

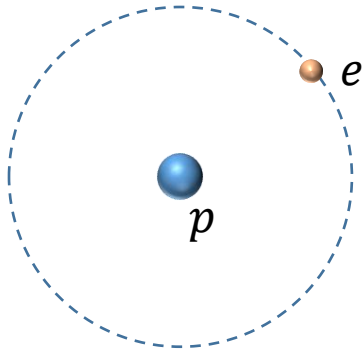
# Elektrostatyka

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>



# Oddziaływanie elektryczne – ładunki

Za oddziaływania elektryczne odpowiedzialne są ładunki elektryczne



Elektron  $e$  : ładunek elementarny ujemny  $- e$

Proton  $p$  : ładunek elementarny dodatni  $+ e$

Wszystkie istniejące ładunki są wielokrotnością ładunku elementarnego  $e$

$$e = 1.602 \cdot 10_{-19} C$$

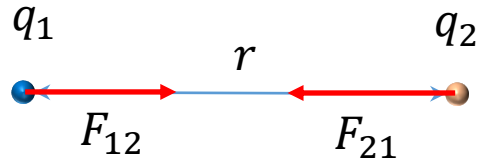
W układzie SI jednostką ładunku jest kulomb [C]. Jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy  $1 [C] = 1 [A \cdot s]$

## ➤ Zasada zachowania ładunku:

Całkowity ładunek układu odosobnionego, tzn. algebraiczna suma dodatnich i ujemnych ładunków występujących w dowolnej chwili, nie może ulegać zmianie.

$$Q_{całk} = const$$

# Prawo Coulomba



Charles Coulomb

1736-1806

Każde dwa ładunki punktowe  $q_1$  i  $q_2$  oddziałują wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu tych ładunków, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.

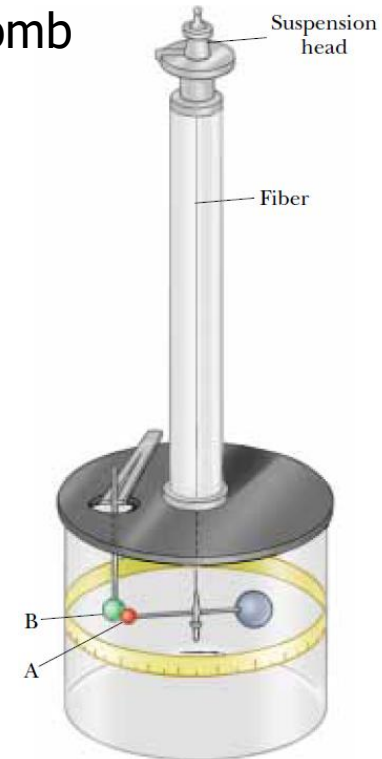
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ładunki jednoimienne odpychają się,  
a różnoimienne przyciągają

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$$

przenikalność  
elektryczna próżni



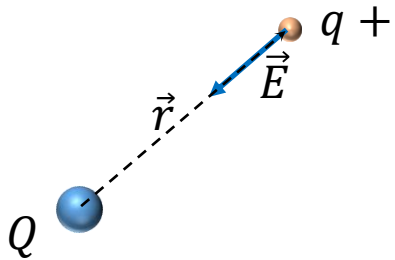
**Figure 23.5** Coulomb's torsion balance, used to establish the inverse-square law for the electric force between two charges.

1785r. – waga skręceń



# Natężenie pola elektrycznego

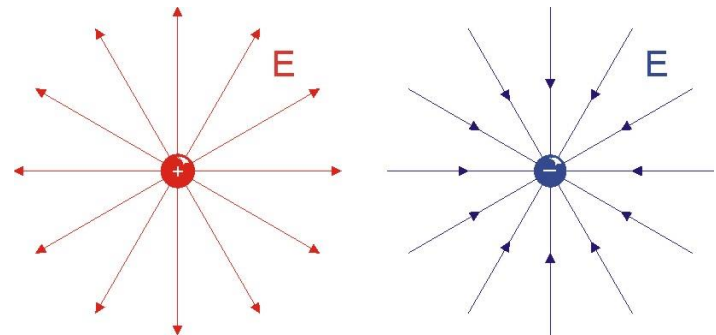
Natężenie pola elektrycznego definiujemy jako siłę działającą na ładunek próbny  $q +$  (umieszczony w danym punkcie przestrzeni) podzieloną przez ten ładunek.



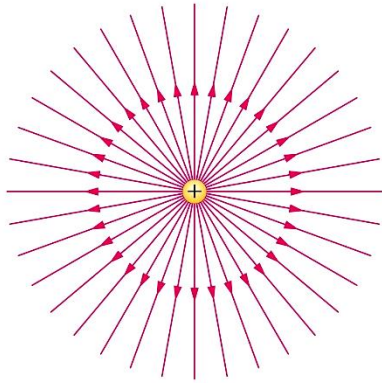
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{q} \vec{F} = \frac{1}{q} k \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

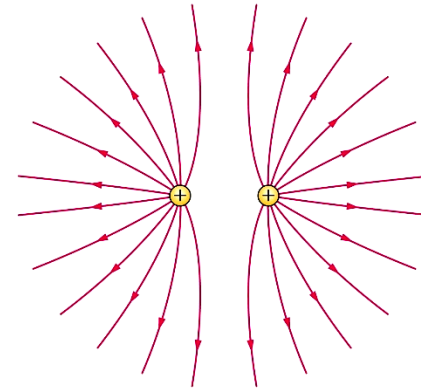
Ładunek próbny jest dodatni więc kierunek wektora  $E$  jest taki sam jak kierunek siły działającej na ładunek dodatni.



