

# Pole magnetyczne

Dr hab. Maciej Czapkiewicz

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

[czapkiew@agh.edu.pl](mailto:czapkiew@agh.edu.pl)

<http://layer.uci.agh.edu.pl/M.Czapkiewicz/dydaktyka>

# Magnetyzm



800 lat p.n.e., Grecy: magnetyt  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  przyciąga żelazo

1269, Pierre de Maricourt: wir pola magnetycznego, bieguny

~1300, kompas (busola) w Europie, wcześniej w Chinach

1600, William Gilbert: Ziemia jest magnesem

1819, Hans Christian Ørsted: prąd kręci igłą kompasu

1827, André-Marie Ampère: prawa elektromagnetyzmu

M. Faraday i J. Henry: indukcja magnetyczna

1856, James Clerk Maxwell: polowy opis elektromagnetyzmu

1887, Heinrich Hertz: fale radiowe

1897, Joseph John Thomson: pole B działa na elektrony

1892, Hendrik Lorentz:  $c = \text{const}$

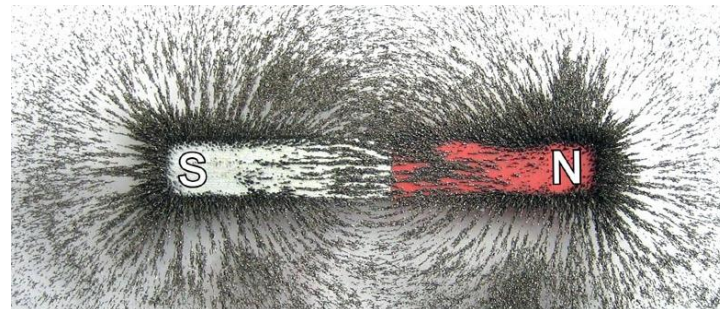
1905, Albert Einstein: unifikacja pola E i B



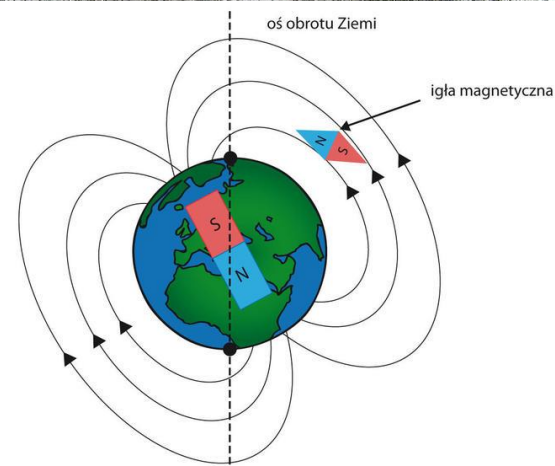
# Pole magnetyczne jest polem wirowym



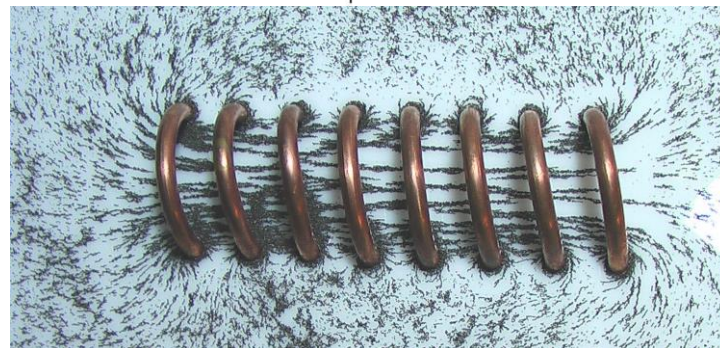
➤ Magnes trwały



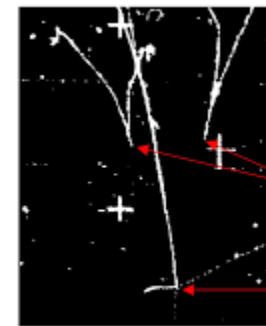
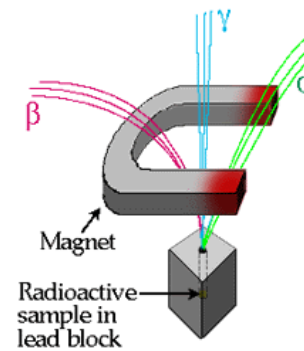
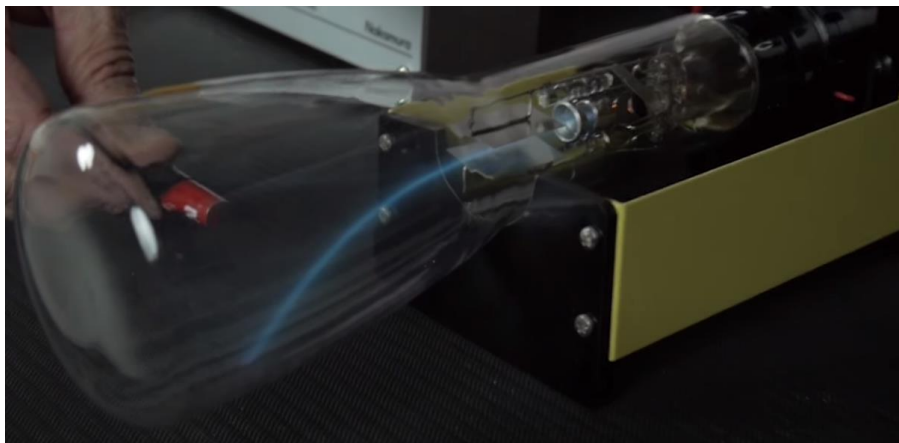
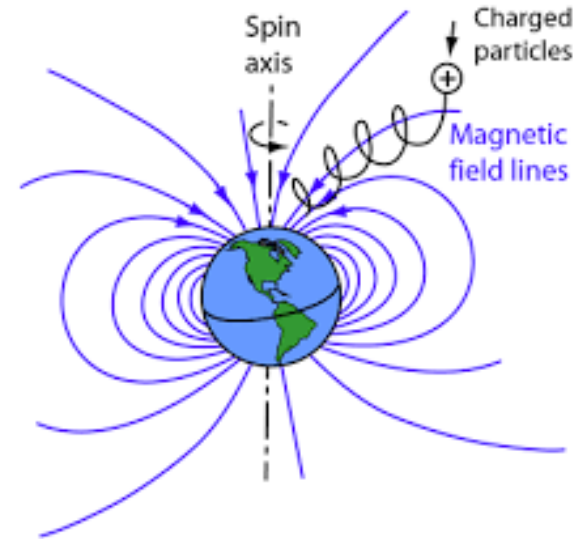
➤ Ziemia to magnes



