

# Wektory

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>

# Wielkości fizyczne

---



## Wielkości skalarne:

długość

siła

prędkość

przemieszczenie

strumień pola magnetycznego

## Wielkości wektorowe:

przyspieszenie

pęd

masa

praca

temperatura

natężenie pola elektrycznego

czas

# Pojęcie wektora



## Cechy wektora:

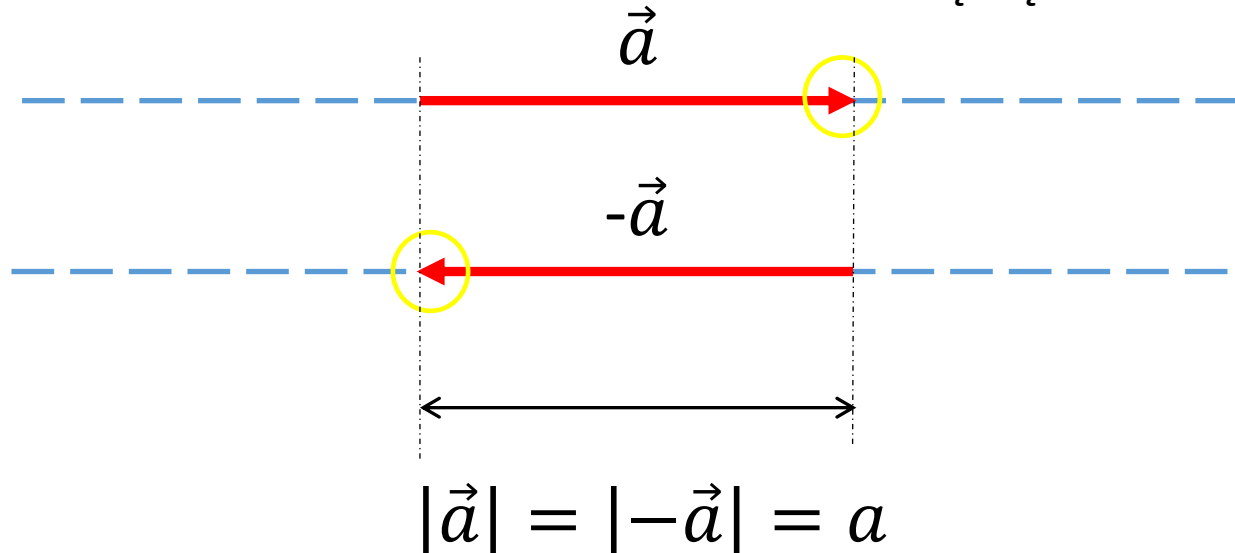
- kierunek
- zwrot
- wartość (długość)