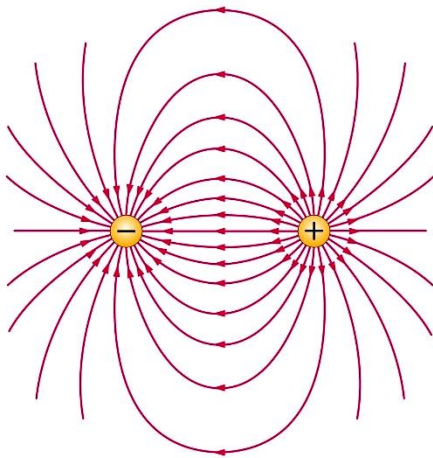
# Linie pola elektrostatycznego



ładunek punktowy

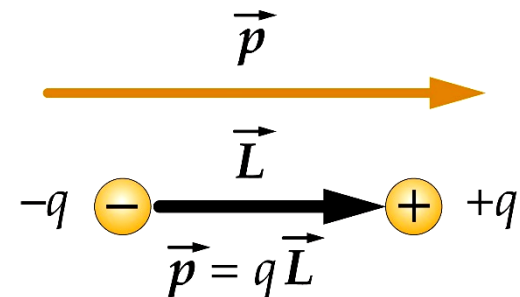


dwa ładunki jednoimienne



dwa różnoimienne  
ładunki w małej  
odległości

dipol elektryczny



$\vec{p}$  - moment dipolowy

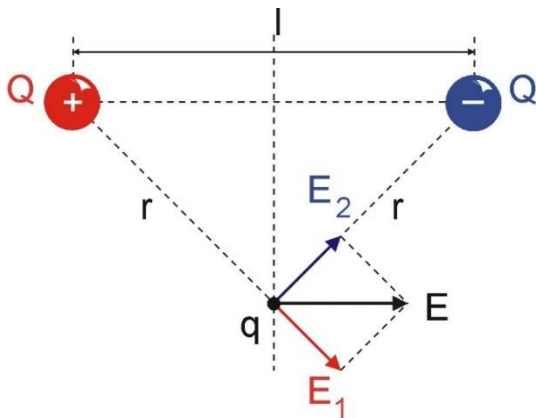
# Zasada superpozycji – punktowy rozkład ładunku

Gdy mamy do czynienia z kilkoma naładowanymi ciałami, wypadkowe natężenie pola (siłę wypadkową), obliczamy dodając wektorowo natężenia pól od pojedynczych ładunków.

Natężenie pola pochodzące od wielu ładunków punktowych (rozkład dyskretny)

$$\longrightarrow \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Przykład dipol elektryczny

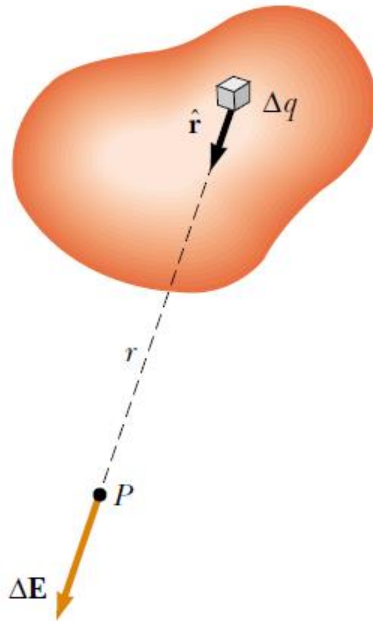


$$\frac{E}{E_1} = \frac{l}{r}$$

$$E = \frac{l}{r} E_1 = \frac{l}{r} k \frac{Q}{r^2} = k \frac{p}{r^3}$$

$$p = Ql \quad \text{moment dipolowy}$$

# Zasada superpozycji - ciągły rozkład ładunku



Dla ładunku  $dq$ , natężenie pola elektrycznego w punkcie P dane jest zgodnie z prawem Coulomba jak dla ładunku punktowego

$$d\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Dla ciągłego rozkładu ładunku pole wypadkowe jest całką:

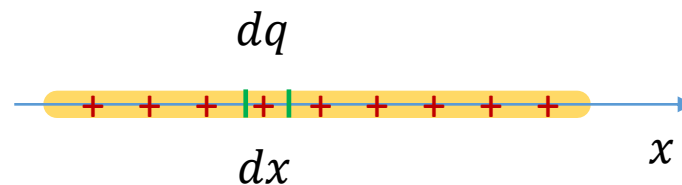
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_Q k \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$



# Ciągły rozkładu ładunku

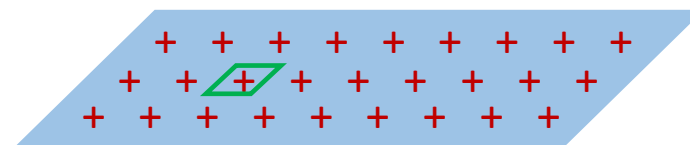
- gęstość liniowa ładunku:  $\lambda$

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$



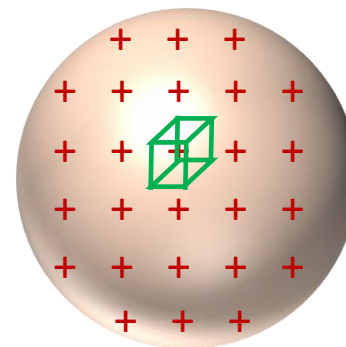
- gęstość powierzchniowa ładunku:  $\sigma$

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$



- gęstość objętościowa ładunku:  $\rho$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



W zależności od rodzaju gęstości ładunku, pole wypadkowe może być całką liniową, powierzchniową lub objętościową:

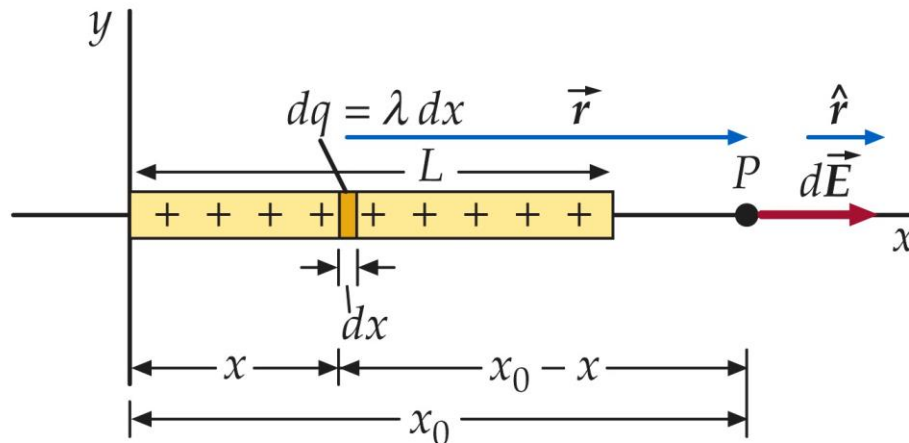
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_V k \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$