➤ Cewka



# Pole magnetyczne działa na ładunki



kreacja pary elektron - pozyton

punkt zderzenia wysokoenergetycznej cząstki z jądrem atomowym

<https://www.youtube.com/watch?v=RqSode4HZrE>



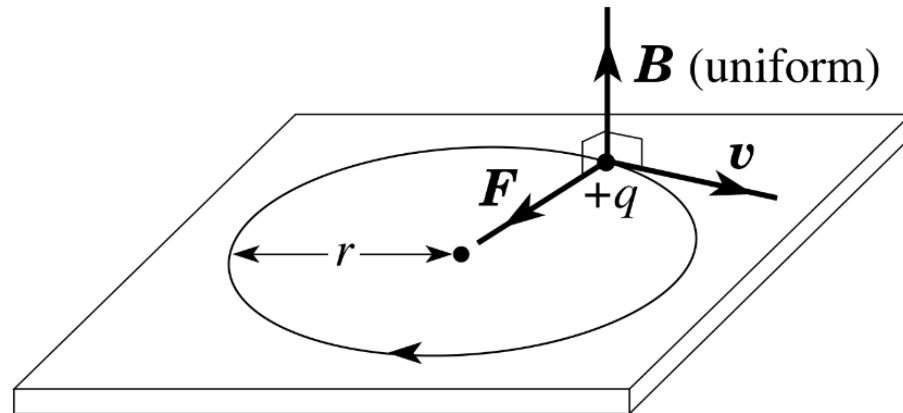
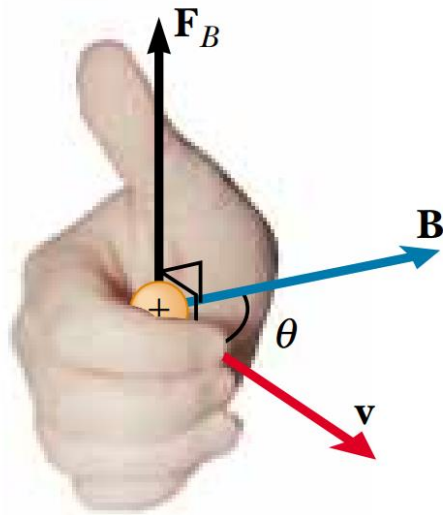
# Siła Lorentza

Na poruszający się w polu magnetycznym ładunek  $q$  działa siła:

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ [N]}$$

Indukcja pola magnetycznego  $\mathbf{B}$

$$\left[ \text{T} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$$



Siła Lorentza jest prostopadła do prędkości (bo iloczyn wektorowy)

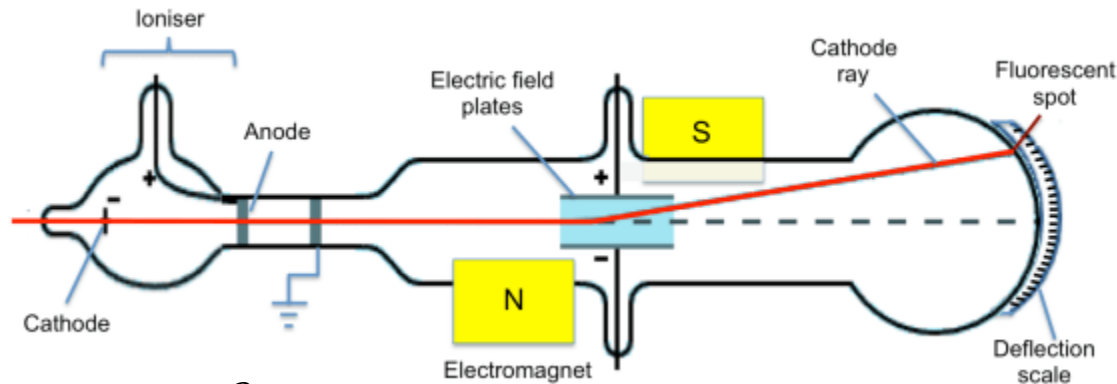


# Doświadczenie J.J. Thomsona



Skrzyżowane pola **E** i **B** działają w tym samym kierunku

$$\mathbf{F}_w = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$



$$eU = \frac{mv^2}{2}$$

więc

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Pole **E** i **B** takie, aby elektrony leciały prosto:

$$e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - e\mathbf{E} = 0$$

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2UB} = 17.56 \cdot 10^{10} \left[ \frac{\text{C}}{\text{kg}} \right]$$

# Zastosowania siły Lorentza



## Spektrometr masowy

Rozpędzamy cząstki w polu E:

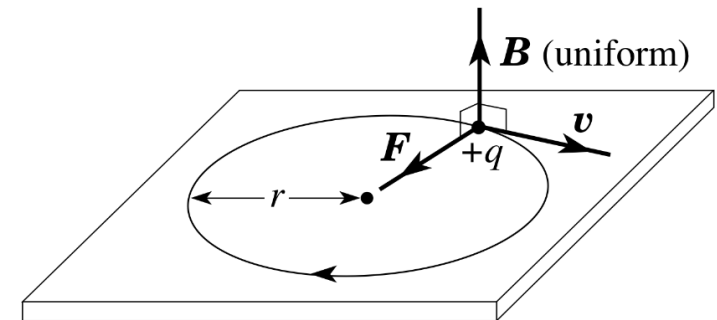
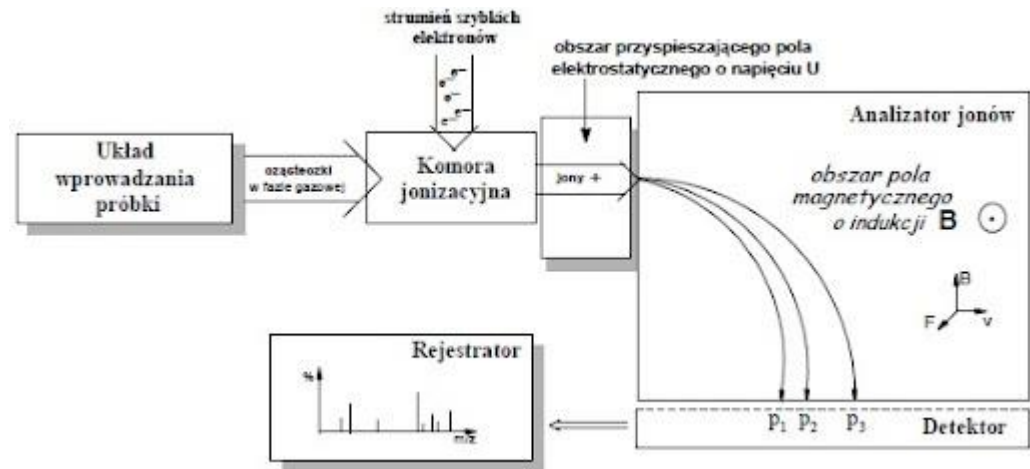
$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Siła Lorentza to siła odśrodkowa