## Zapis

wektor:  $\vec{a}$ ,  $\mathbf{a}$

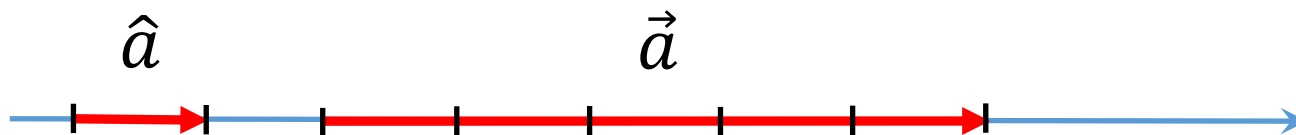
wartość:  $|\vec{a}|$ ,  $a$

wektory w druku wyróżnione są często **czcionką pogrubioną**





# Długość wektora, wersor

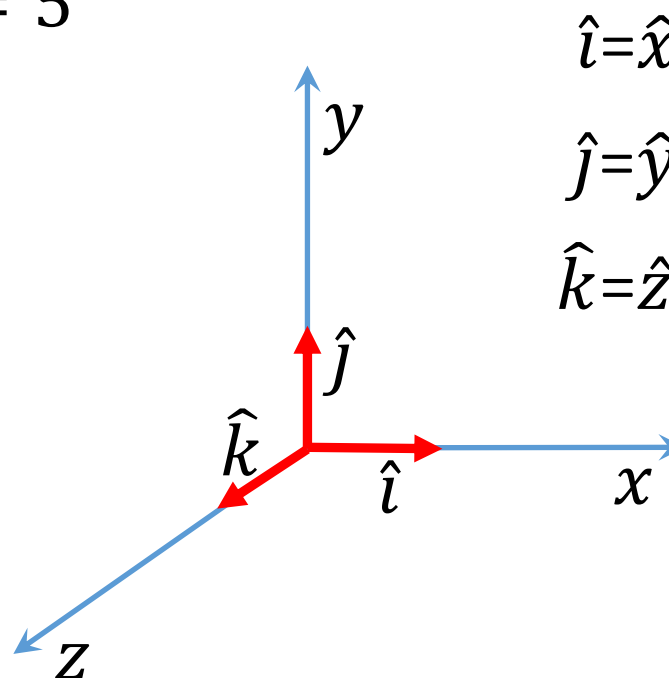


$$\vec{a} = 5\hat{a}$$

$$|\vec{a}| = 5|\hat{a}| = 5$$

Wersor to wektor  
jednostkowy:

$$|\hat{a}| = 1$$





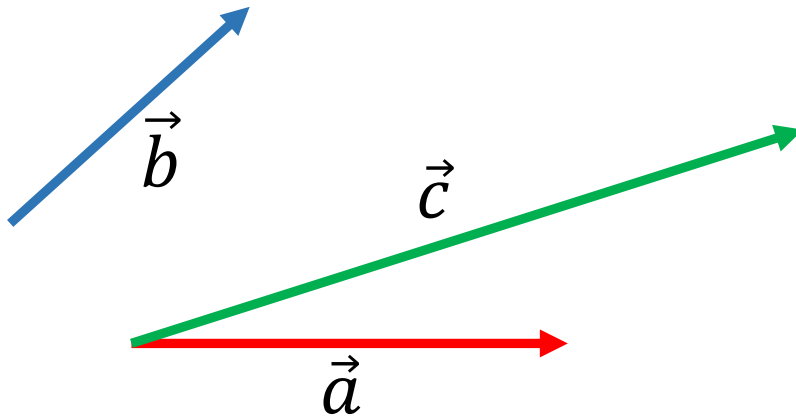
# Działania na wektorach

---

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie
  - Iloczyn wektora przez liczbę
  - Iloczyn skalarny dwóch wektorów
  - Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

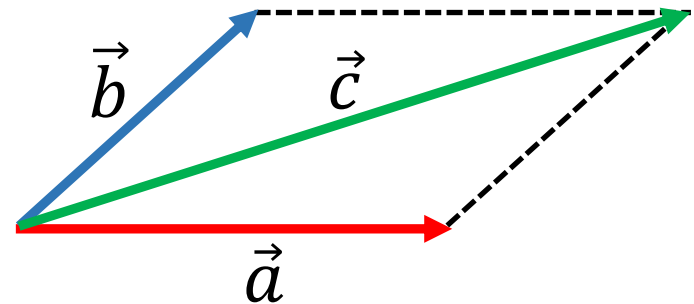
**Nie ma dzielenia wektora przez wektor!**

