonych wartościach i powiązanie ich z innymi jednostkami podstawowymi.



# Definicja kilograma

## Definicja do 2019 r.:

Kilogram jest jednostką masy; jest równy masie międzynarodowego wzorca kilograma.

## Definicja od 2019 r.:

Kilogram, oznaczenie kg, to jednostka masy w SI. Jest ona zdefiniowana poprzez przyjęcie ustalonej wartości liczbowej [stałej Plancka  \$h\$](#) , wynoszącej  $6,62607015 \cdot 10^{-34}$ , wyrażonej w jednostce  $\text{J} \cdot \text{s}$ , która jest równa  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , przy czym [metr](#) i [sekunda](#) zdefiniowane są za pomocą  [\$c\$](#)  i  [\$\Delta \nu\_{\text{Cs}}\$](#)

$$1 \text{ kg} = \left( \frac{h}{6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}} \right) \text{m}^{-2} \text{s}$$

$$1 \text{ kg} = \frac{(299\ 792\ 458)^2}{(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)} \frac{h \Delta \nu_{\text{Cs}}}{c^2} \approx 1,475\ 5214 \times 10^{40} \frac{h \Delta \nu_{\text{Cs}}}{c^2}$$



# Jednostki pochodne

---

Na podstawie podstawowych jednostek definiuje się jednostki pochodne, np:

niuton (N) – jednostka siły

dżul (J) – jednostka energii, pracy

wat (W) – jednostka mocy

Np.:

ze wzoru  $F = m \cdot a$

Siła (N) = masa (kg) · przyspieszenie ( $m/s^2$ )

$[N] = [kg \cdot m/s^2]$

ze wzoru  $W = F \cdot s$

Praca (J) = siła (N) · przemieszczenie (m)

$[J] = [N \cdot m] = [kg \cdot m/s^2] \cdot [m] = [kg \cdot m^2/s^2]$

# Jednostki wtórne - przedrostki



Przedrostek	Symbol	Mnożnik
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
decy	d	$10^{-1}$
centy	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
piko	P	$10^{-12}$



# Jednostki wtórne - przykłady

---

$$12\,500\text{ m} = 1.25 \cdot 10^4\text{ m} = 12.5 \cdot 10^3\text{ m} = 12.5\text{ km}$$

$$0.000\,014\,8\text{ m} = 1.48 \cdot 10^{-5}\text{ m} = 14.8 \cdot 10^{-6}\text{ m} = 14.8\ \mu\text{m}$$

$$3\,560\,000\,000\text{ m} = 3.56 \cdot 10^9\text{ m} = 3.56\text{ Gm}$$

$$\begin{aligned} 0,000\,000\,492\text{ s} &= 4.92 \cdot 10^{-7}\text{ s} = 4.92 \cdot 10^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-7}\text{ s} \\ &= 4.92 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6}\text{ s} = 0.492 \cdot 10^{-6}\text{ s} = 0.492\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

# Cyfry znaczące



Zaokrąglając liczbę 12.3456 do trzech cyfr znaczących otrzymujemy:

12.3

Liczby 3.14 i  $3.14 \cdot 10^3$  mają .....**tę samą**..... liczbę cyfr znaczących

Czym różnią się liczby?:

23.4    2.34    0.234    0.00234

**Mają tę samą liczbę cyfr znaczących ale są różnego rzędu**



# Rząd wielkości

- Rząd wielkości to wykładnik potęgi liczby 10 gdy daną wielkość wyrażamy poprzez iloczyn liczby z zakresu 1-9 pomnożony przez 10 do odpowiedniej potęgi

$$5 \cdot 10^4$$

rząd 4

$$2.3 \cdot 10^7$$

rząd 7

- Np. liczba ludności Polski (38 mln) i Niemiec (82 mln)

$$3.8 \cdot 10^6$$

$$8.2 \cdot 10^6$$

liczby tego samego rzędu – rząd 6

- Średnica atomu Al ( $2.9 \cdot 10^{-10}$  m) i jądra ( $7.2 \cdot 10^{-15}$  m)