$$\frac{mv^2}{r} = q \cdot v \cdot B$$

$$r = \sqrt{\frac{m \cdot 2U}{q \cdot B^2}}$$

Można odróżnić jony o różnym  $m/q$





# Zastosowania siły Lorentza

**Cyklotron:** wielokrotne rozpędzanie cząstki

Siła Lorentza to siła odśrodkowa

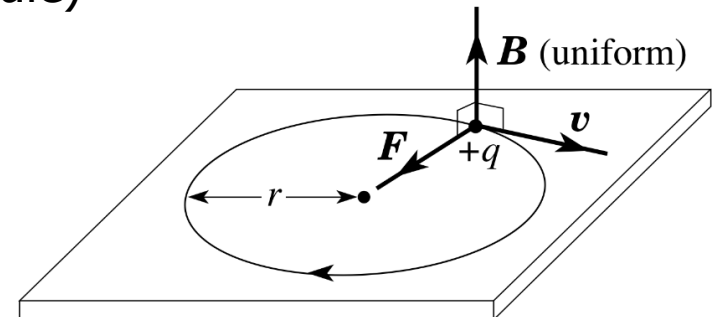
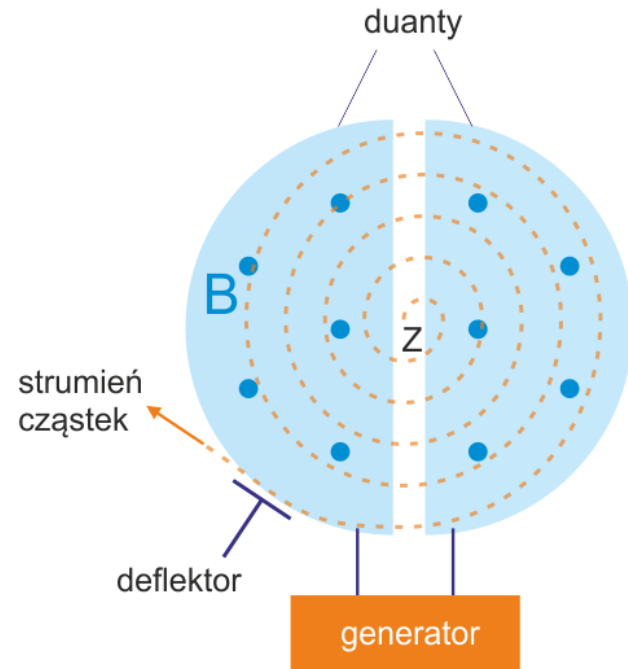
$$\frac{mv^2}{r} = q \cdot v \cdot B$$

Stąd częstość cyklotronowa

$$\frac{v}{r} = \omega = \frac{q \cdot B}{m}$$

Zależy od  $q/m$ , a nie od prędkości (jeśli  $m$  stałe)

Dla dużych prędkości: cyklosynchrotron

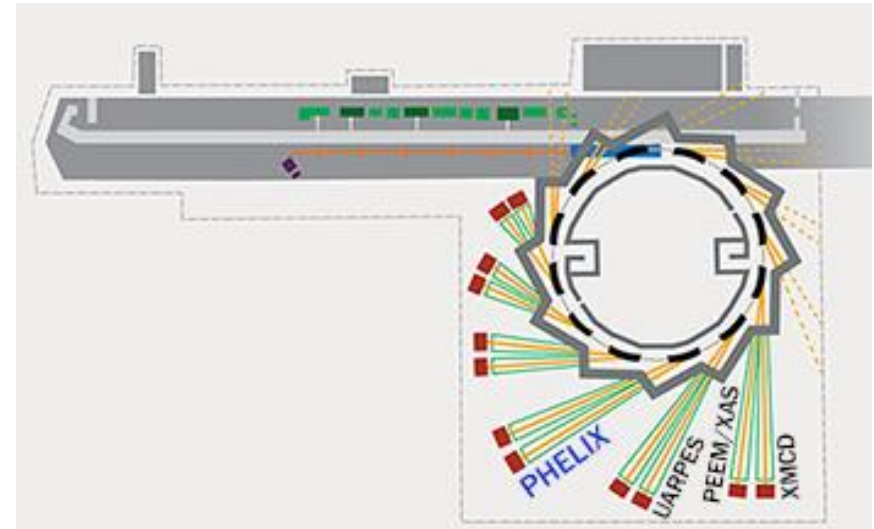




# Zastosowania siły Lorentza

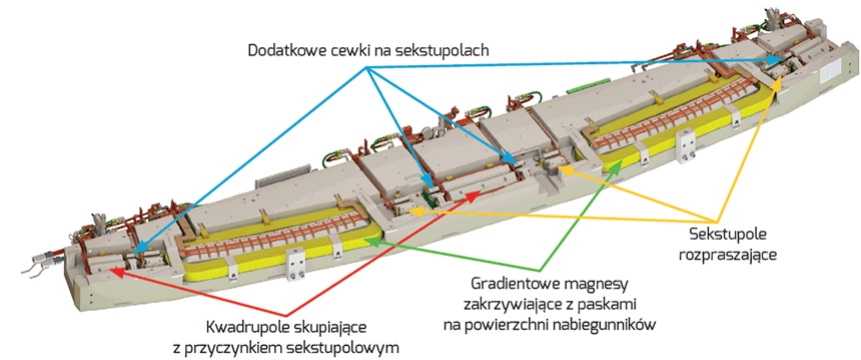
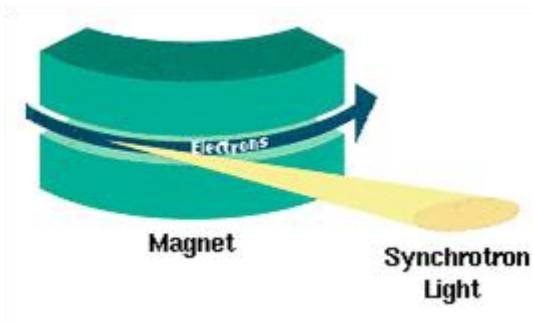


## Synchrotron Solaris, Kraków



Akcelerator liniowy:  $E = 0.55 \text{ GeV}$

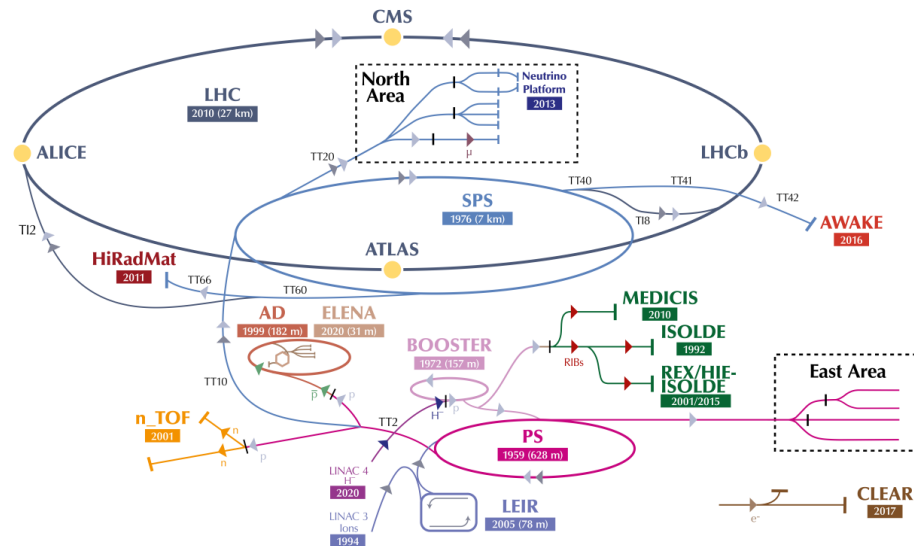
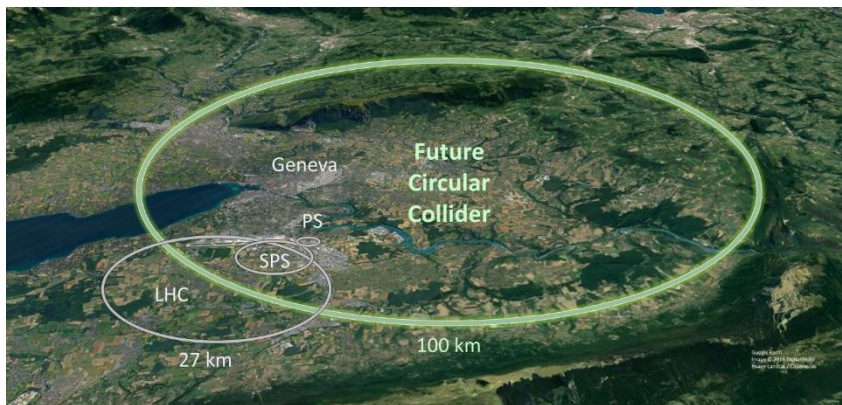
Akcelerator kołowy:  $E = 1.5 \text{ GeV}$