# Dodawanie wektorów

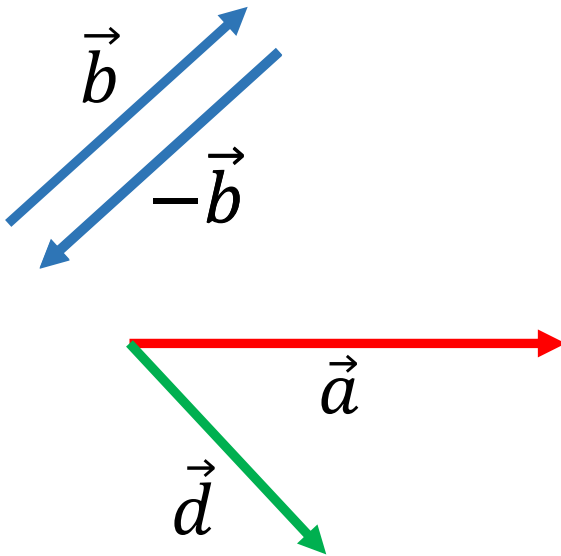


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Reguła równoległoboku

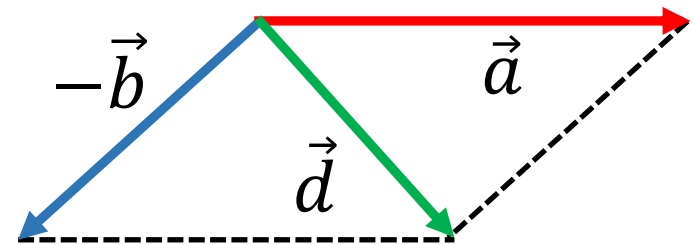


# Odejmowanie wektorów



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$

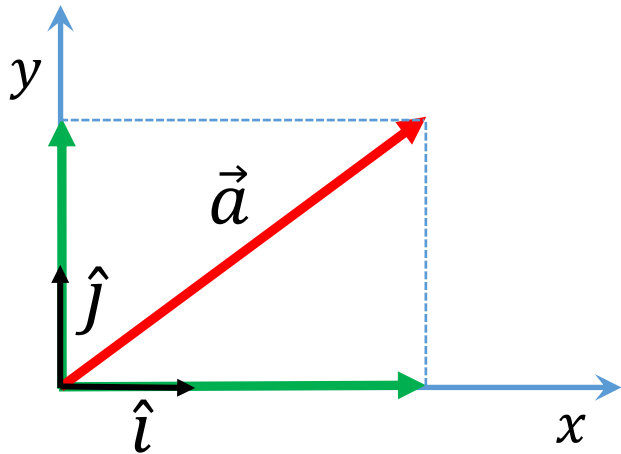
Reguła równoległoboku





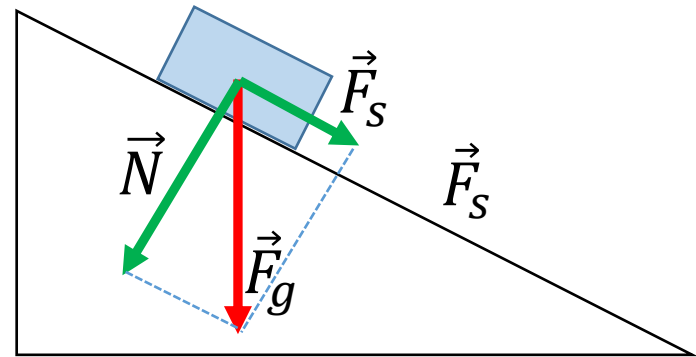
# Rozkład wektora na składowe

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$



Przykład:  
rozkład sił na równi

$$\vec{F}_g = \vec{N} + \vec{F}_s$$



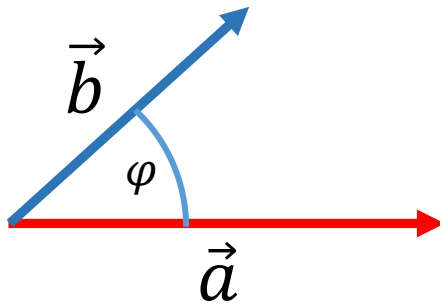
$\vec{F}_g$  – siła grawitacji

$\vec{N}$  – siła nacisku

$\vec{F}_s$  – siła ściągnająca



# Iloczyn skalarny

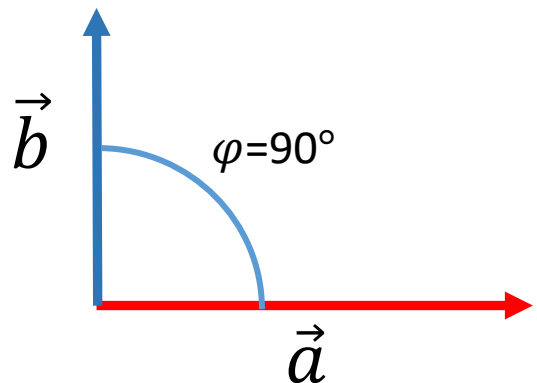


$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

Wynik mnożenia skalarnego wektorów jest liczbą.