# Zasada superpozycji – naładowany pręt

Policzyć natężenie pola elektrycznego w punkcie P na osi jednorodnie naładowanego cienkiego pręta - liniowy rozkład ładunku



$$dE_x = k \frac{dq}{(x_0 - x)^2}$$

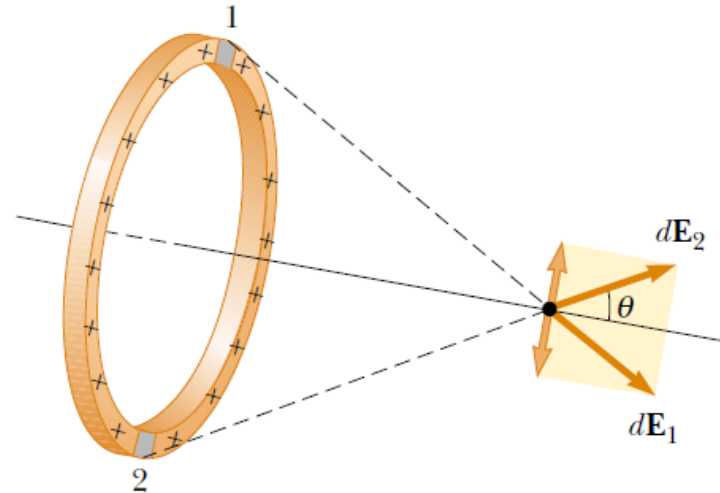
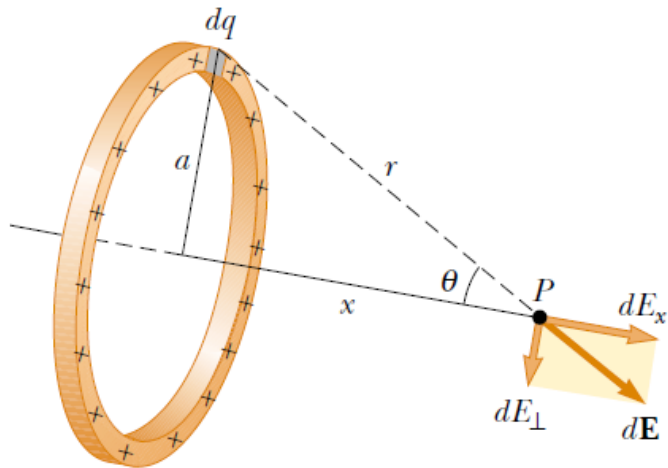
$$dq = \lambda dx$$

$$E = E_x = \int dE_x = \int_0^L k \frac{\lambda}{(x_0 - x)^2} dx = k \frac{\lambda L}{x_0(x_0 - L)}$$

# Zasada superpozycji – naładowany pierścień



Policzyć natężenie pola elektrycznego w punkcie P na osi jednorodnie naładowanego cienkiego pierścienia



$$\lambda = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE = k \frac{\lambda dl}{r^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$dE_x = k \frac{\lambda dl x}{r^2 r}$$

$$E = E_x = \int dE_x = \int k \frac{\lambda x}{r^2 r} dl$$

$$= k \frac{\lambda x}{r^3} \int dl = k \frac{\lambda x}{r^3} 2\pi r = k \frac{Qx}{r^3} = k \frac{Qx}{r^3}$$

$$E = k \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

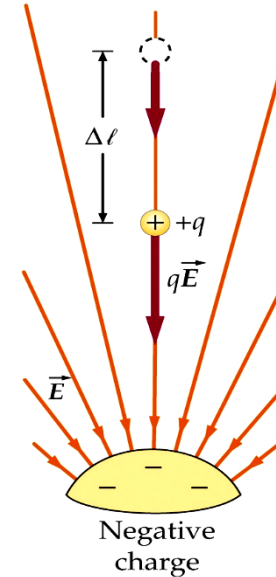
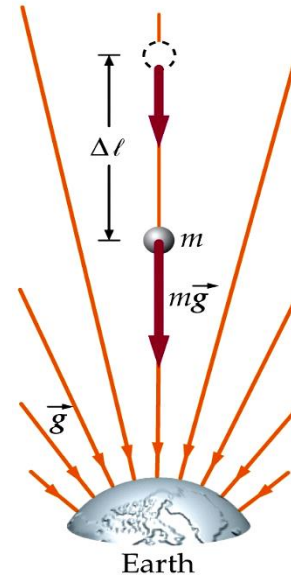


# Natężenie i potencjał pola

✓ Wektor natężenia pola

– istnieje zawsze:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



✓ Potencjał (skalar) – istnieje tylko dla pól zachowawczych (potencjalnych)

$$V = \frac{E_p}{q_0}$$

Potencjał elektryczny definiujemy jako energię potencjalną pola elektrycznego podzieloną przez jednostkowy ładunek



# Związek potencjału z natężeniem pola

Dla dowolnej siły zachowawczej, zmiana energii potencjalnej  $dE_p$  dana jest wzorem:

$$dE_p = -\underbrace{\vec{F} \circ d\vec{l}}_{\text{praca } dW} = -q_0 \vec{E} \circ d\vec{l}$$

praca  $dW$

$$dV = -\vec{E} \circ d\vec{l}$$

z definicji potencjału

$$dV = \frac{dE_p}{q_0}$$

$$dE_p = q_0 dV$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \circ d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V}$$



$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \circ d\vec{l} \quad \longrightarrow \quad \Delta V = V_b - V_a = - \frac{W}{q_0}$$

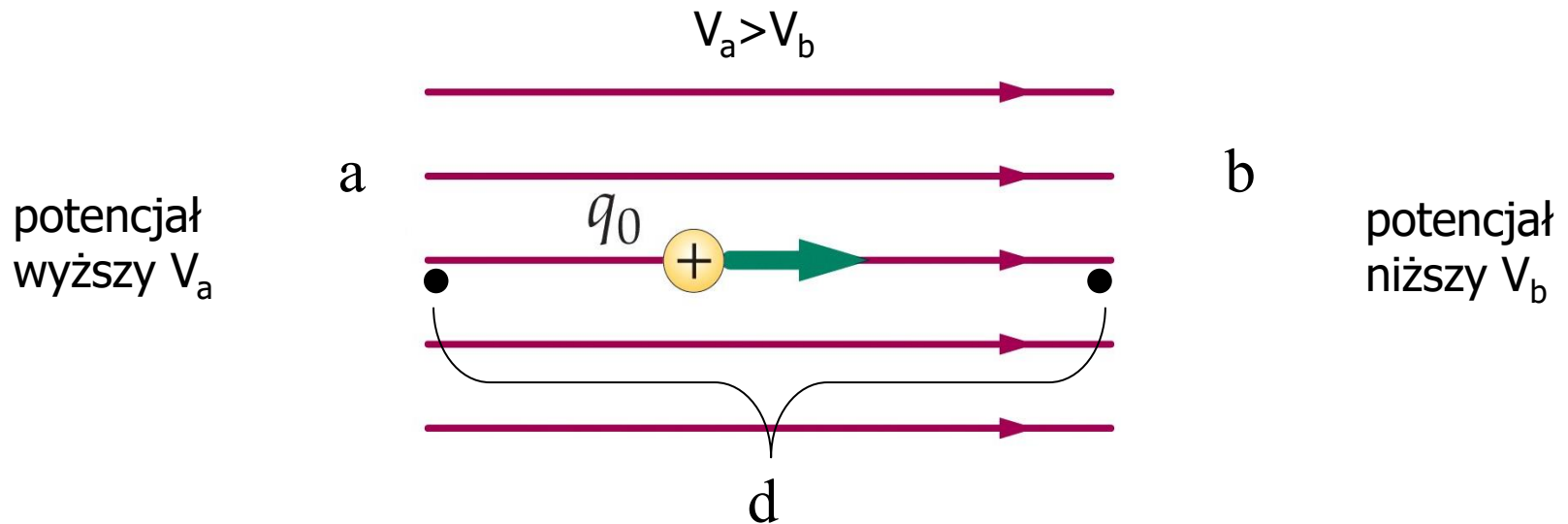
Różnica potencjałów  $\Delta V$  między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy  $W$  wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego.