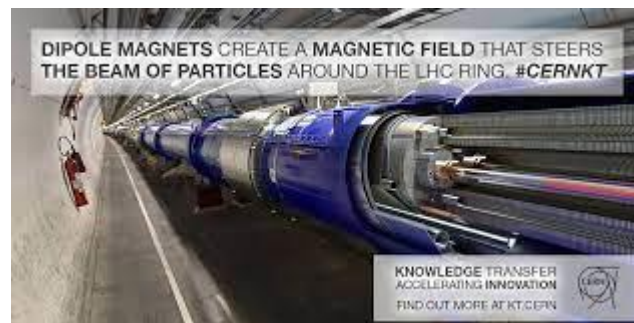
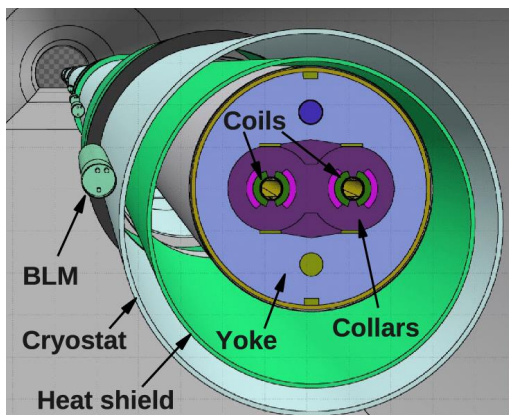
# Zastosowania siły Lorentza



## LHC, Genewa



$E = 7 \text{ TeV /proton}$

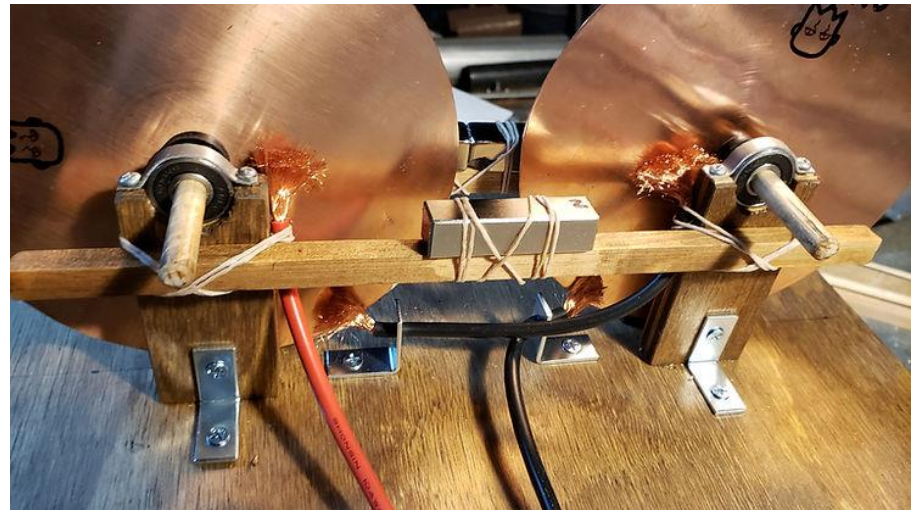
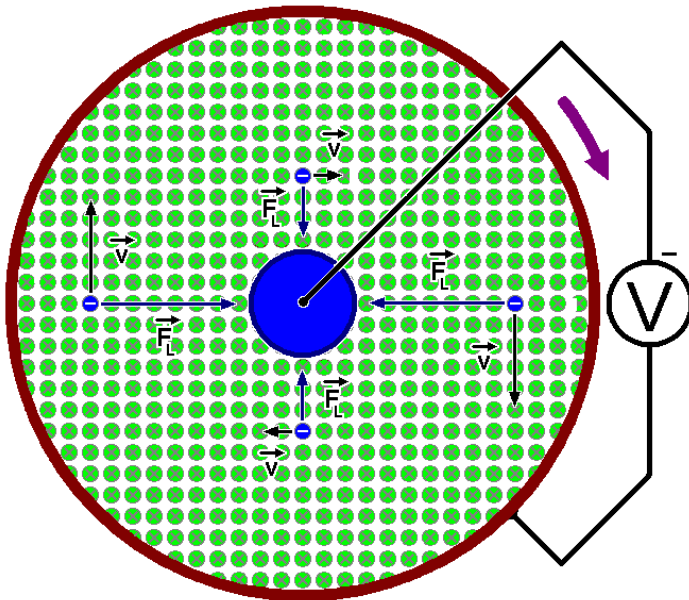


# Zastosowania siły Lorentza



## Generator homopolarny Faradaya

Wirujący dysk miedziany w polu magnetycznym generuje stałe napięcie



Qniemiec - CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=105392740>



# Zastosowania siły Lorentza

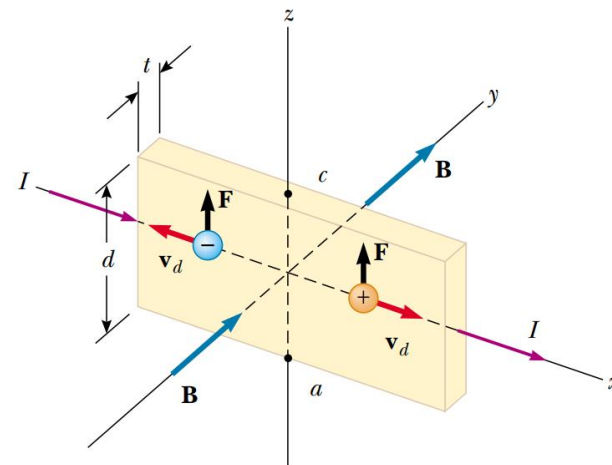
## Efekt Halla

Powstawanie poprzecznego napięcia

Pod wpływem pola magnetycznego

Działającego na płytkę przewodnika

lub półprzewodnika



$$e\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_y - e\mathbf{E}_z = 0$$

$$E_z = B_y \cdot v_d = U_H/d$$

Prędkość unoszenia  $v_d = \frac{j}{n \cdot e} = \frac{J}{n \cdot e \cdot d \cdot t}$