Iloczyn skalarny jest przemienny:  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

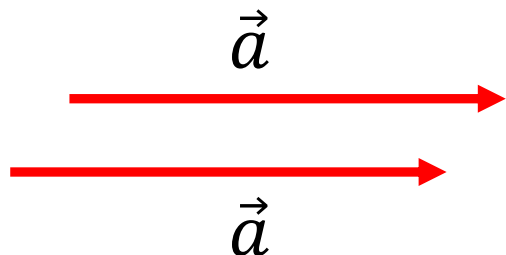
# Iloczyn skalarny



$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(90^\circ) = 0$$

Jeżeli wektory są prostopadłe to ich iloczyn skalarny jest równy 0

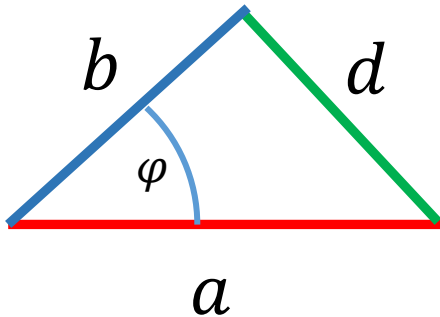
W ten sposób można sprawdzić prostopadłość wektorów



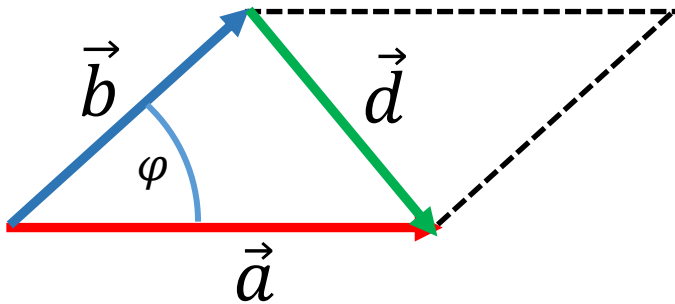
$$\vec{a} \circ \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos(0^\circ) = a \cdot a \cdot 1 = a^2$$

$$a = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

# Twierdzenie cosinusów – iloczyn skalarny



$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$



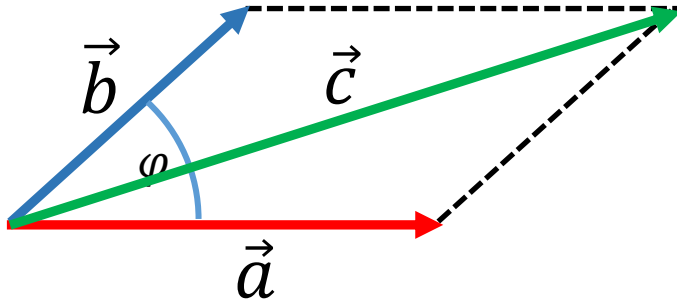
$$\vec{d} \circ \vec{d} = d^2$$

$$\begin{aligned} \vec{d} \circ \vec{d} &= (\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \\ &= \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b} = \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi + b^2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

# Twierdzenie cosinusów – iloczyn skalarny



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

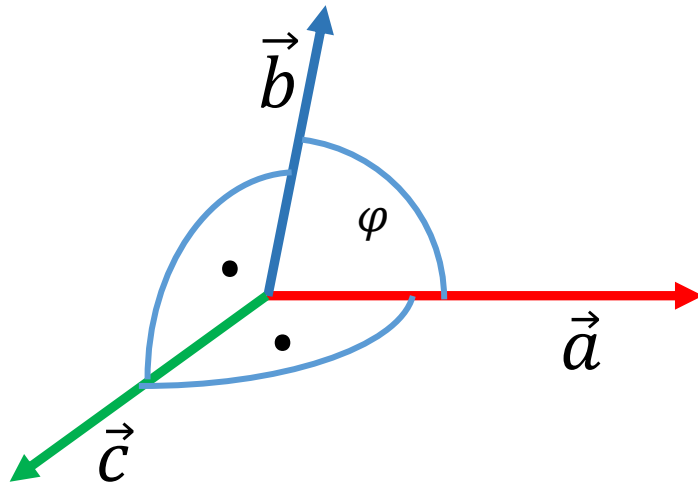
$$\vec{c} \circ \vec{c} = c^2$$

$$\vec{c} \circ \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b} =$$
$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