Różnicę potencjałów nazywamy napięciem  $U$  :  $U = \Delta V$

Jednostki:  $V = \frac{E_p}{q_0} \Rightarrow [U] = 1V = \frac{J}{C}$

$$[E] = \frac{V}{m}$$

# Potencjał pola jednorodnego



$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\int_a^b E dl = -E \int_a^b dl = -E(b - a) = -Ed$$



# Potencjał pola ładunku punktowego

Przesuwamy ładunek próbny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności

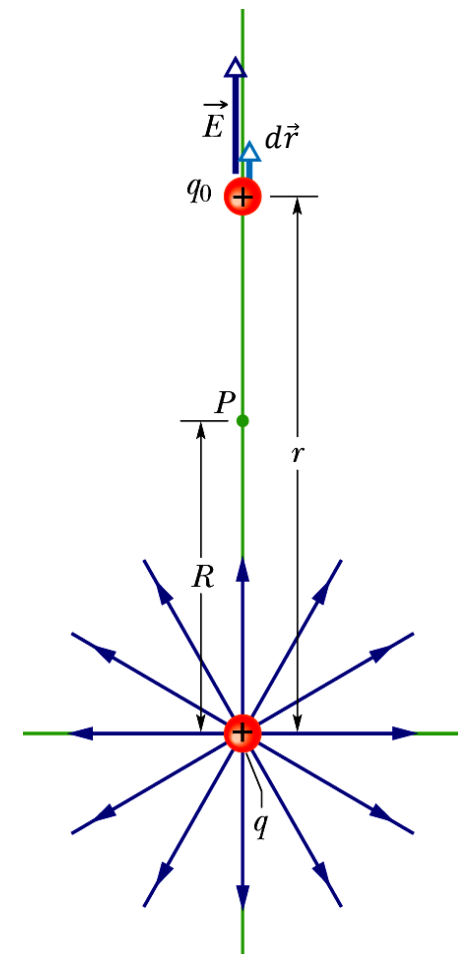
$$\vec{E} \circ d\vec{r} = E dr \cos \theta$$

$$V_p - V_\infty = - \int_\infty^R \vec{E} \circ d\vec{r} = - \int_\infty^R E dr$$

Przyjmujemy  $V_\infty = 0$  i  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2}$

zatem

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r}$$



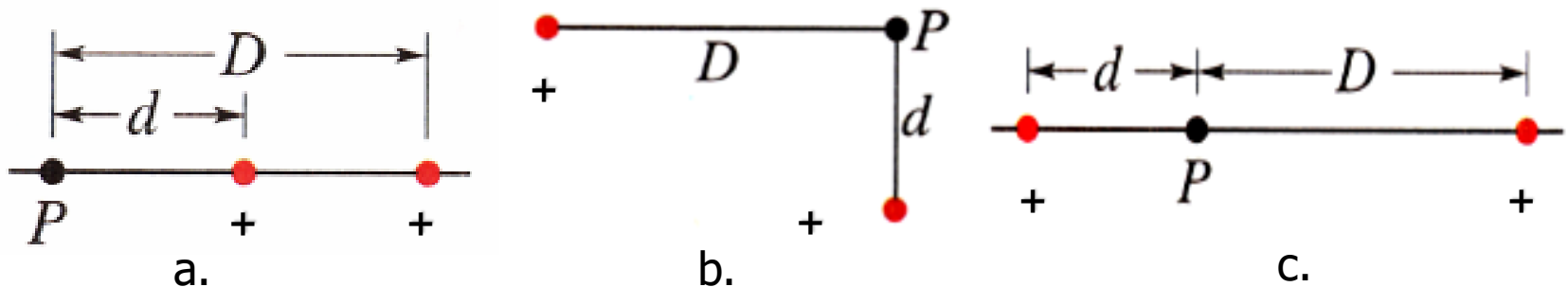
# Potencjał dla dyskretnego rozkładu ładunku



Wypadkowy potencjał  $V$  układu  $n$  ładunków punktowych  $q_i$  obliczamy korzystając z zasady superpozycji

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

**Zadanie** Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, wytworzonego przez protony w punkcie  $P$ , zaczynając od największego.



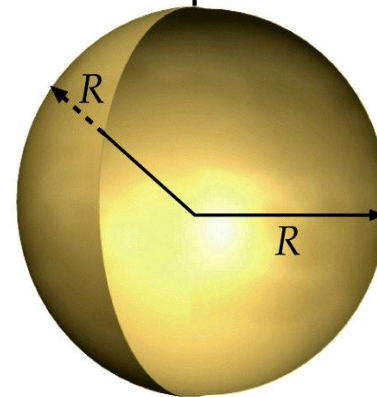
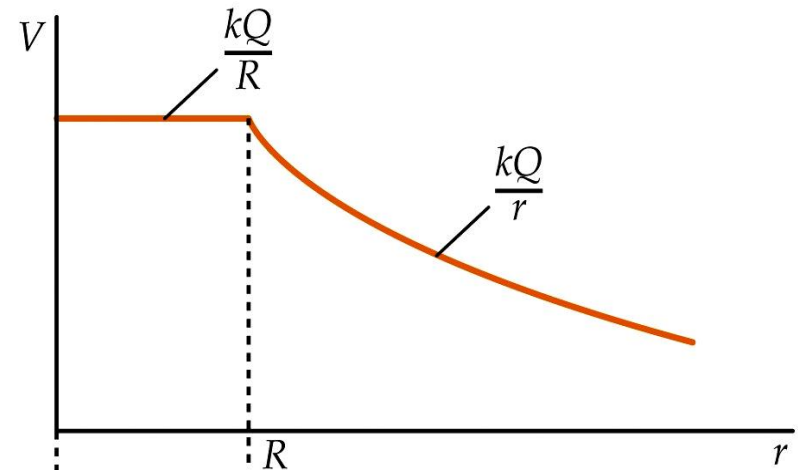




# Potencjał ciągłego rozkładu ładunków

Dla naładowanej ładunkiem powierzchniowym  $Q$  powłoki sferycznej, gdy  $r < R$  jest:  $E = 0$ , czyli potencjał  $V$  jest wielkością stałą, niezależną od  $r$ .