Napięcie Halla proporcjonalne do składowej prostopadłej indukcji  $\mathbf{B}$

$$U_H = \frac{J}{n \cdot e \cdot t} B_y = R_H \frac{J}{t} B_y$$





# Zastosowania siły Lorentza

## Efekt Halla

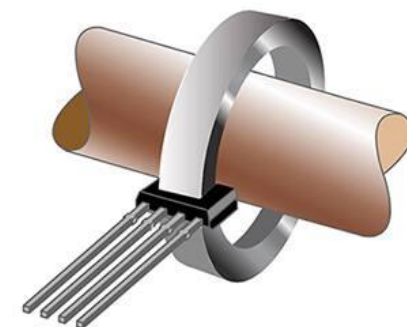
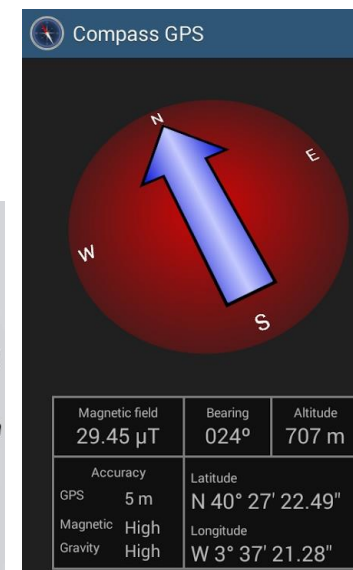
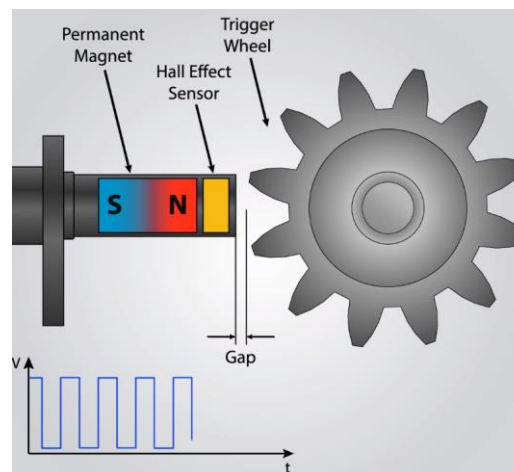
Stała Halla odwrotnie proporcjonalna do gęstości ładunków.

Hallotrony zbudowane są zazwyczaj z półprzewodników.

$$R_H = \frac{1}{n \cdot e} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \right]$$

## Zastosowania hallotronów:

- Pomiar pola magnetycznego
- Bezkontaktowa detekcja pola magnetycznego
- Bezkontaktowy pomiar prądu, w tym prądu stałego

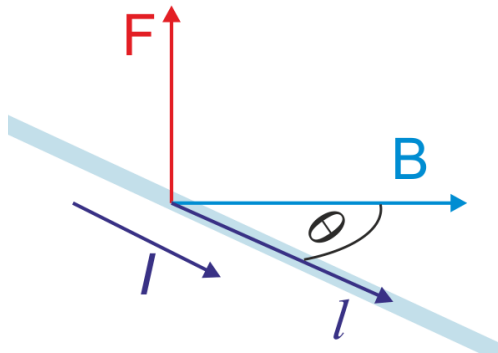




# Zastosowania siły Lorentza

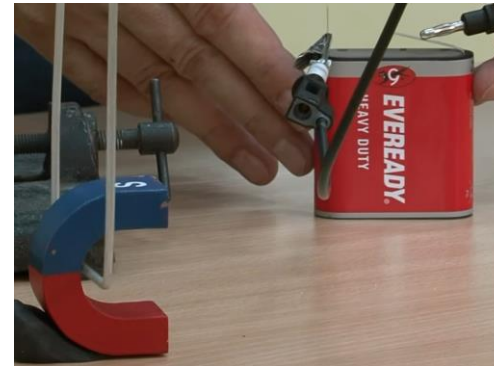
## Siła elektrodynamiczna

Siła działająca na przewodnik z prądem.



$$J = n \cdot e \cdot \bar{v} \cdot S = q \frac{q}{S \cdot l} \cdot \bar{v} \cdot S$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = J(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$



<https://youtu.be/w6-lrGZbArw?t=39>

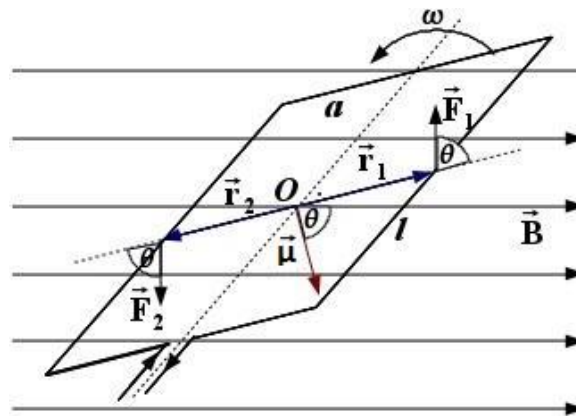




# Siła elektrodynamiczna

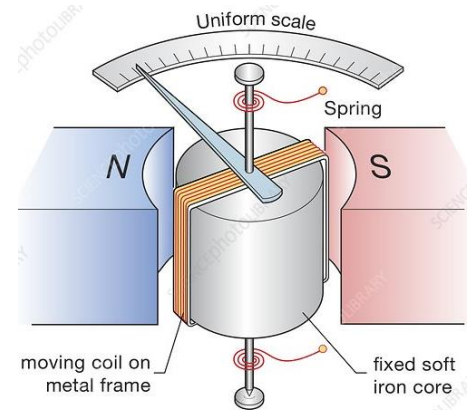
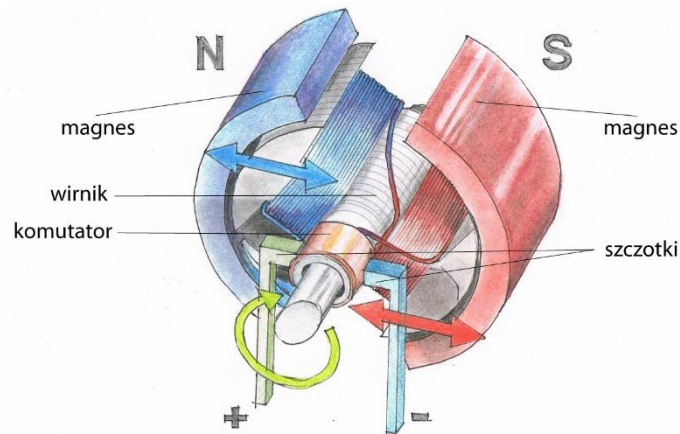
Na ramkę z drutu, w którym płynie prąd, działa moment siły:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (J\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = J\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$



Magnetyczny moment dipolowy [Am<sup>2</sup>]