$$2.9 \cdot 10^{-10}$$

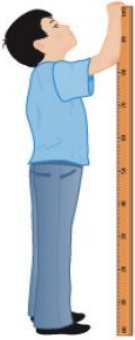
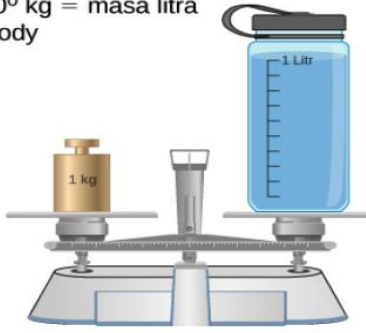
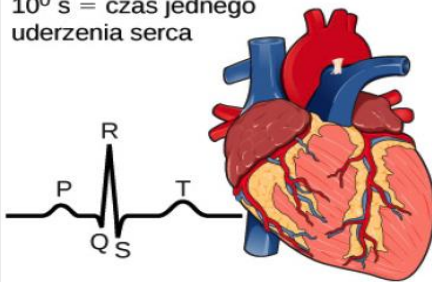
$$8.2 \cdot 10^{-15}$$

liczby różnią się o 5 rzędów wielkości

# Rząd wielkości



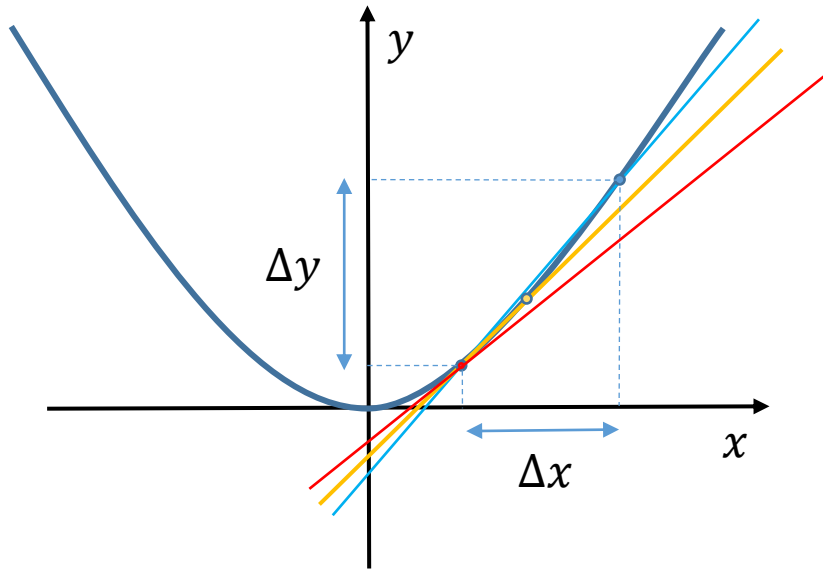
## Przykładowe rzędy wielkości

Długość w metrach (m)	Masa w kilogramach (kg)	Czas w sekundach (s)
$10^{-15}$ m = średnica protonu	$10^{-30}$ kg = masa elektronu	$10^{-22}$ s = czas życia bardzo niestabilnego jądra atomu
$10^{-14}$ m = średnica dużego jądra atomowego	$10^{-27}$ kg = masa protonu	$10^{-17}$ s = czas wykonania przez superkomputer pojedynczej operacji zmiennoprzecinkowej
$10^{-10}$ m = średnica atomu wodoru	$10^{-15}$ kg = masa bakterii	$10^{-15}$ s = czas pojedynczego drgania fali światła w zakresie widzialnym
$10^{-7}$ m = średnica przeciętnego wirusa	$10^{-5}$ kg = masa komara	$10^{-13}$ s = czas pojedynczego drgania atomu w ciele stałym
$10^{-2}$ m = szerokość paznokcia małego palca	$10^{-2}$ kg = masa kolibra	$10^{-3}$ s = czas przesyłu impulsu nerwowego
$10^0$ m = wzrost czteroletka 	$10^0$ kg = masa litra wody 	$10^0$ s = czas jednego uderzenia serca 
$10^2$ m = długość boiska do piłki nożnej	$10^2$ kg = masa człowieka	$10^5$ s = jeden dzień
$10^7$ m = średnica kuli ziemskiej	$10^{19}$ kg = masa atmosfery	$10^7$ s = jeden rok
$10^{13}$ m = średnica Układu Słonecznego	$10^{22}$ kg = masa Księżyca	$10^9$ s = czas życia człowieka
$10^{16}$ m = rok świetlny (droga jaką przebywa światło w ciągu roku)	$10^{25}$ kg = masa Ziemi	$10^{11}$ s = udokumentowana historia ludzkości
$10^{21}$ m = średnica Drogi Mlecznej	$10^{30}$ kg = masa Słońca	$10^{17}$ s = wiek Ziemi
$10^{26}$ m = odległość do granicy widzialnego Wszechświata	$10^{53}$ kg = maksymalna masa znanego Wszechświata	$10^{18}$ s = wiek Wszechświata