Dla  $r > R$ ,  $V$  maleje z odległością  $r$  jak  $1/r$



**Zadanie** Pokazać, że potencjał dla powłoki sferycznej wykazuje taką zależność  $V(r)$  jak na powyższym wykresie

# Pojemność



Pojemnością elektryczną nazywamy stosunek ładunku kondensatora do różnicy potencjałów (napięcia) między okładkami.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \left[ \frac{C}{V} \right] = [F] \quad \text{jednostka pojemności } [F] \text{ (farad)}$$

Powszechnie stosuje się jednak mniejsze jednostki:

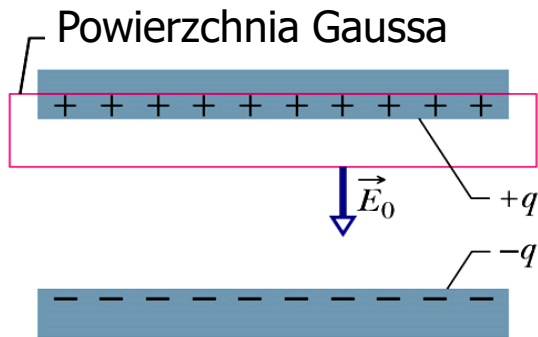
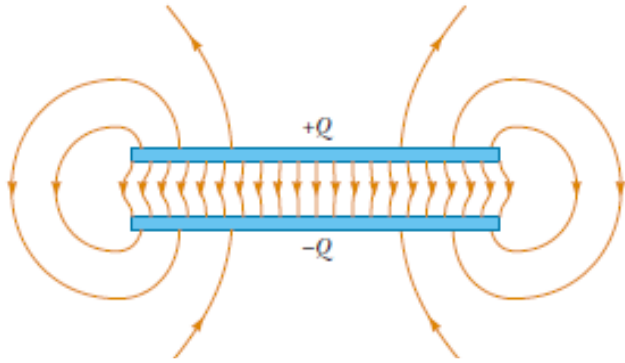
$$\mu F, nF, pF.$$

Analogia między kondensatorem mającym ładunek  $q$  i sztywnym zbiornikiem o objętości  $V$ , zawierającym  $n$  moli gazu doskonałego:

$$n = \frac{V_{obj}}{RT} p \qquad q = C \Delta V$$

Przy ustalonej temperaturze  $T$ , pojemność kondensatora  $C$  pełni podobną funkcję jak objętość zbiornika.

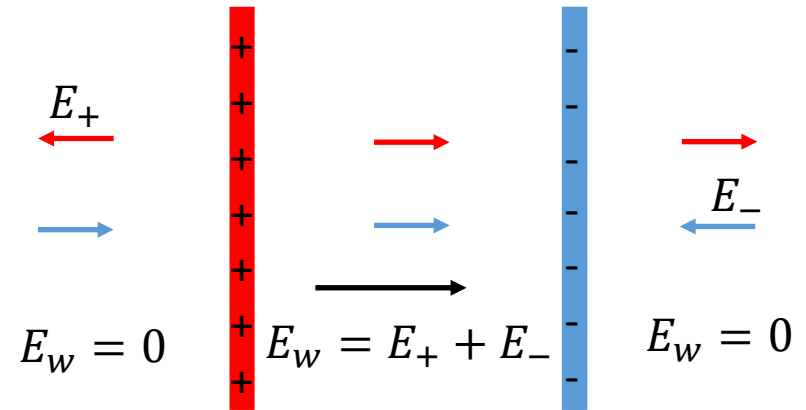
# Kondensator płaski - pojemność



$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

$$q = E_0 \epsilon_0 S$$

Inny sposób – superpozycja natężeń:



Wiemy, że dla płaszczyzny:

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \longrightarrow E_w = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Pojemność:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{U}$$

$$C = \frac{E \epsilon_0 S}{Ed}$$

Dla pola jednorodnego:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$U = E \cdot d$$



# Energia kondensatora

Praca elementarna  $dW$  przy przeniesieniu ładunku  $dq$ :

$$dW = Udq = \frac{q}{C} dq$$

$$W = \int dW = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

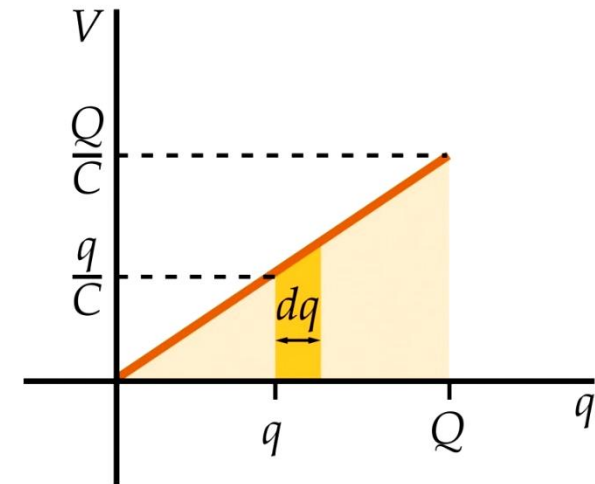
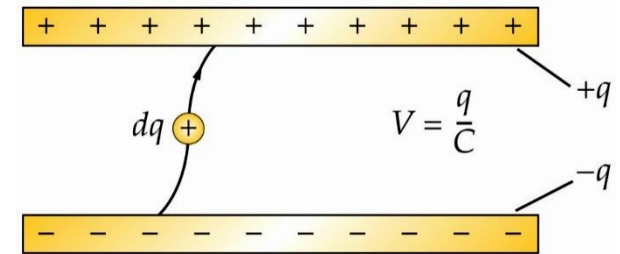
Praca  $W$  wykonana przy ładowaniu kondensatora zostaje zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej  $E_E$ , w polu elektrycznym między okładkami.

$$W = E_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2$$

Gęstość energii  $U_E$  jest to energia potencjalna przypadająca na jednostkę objętości

$$q = E_0 \varepsilon_0 S \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad U_E = \frac{E_E}{Sd} = \frac{1}{Sd} \frac{1}{2} \frac{d(E_0 \varepsilon_0 S)^2}{\varepsilon_0 S}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$



# Dielektryki



Dielektryki – ładunki nie mogą się swobodnie przemieszczać ale możliwe są przesunięcia ładunków w skali mikroskopowej.