**Zamiana energii  
elektrycznej  
w siłę mechaniczną**





# Skąd się bierze pole magnetyczne?

- Prąd elektryczny
- Ferromagnetyzm

## Właściwości magnetyczne materii...

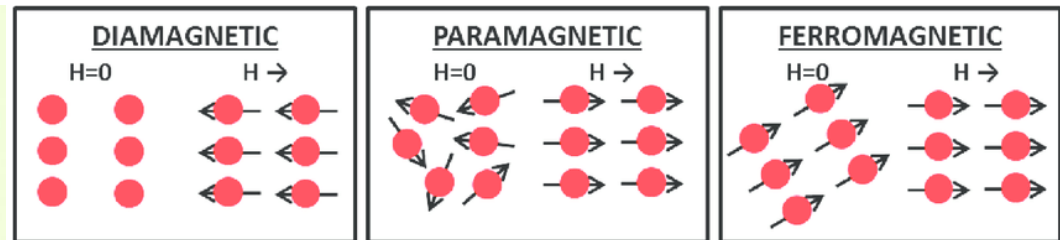
Elektron posiada moment dipolowy związany z jego skwantowanym spinem:

$$\mu_s = \frac{e}{m_e} S$$

**Paramagnetic vs Diamagnetic**

Paramagnetic	Diamagnetic
<i>s orbital</i>	<i>s orbital</i>
<i>p orbital</i>	<i>p orbital</i>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Unpaired electrons</li><li>• Attracted to a magnetic field</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Paired electrons</li><li>• Repelled by a magnetic field</li></ul>

All materials are diamagnetic, but in atoms with unpaired electrons, paramagnetism overcomes diamagnetism. sciencenotes.org



Ferromagnetyk może posiadać niezerowy moment magnetyczny bez pola (magnes trwały)

# Skąd się bierze pole magnetyczne?



## ➤ Prawo Biota-Savarta

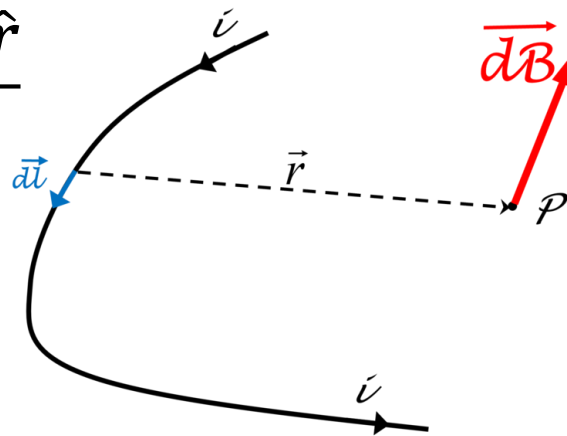
Poruszający się ładunek wytwarza pole magnetyczne

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$



Ale ruch ładunku to prąd. Przyczynek do pola magnetycznego wytwarzanego przez fragment przewodnika, przez który płynie prąd  $J$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$



Luis Goitandia Wikimedia commons

Przenikalność magnetyczna próżni:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right] = 12.566... 10^{-7} \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right]$$



# Prawo Biota-Savarta, przykład

- Pole generowane przez prąd w pętli przewodnika, w osi pętli

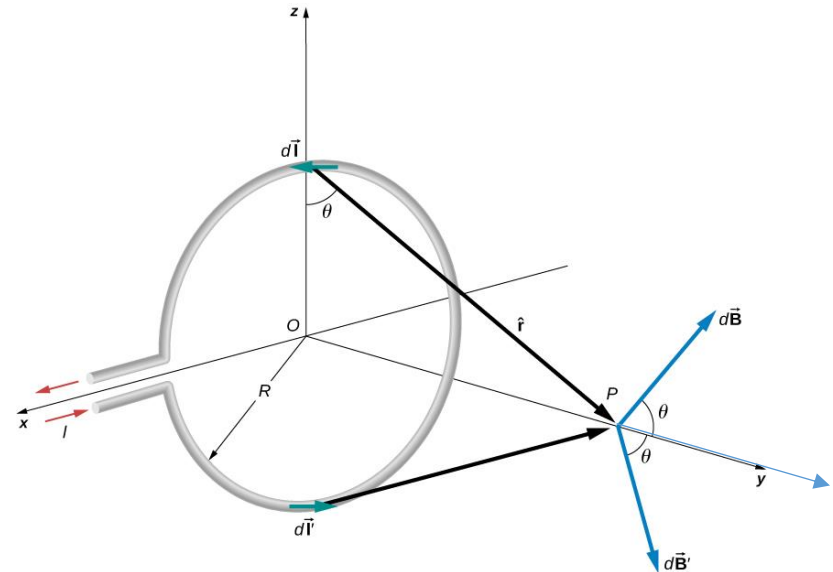
$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{dl \cdot \mathbf{1}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J}{R^2 + y^2} dl$$

$$dB_y = dB \cdot \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} dB$$

$$B_y = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{RJ}{\sqrt{R^2 + y^2}^3} dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + y^2}^3} J$$

Dla bardzo odległych  $y$ :  $B_y \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{y^3} J = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{y^3}$



Magnetyczny moment dipolowy



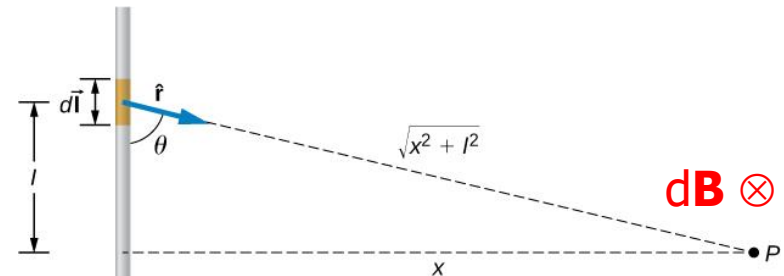
# Prawo Biota-Savarta, przykład

➤ Pole generowane przez prąd w prostym długim przewodniku

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{-dl \cdot \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{x}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi x} J \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \cdot d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi x} J (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



$$\text{ctg}\theta = l/x \quad l = x \text{ctg}\theta$$

$$dl = -\frac{x}{\sin^2\theta} d\theta = -\frac{r^2 d\theta}{x}$$

$$\sin\theta = x/r$$

Dla nieskończonego przewodnika całkujemy od 0 do  $\pi$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi x} J$$



# Oddziaływanie dwóch przewodników



Dwa równoległe przewodniki w odległości  $a$

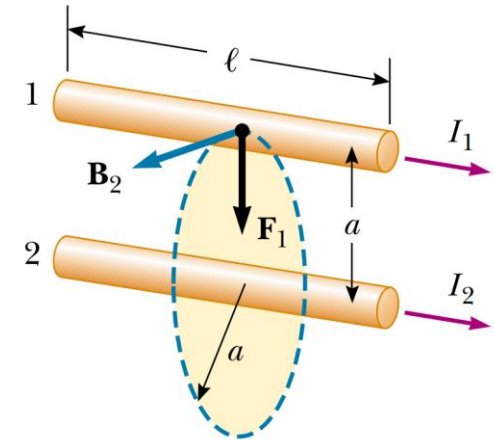
Pole generowane przez przewodnik 2:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} J_2$$