openstax.pl



# Rachunek różniczkowy w fizyce



nachylenie prostej –  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Pochodna funkcji:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Zapis pochodnej:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad f'(x)$$

Pochodna funkcji:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

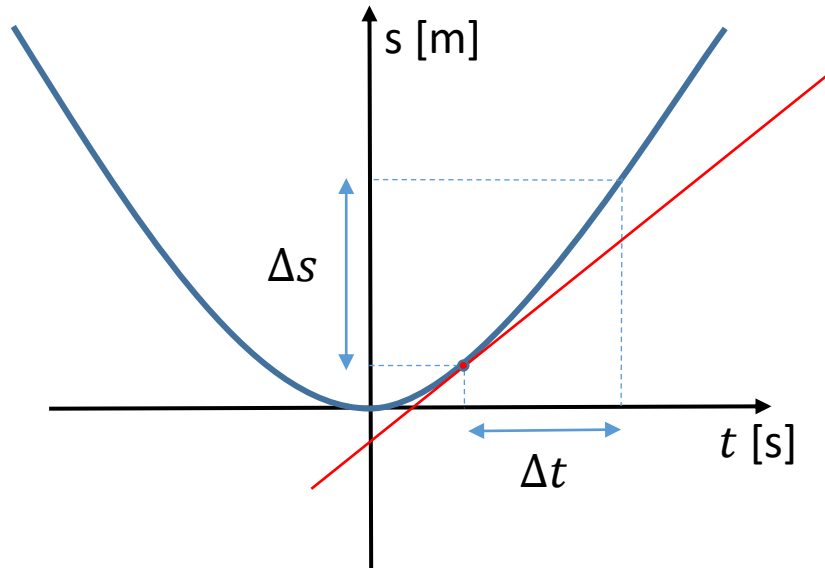
$$f(x) = x^n \quad \longrightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

# Rachunek różniczkowy w fizyce



Prędkość

$$V \left[ \frac{m}{s} \right]$$



Prędkość średnia

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Prędkość chwilowa

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

Przyspieszenie chwilowe

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} = V'(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$



# Podstawowe wzory

$$(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, a \in \mathbb{R}$$

$$(x)' = 1$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Przykład:

$$x(t) = \sin(\omega t^2)$$

$$V(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \cos(\omega t^2) \cdot \omega 2t$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} V(t) = ??$$



# Rachunek różniczkowy w fizyce

Ciało o masie  $m$  zaczęło zwalniać w chwili  $t = 0$  tak, że jego położenie w funkcji czasu zmienia się zgodnie z wzorem:

$$s(t) = 27 \cdot t - t^3 \text{ [m]}.$$

a) Oblicz po jakim czasie ciało zatrzymało się.

Obliczamy prędkość:

$$V(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(27t - t^3) = 27 - 3t^2$$

Czas po którym ciało zatrzyma się  $\longrightarrow$   $V(t) = 0$

$$V(t) = 27 - 3t^2 = 0 \longrightarrow t = 3 \text{ [s]}$$

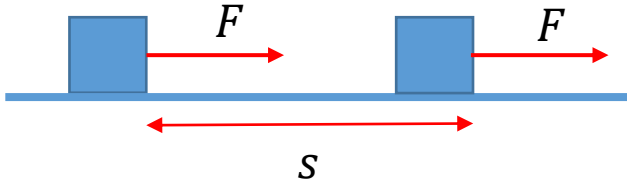
b) Oblicz wartość przyspieszenia ciała dla  $t = 2$  [s]

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(27 - 3t^2) = -6t = -6 \cdot 2 = -12 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