# Iloczyn wektorowy

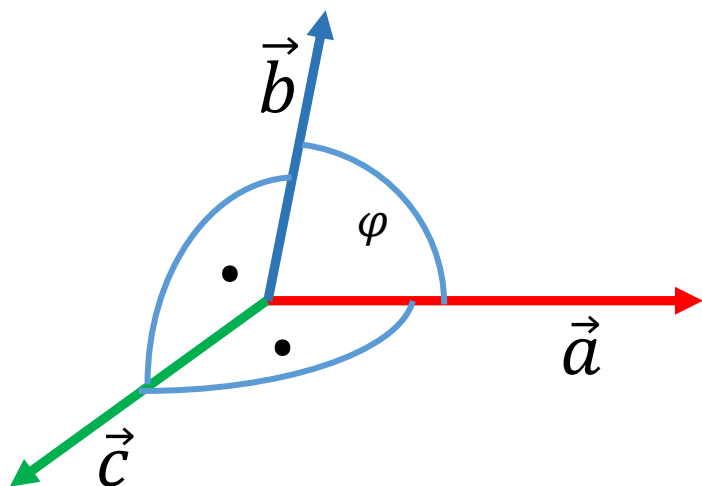


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Wynik działania jest wektorem.

Należy zatem podać nie tylko **wartość** ale również **kierunek** i **zwrot** wektora !!!

# Iloczyn wektorowy – kierunek

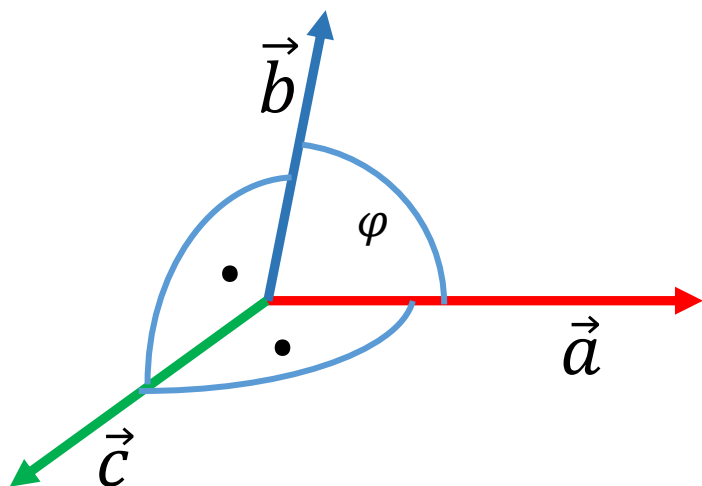


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

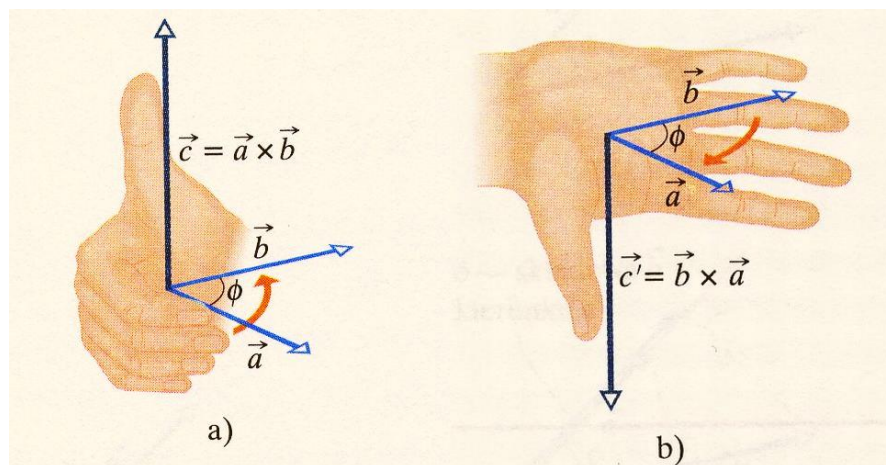
$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{i} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