Siła działająca na przewodnik 1:

$$F_1 = J_1 l B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{a} J_1 J_2$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right]$$



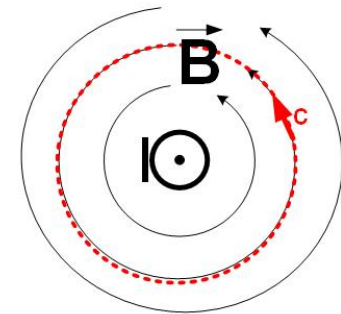
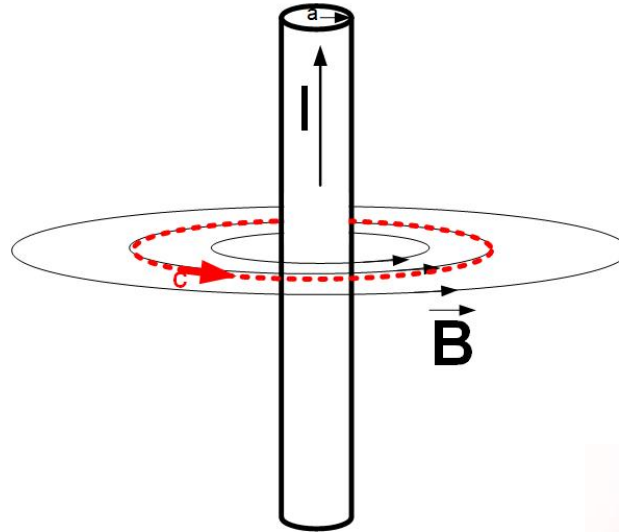
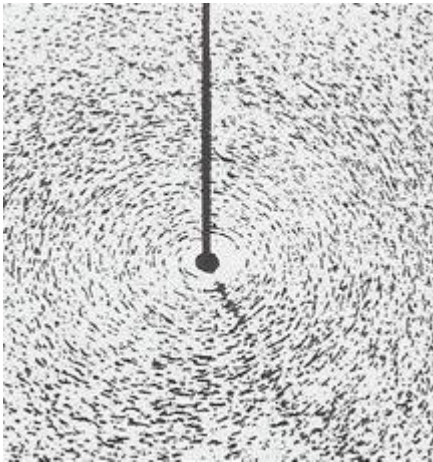
Definicja 1 Ampera (do 2019): prąd płynący przez druty odległe od 1 m, wytwarzający siłę  $2 \cdot 10^{-7}$  N na każdy metr bieżący długości drutów.



# Prawo Ampera



Pole magnetyczne wokół przewodnika (i nie tylko) jest polem wirowym



$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 J$$



Krażenie pola magnetycznego po **dowolnym** zamkniętym konturze jest proporcjonalne do prądów przechodzących przez płaszczyznę tego konturu



# Prawo Ampera – zastosowania

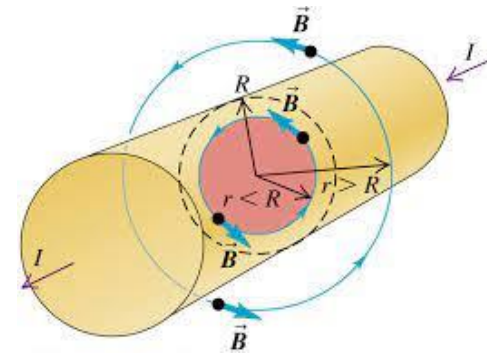
Jakie jest pole magnetyczne wokół długiego przewodnika?

dla  $r > R$  całka po konturze:

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r$$

ale z prawa Ampera:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 J \quad \text{więc} \quad B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \quad \text{to samo co z Biota-Savarta}$$



Zadanie domowe: policzyć indukcję pola magnetycznego  $B$  wewnątrz przewodnika, czyli  $r < R$ , założyć stałą gęstość prądu (prąd stały)

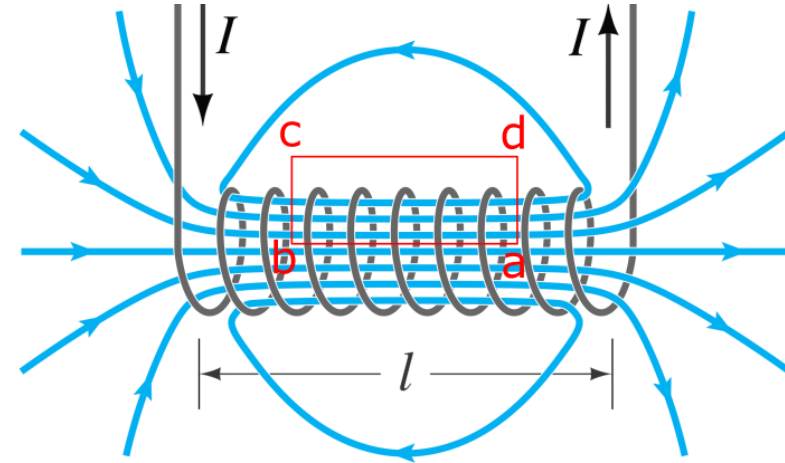


# Prawo Ampera – zastosowania

Jakie jest pole magnetyczne wewnątrz cewki o długości  $L$  i ilości zwojów  $N$ ?



Pole na zewnątrz cewki jest bardzo słabe, wewnątrz silne i prawie jednorodne



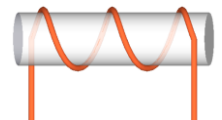
$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \int_a^b B dl + \int_b^c 0 + \int_c^d \sim 0 dl + \int_d^a 0 = Bl_{ab}$$

Ile zwojów na długości a-b?  $n = l_{ab} N / L$

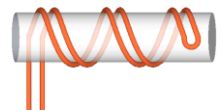
Z prawa Ampera:

$$Bl_{ab} = \mu_0 J \cdot l_{ab} N / L \quad \text{więc} \quad B = J \mu_0 N / L$$

cewka:



nie cewka:





# Pole magnetyczne nie w próżni

---

Pole magnetyczne  $\mathbf{H}$  [A/m]

W próżni indukcja pola magnetycznego:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

W materii, pod wpływem pola magnetycznego tworzą się i porządkują dipole, dające efektywne wewnętrzne pole  $\mathbf{M}$

W materiałach o magnetyzacji  $\mathbf{M}$  indukcja pola magnetycznego:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