Umieszczenie dielektryka (izolatora) pomiędzy okładkami kondensatora zwiększa jego pojemność  $\epsilon_r$  razy

$$\frac{C'}{C} = \epsilon_r$$

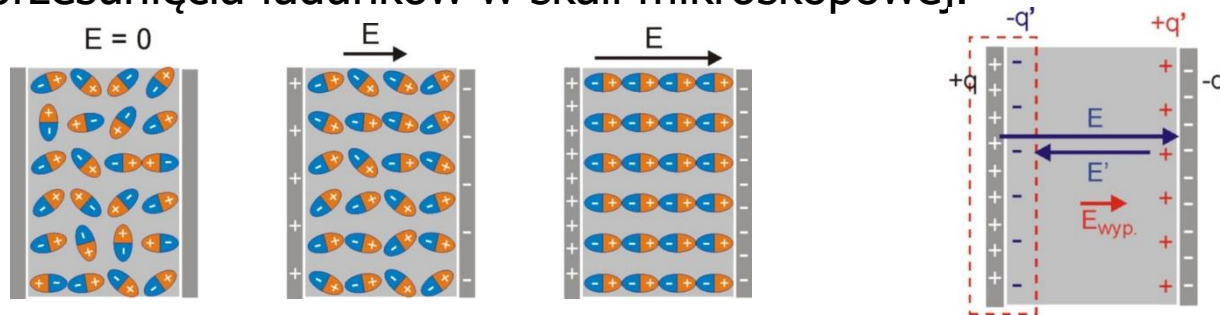
$\epsilon_r$  nazywamy względną przenikalnością elektryczną lub stałą dielektryczną

Materiał	Stała dielektryczna
próżnia	1.0000
powietrze	1.0005
teflon	2.1
polietylen	2.3
papier	3.5
szkło (pyrex)	4.5
porcelana	6.5
woda	78
TiO <sub>2</sub>	100

# Dielektryki



Dielektryki – ładunki nie mogą się swobodnie przemieszczać ale możliwe są przesunięcia ładunków w skali mikroskopowej.



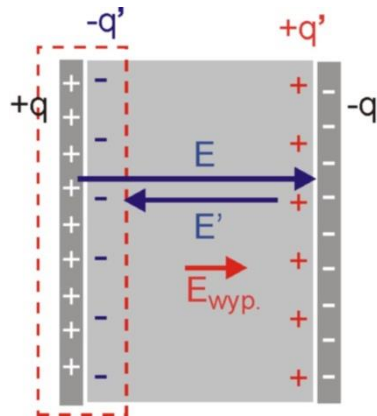
Po umieszczeniu w polu elektrycznym trwałe elektryczne momenty dipolowe dążą do ustawienia zgodnie z kierunkiem pola,

Wewnątrz dielektryka ładunki kompensują się, a jedynie na powierzchni dielektryka pojawia się nieskompensowany ładunek  $q'$

Wyindukowane ładunki wytwarzają pole elektryczne  $\mathbf{E}'$  przeciwne do pola  $\mathbf{E}$  pochodzącego od swobodnych ładunków na okładkach kondensatora,

Wypadkowe pole w dielektryku  $\mathbf{E}_{wyp.}$  (suma wektorowa pól  $\mathbf{E}'$  i  $\mathbf{E}$ ) ma ten sam kierunek co pole  $\mathbf{E}$  ale mniejszą wartość. Pole związane z ładunkiem polaryzacyjnym  $q'$  nosi nazwę polaryzacji elektrycznej .

# Dielektryki



Stosujemy prawo Gaussa do powierzchni zaznaczonej linią przerywaną

$$\oint \mathbf{E}_{wyp} d\mathbf{S} = \frac{q - q'}{\epsilon_0} \quad \text{pole } E \text{ jest jednorodne} \quad E_{wyp} S = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

$$E_{wyp} = \frac{q - q'}{\epsilon_0 S}$$

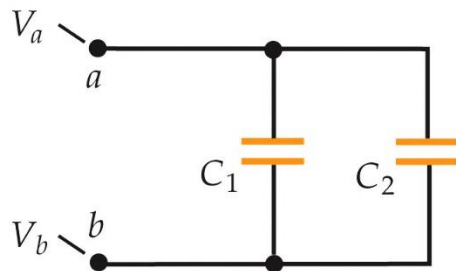
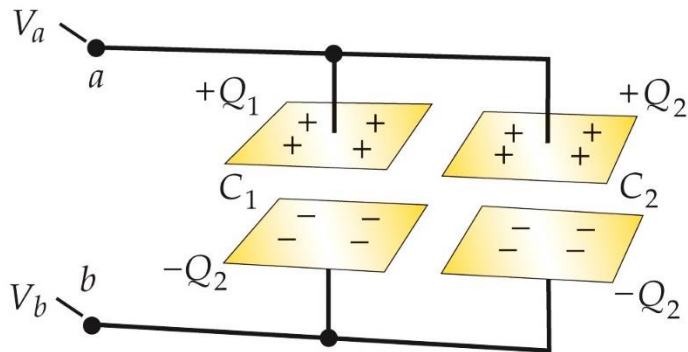
$$C' = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{q - q'} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{q}{q - q'} C \quad \frac{C'}{C} = \epsilon_r = \frac{q}{q - q'}$$

wprowadzenie dielektryka zwiększa pojemność i zmniejsza pole elektryczne  $\epsilon_r$  razy

prawo Gaussa (dla kondensatora z dielektrykiem)  $\oint \epsilon_r \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$



# Kondensatory – połączenie równoległe



Przy połączeniu równoległym równoległego różnica potencjałów między okładkami wszystkich kondensatorów jest taka sama (połączone okładki stanowią jeden przewodnik)

$$\Delta V = U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U$$

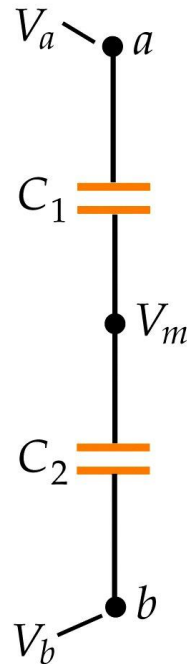
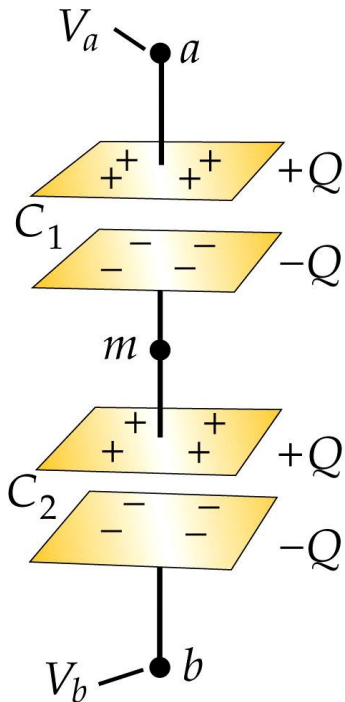
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = C_1 + C_2$$