# Rachunek całkowy w fizyce



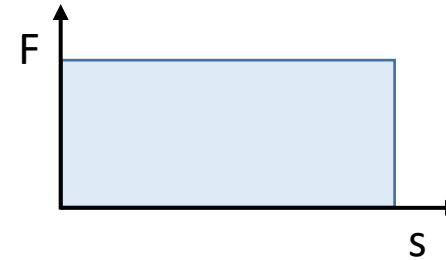
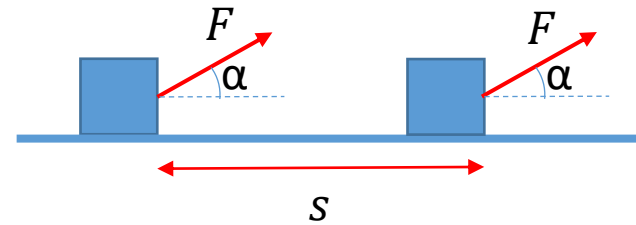
$$W = F \cdot s$$



$$F = \text{const}$$

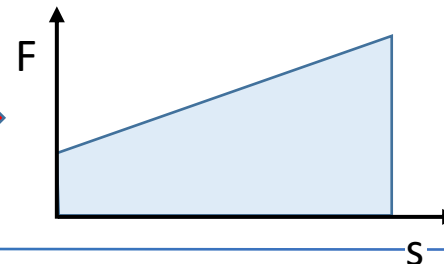


$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$



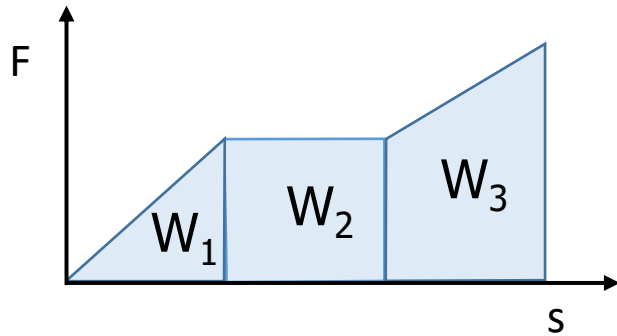
Co w przypadku gdy siła  $F$  nie jest stała?

$F$  jednostajnie  
zmienna



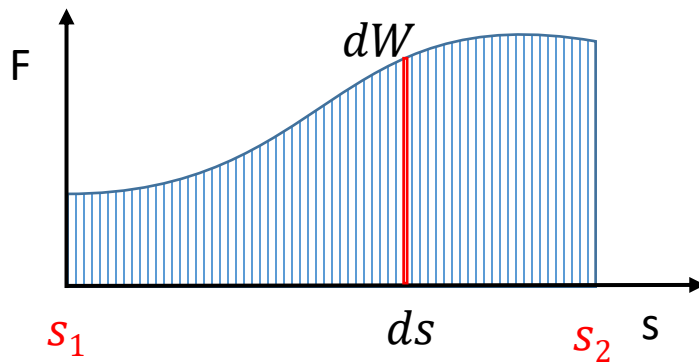
$$W = F_{\text{śr}} \cdot s$$

# Rachunek całkowy w fizyce



$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

Siła  $F$  - niejednostajnie zmienna



$$\Delta W_i = F_i \Delta s_i$$

$$W \approx \sum_{i=1}^n F_i \Delta s_i$$

Gdy  $\Delta s$  jest bardzo małe i zmierza do 0

$$W = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta s_i$$

$$\Delta s = ds$$

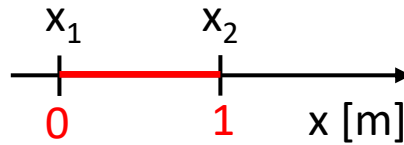
$$dW = F \cdot ds$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$



# Przykład 1

Na ruszające z miejsca i poruszające się prostoliniowo ciało działa siła  $F = x^2 + 4x + 1$  [N]. Obliczyć jaką pracę wykonuje ta siła na pierwszym metrze drogi.

$$W = \int F(x) dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$F(x) = (x^2 + 4x + 1) \quad W = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + 4x + 1) dx = \int_0^1 (x^2 + 4x + 1) dx$$

$$W = \int_0^1 (x^2 + 4x + 1) dx = \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{2} x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{3} 1^3 + \frac{4}{2} 1^2 + 1 \right) - \left( \frac{1}{3} 0^3 + \frac{4}{2} 0^2 + 0 \right) =$$

$$= \left( \frac{1}{3} + 2 + 1 \right) - (0) = \dots = \frac{10}{3} \text{ [J]}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$