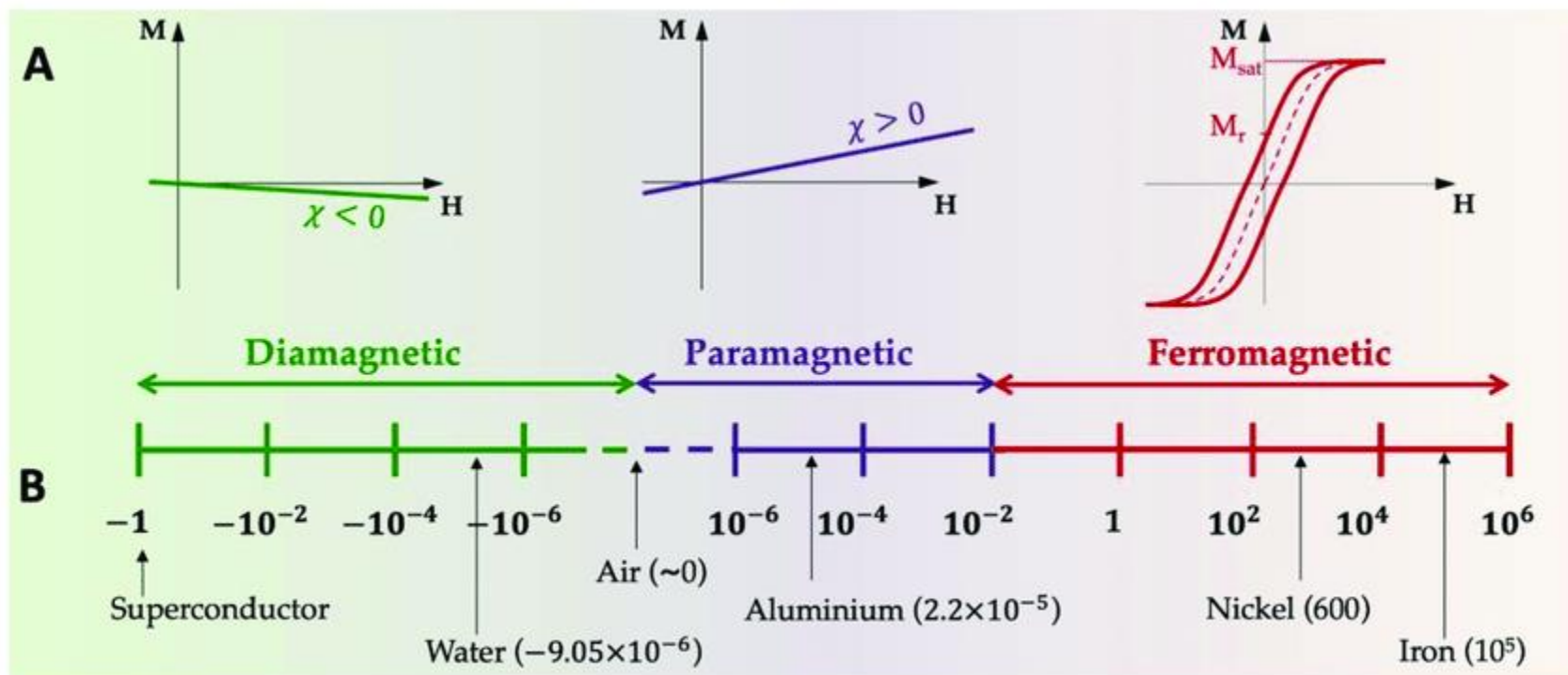
Względna przenikalność magnetyczna:

- niewiele mniejsza niż 1 dla diamagnetyków
- niewiele większa niż 1 dla paramagnetyków
- bardzo duża (rzędu 1000) dla ferromagnetyków

# Magnetyzacja

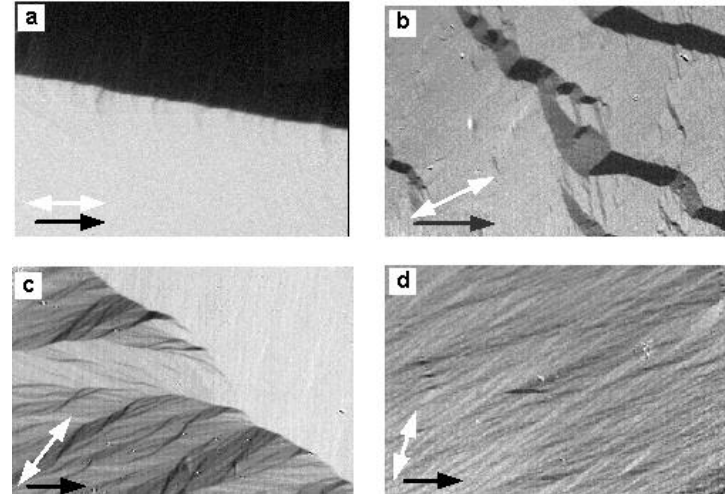
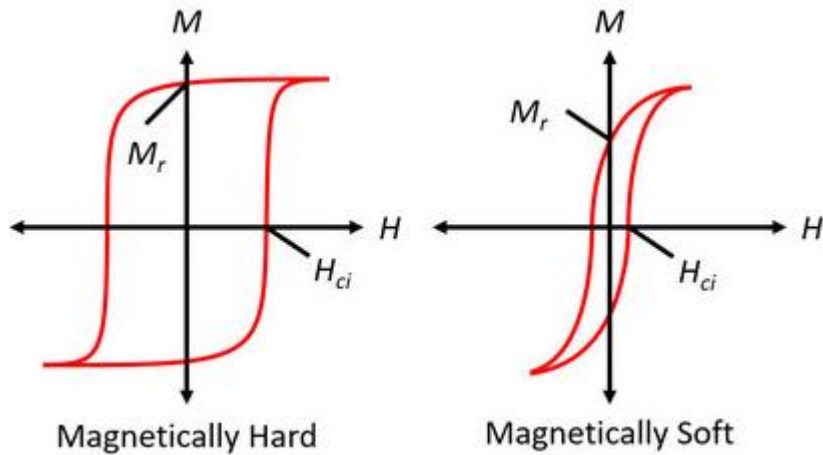


Podatność materiału na pole magnetyczne: zależność  $M(H)$



CC BY 4.0, Marie Frenea-Robin, DOI:10.3390/magnetochemistry8010011

# Krzywa namagnesowania ferromagnetyka



$$\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = \frac{E}{V} \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

Pole wewnątrz pętli histerezy to gęstość strat energii w procesie przemagnesowania

Ferromagnetyki twarde: magnesy trwałe. Ferromagnetyki miękkie: rdzenie cewek/trafo



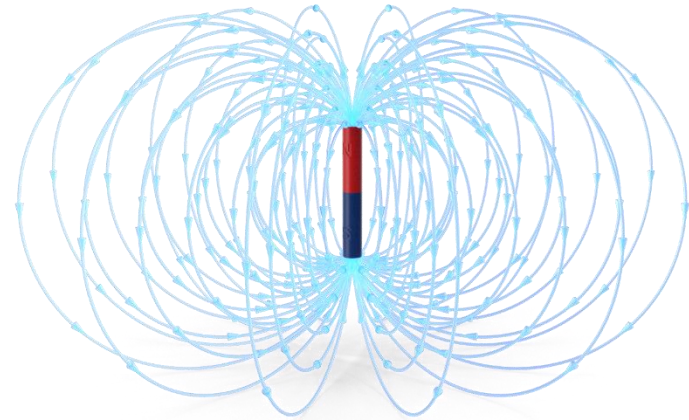


- Pole magnetyczne jest bezźródłowe

$$\oint_S \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = 0$$

- Pole magnetyczne jest wirowe

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 J$$



- Pole magnetyczne działa siłą na poruszające się ładunki

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Poruszające się ładunki wytwarzają pole magnetyczne

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$