Pojemność zastępcza kondensatorów równoległych:  $C = C_1 + C_2$





# Kondensatory – połączenie szeregowe



Dla połączenia szeregowego ładunek wprowadzony na okładki zewnętrzne wywołuje równomierny rozkład (rozdzielenie) ładunku pomiędzy okładkami wewnętrznymi

$$Q = \Delta V_1 C_1 = \Delta V_2 C_2$$

$$Q = U_1 C_1 = U_2 C_2$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

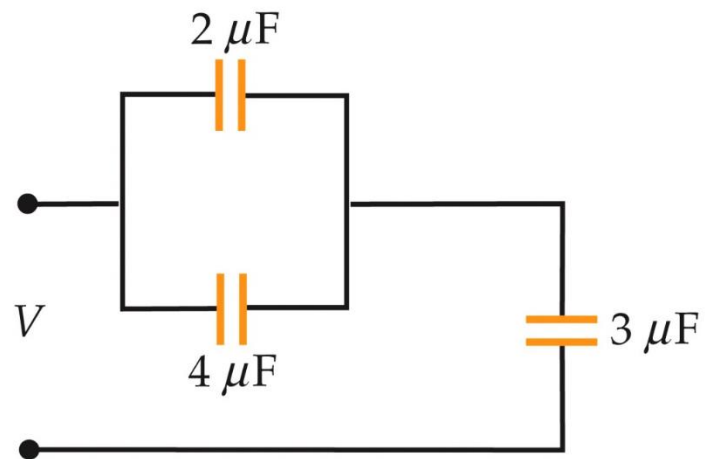
Pojemność zastępcza kondensatorów szeregowych:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

# Zadanie



Znajdź pojemność zastępczą układu kondensatorów przedstawionych na rysunku



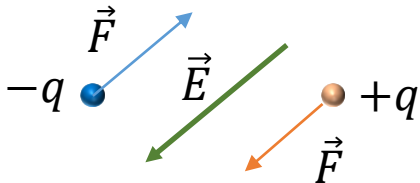


- Elektrostatyka opisuje pola statyczne utworzone przez ładunki elektryczne w spoczynku.
- Pole elektrostatyczne jest zachowawcze (potencjalne). Pole to jest charakteryzowane przez wektor natężenia pola i potencjał.
- Wartość natężenia pola pochodzącego od konkretnych rozkładów ładunku obliczamy bądź z zasady superpozycji i prawa Coulomba bądź z prawa Gaussa.
- Kondensator jest urządzeniem, w którym magazynowana jest potencjalna energia elektrostatyczna. Gęstość energii zmagazynowanej jest proporcjonalna do kwadratu pola  $E$ .
- Prawo Gaussa w postaci całkowej lub różniczkowej stanowi jedno z równań Maxwella.



# Pole i potencjał

Siła działająca na ładunek  $q$  umieszczony w polu elektrycznym:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad [\text{N}]$$


Pole elektryczne jest przeciwne do gradientu potencjału:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad [\text{V/m}]$$

Potencjał to energia potencjalna ładunku w polu elektrycznym, dzielona przez ten ładunek:

$$V = \frac{-\int_{\infty}^R \vec{F} \circ d\vec{r}}{q} = \frac{-\int_{\infty}^R q\vec{E} \circ d\vec{r}}{q} = -\int_{\infty}^R \vec{E} \circ d\vec{r} \quad [\text{V}]$$

Zmiana energia potencjalnej ładunku to napięcie mnożone przez ten ładunek:

$$\Delta E_p = q(V_2 - V_1) = qU \quad [\text{J}] \quad (1 \text{ eV} = 9.6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

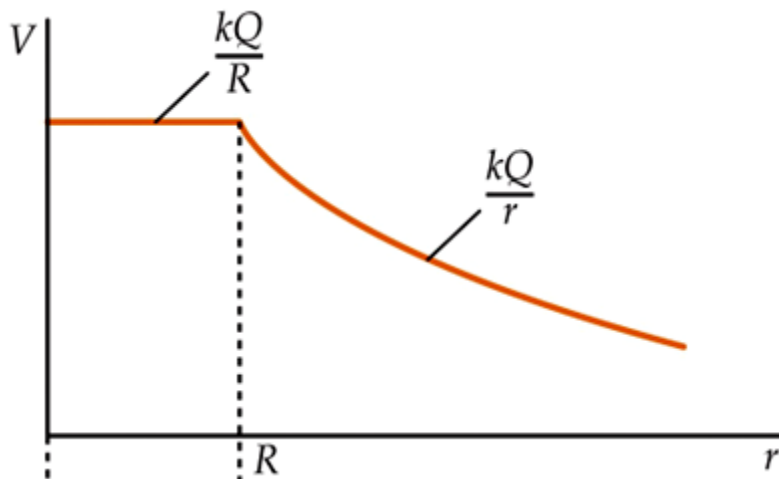
# Energia, potencjał, gradient, równowaga



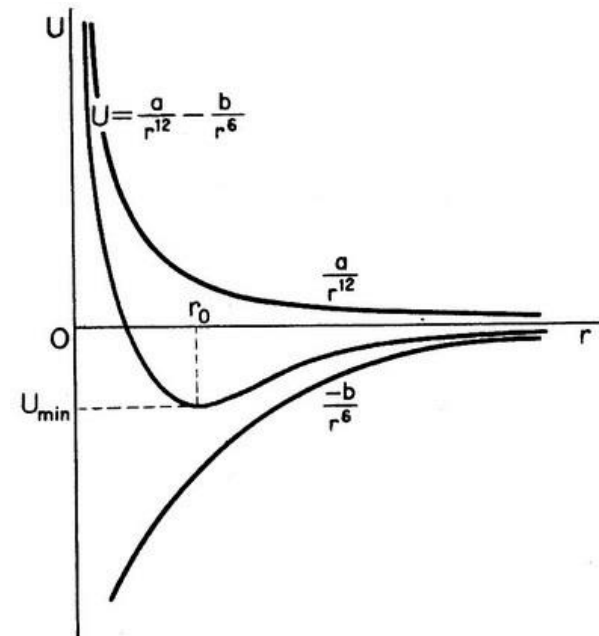
Zależność energii (lub potencjału) od odległości determinuje siły (pola) działające na ciało w danym punkcie przestrzeni.