# Przykład 1

Na ruszające z miejsca i poruszające się prostoliniowo ciało działa siła  $F = x^2 + 4x + 1$  [N]. Obliczyć jaką pracę wykonuje ta siła na **trzecim** metrze drogi.

$$W = \int F(x) dx \quad \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ | \quad | \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad x \text{ [m]} \end{array} \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$F(x) = (x^2 + 4x + 1) \quad W = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + 4x + 1) dx = \int_2^3 (x^2 + 4x + 1) dx$$

$$W = \int_2^3 (x^2 + 4x + 1) dx = \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{2} x^2 + x \right) \Big|_2^3 = \left( \frac{1}{3} 3^3 + \frac{4}{2} 3^2 + 3 \right) - \left( \frac{1}{3} 2^3 + \frac{4}{2} 2^2 + 2 \right) =$$

= ..... = ?

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$





# Przykład 2

Prędkość kuli o masie  $m = 1/2$  [kg] poruszającej się prostoliniowo jest zależna od czasu w następujący sposób:

$$V(t) = 2 - 1/2 t^2 \text{ [m/s]}.$$

a) Oblicz średnią szybkość kuli.

$$V_{\text{sr}} = \frac{s_{\text{całk}}}{t_{\text{całk}}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\Delta t = ?$  Czas po którym kula zatrzyma się  $\longrightarrow V(t) = 2 - \frac{1}{2}t^2 = 0 \longrightarrow t = 2$  [s]

$$V(t) = \frac{ds}{dt} \longrightarrow ds = V(t)dt \longrightarrow s = \int ds = \int V(t)dt$$

$$s = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right) dt = \left(2t - \frac{1}{6}t^3\right) \Big|_0^2 = \left(2 \cdot 2 - \frac{1}{6}2^3\right) - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{6}0^3\right) = \frac{8}{3} [m]$$

$$\underline{V_{\text{sr}} = \frac{\frac{8}{3} [m]}{2 [s]} = \frac{4}{3} \left[\frac{m}{s}\right]}$$



# Przykład 2 cd.

b) Oblicz równanie siły hamującej działającej na kulę

$$F = m \cdot a \quad a = \frac{dV(t)}{dt} \quad V(t) = 2 - \frac{1}{2}t^2 \quad a = \frac{d}{dt} \left( 2 - \frac{1}{2}t^2 \right) = -t \quad \boxed{F = -\frac{1}{2}t}$$

c) Oblicz całkowitą pracę wykonaną przez siłę hamującą

$$F(t) = -\frac{1}{2}t \quad F \neq \text{const} \quad \longrightarrow \quad W = \int F ds \quad W = \int F(t) ds$$

$$V(t) = \frac{ds}{dt} \quad \longrightarrow \quad ds = V(t) dt$$

Siła zależna od czasu a  
nie położenia!!!

$$W = \int F(t) V(t) dt$$

$$W = \int_0^2 \left( -\frac{1}{2}t \right) \left( 2 - \frac{1}{2}t^2 \right) dt = \int_0^2 \left( -t + \frac{1}{4}t^3 \right) dt = \left( -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 \right) \Big|_0^2 = \underline{\underline{-1 [J]}}$$

# Całki wzory



Całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania.

Całką funkcji  $f(x)$  nazywamy taką funkcję  $F(x)$ , że:  $F'(x) = f(x)$

Operację całkowania zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{lll} \int 0 \, dx = C & \int \sin x \, dx = -\cos x + C & \int f(x) = F(x) + C \\ \int a \, dx = a \cdot x + C & \int \cos x \, dx = \sin x + C & \\ \int x \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C & \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C & \\ \int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C, a \neq -1 & \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C & \\ \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C & \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C, \cos x \neq 0 & \\ \int e^x \, dx = e^x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C, \sin x \neq 0 & \\ \int \ln x \, dx = (x-1) \cdot \ln x + C & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C, -1 < x < 1 & \\ \int \frac{1}{a \cdot x + b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|a \cdot x + b| + C, a \neq 0 & \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \operatorname{arctg} x + C & \end{array}$$