$$\vec{F} = -\text{grad} E_p$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V$$



Wewnątrz kuli potencjał jest stały:  
pole elektryczne równe zero



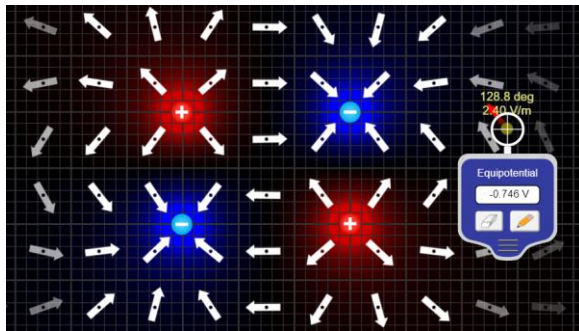
Potencjał Lenarda – Jonesa:  
stan równowagi trwałej dla  $r_0$



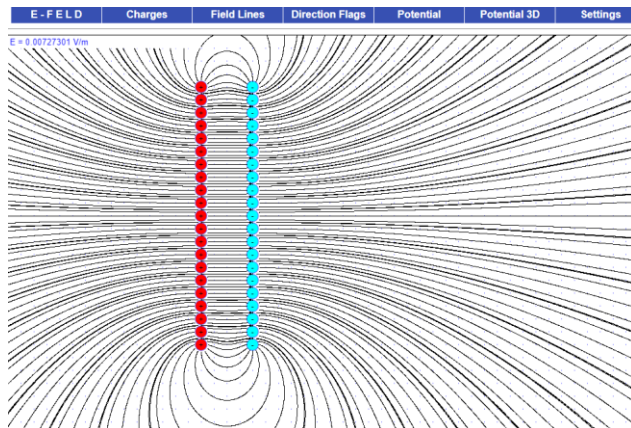
# Superpozycja pól i potencjałów

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

[https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields\\_all.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_all.html)



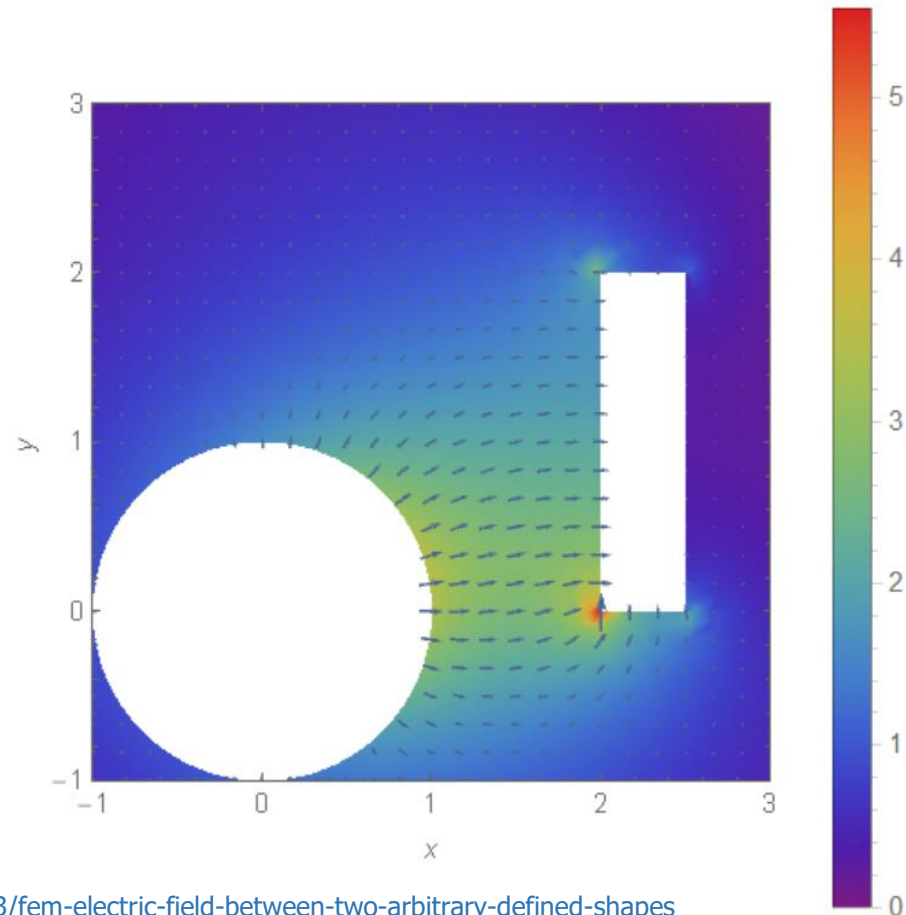
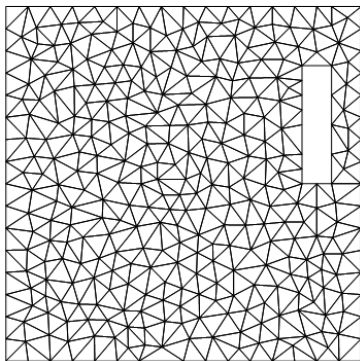
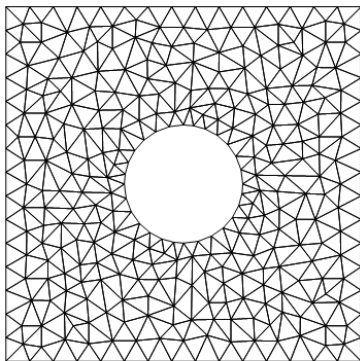
[https://www.didaktikonline.physik.uni-muenchen.de/programme/e\\_feld/E\\_Feld\\_min\\_en.html](https://www.didaktikonline.physik.uni-muenchen.de/programme/e_feld/E_Feld_min_en.html)



# Ciągły rozkładu ładunku na przewodniku



Symulacja pola i potencjału metodą elementów skończonych



<https://mathematica.stackexchange.com/questions/218683/fem-electric-field-between-two-arbitrary-defined-shapes>



- Wektor pola elektrycznego wynika z superpozycji pól elektrycznych od poszczególnych ładunków. Potencjał w danym punkcie jest sumą potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków.
- Pole elektrostatyczne związane jest ze zmianą potencjału.
- Stały potencjał (stała energia potencjalna) oznacza zerowe pole elektryczne (brak siły wypadkowej).
- Kształt zależności potencjału (lub energii potencjalnej) od położenia w przestrzeni determinuje zachowanie się obiektu w tym polu.
- Dla obliczeń numerycznych (FEM, FDM) wygodnie jest używać potencjału (który jest skalarem) i liczyć różnicę potencjałów w celu uzyskania wektora pola (lub siły).