Kierunek wektora  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

# Iloczyn wektorowy – zwrot

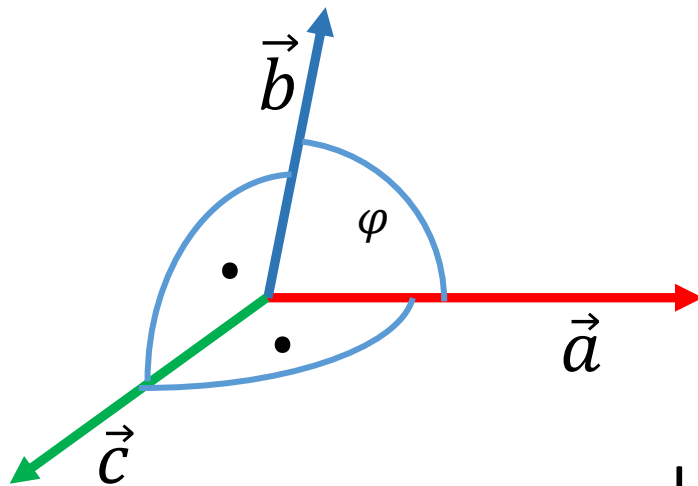


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



Kierunek wektora  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  określa reguła śruby prawoskrętnej lub reguła prawej ręki.

# Iloczyn wektorowy – wartość



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

Długość wektora  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  to liczba.





Rozdzielność iloczynu skalarnego i wektorowego względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} \quad \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$$

Przykład:

Obliczyć wektor  $\vec{C}$  z równania:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{C}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$



# Przykład 1

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{C}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{C}[\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b}] = 0 \quad \text{ale:} \quad \vec{b} \circ \vec{b} = b^2$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{C}[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2] = 0$$

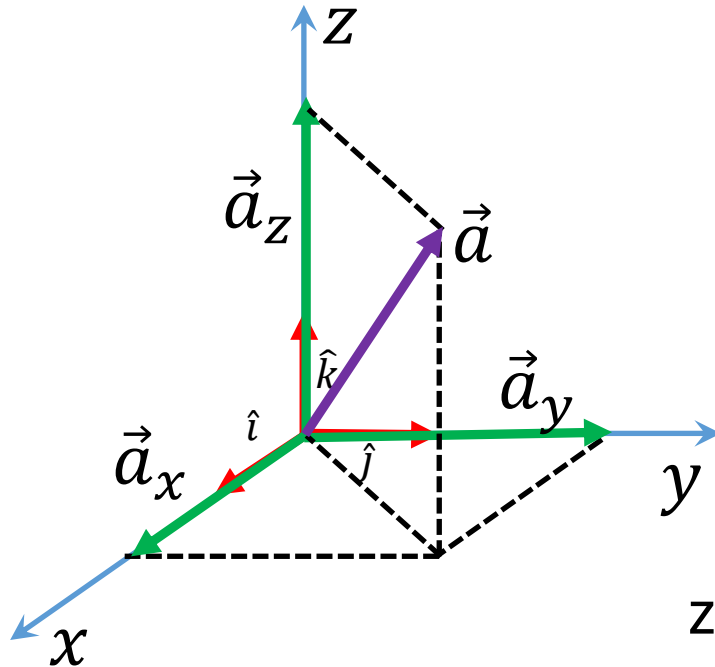
dodając i odejmując stronami:

$$\vec{C}[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2] = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

Można podzielić przez wyrażenie w nawiasie upewniwszy się, że jest liczbą:

$$\vec{C} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2]}$$

# Wektor w układzie kartezjańskim



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

zależności między wersorami:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1$$

# Działania na wektorach w układzie kartezjańskim



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

- Dodawanie

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

- Odejmowanie

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \hat{i} + (a_y - b_y) \hat{j} + (a_z - b_z) \hat{k}$$

- Mnożenie przez liczbę

$$5\vec{a} = 5a_x \hat{i} + 5a_y \hat{j} + 5a_z \hat{k}$$

# Działania na wektorach w układzie kartezyjskim

- Iloczyn skalarny

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \qquad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \circ (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x \hat{i} \circ \hat{i} + \cancel{a_x b_y \hat{i} \circ \hat{j}} + \cancel{a_x b_z \hat{i} \circ \hat{k}} + \\ \cancel{a_y b_x \hat{j} \circ \hat{i}} + a_y b_y \hat{j} \circ \hat{j} + \cancel{a_y b_z \hat{j} \circ \hat{k}} + \\ \cancel{a_z b_x \hat{k} \circ \hat{i}} + \cancel{a_z b_y \hat{k} \circ \hat{j}} + a_z b_z \hat{k} \circ \hat{k} =$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

# Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \cancel{a_x b_x \hat{i} \times \hat{i}} + a_x b_y \hat{i} \times \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \times \hat{k} + \\ a_y b_x \hat{j} \times \hat{i} + \cancel{a_y b_y \hat{j} \times \hat{j}} + a_y b_z \hat{j} \times \hat{k} + \\ a_z b_x \hat{k} \times \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \times \hat{j} + \cancel{a_z b_z \hat{k} \times \hat{k}} =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

# Działania na wektorach w układzie kartezyjskim

- Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

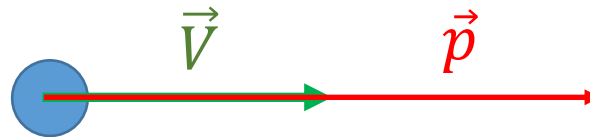
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \hat{i} + a_x b_y \hat{k} + a_z b_x \hat{j} - a_y b_x \hat{k} - a_z b_y \hat{i} - a_x b_z \hat{j}$$

# Rachunek wektorowy w fizyce - przykład



Mnożenie wektora przez liczbę:

Pęd:  $\vec{p} = m\vec{V}$



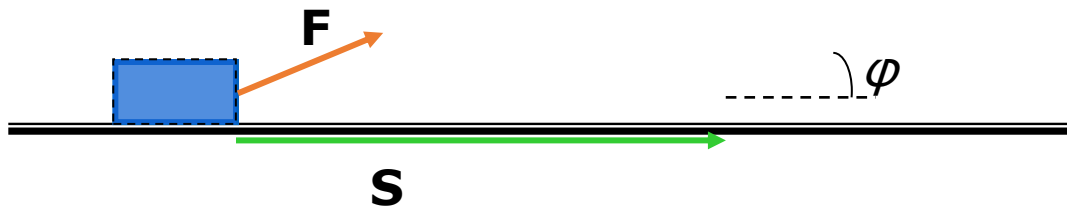
Wektor pędu równoległy do wektora prędkości:  $\vec{p} \parallel \vec{V}$



# Rachunek wektorowy w fizyce - przykład



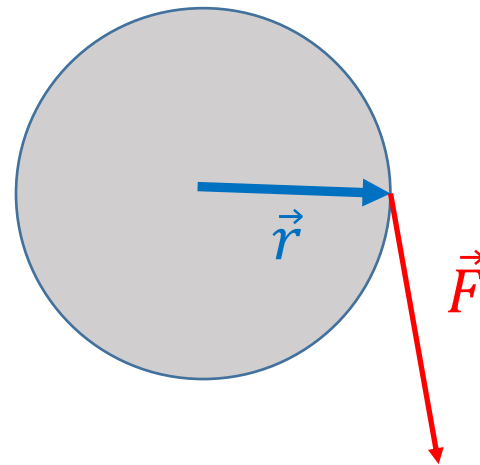
Iloczyn skalarny:



Praca  $W = F \cdot S \cdot \cos\varphi = \vec{F} \circ \vec{S}$

Iloczyn wektorowy:

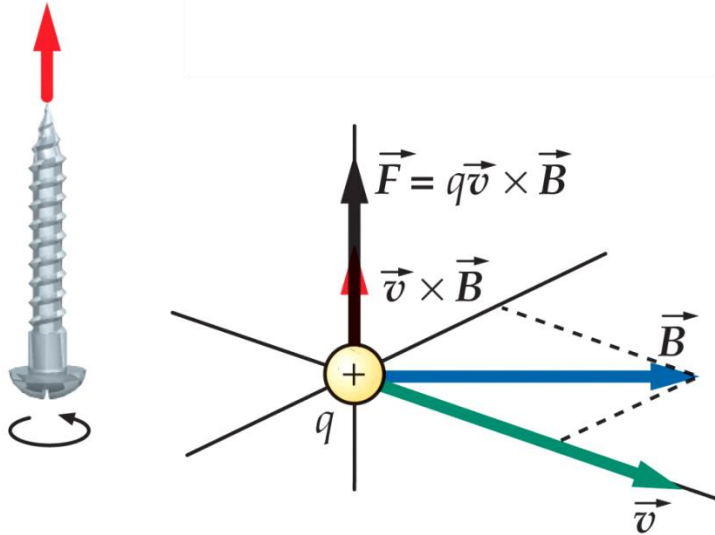
Moment siły  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$





# Rachunek wektorowy w fizyce - przykład

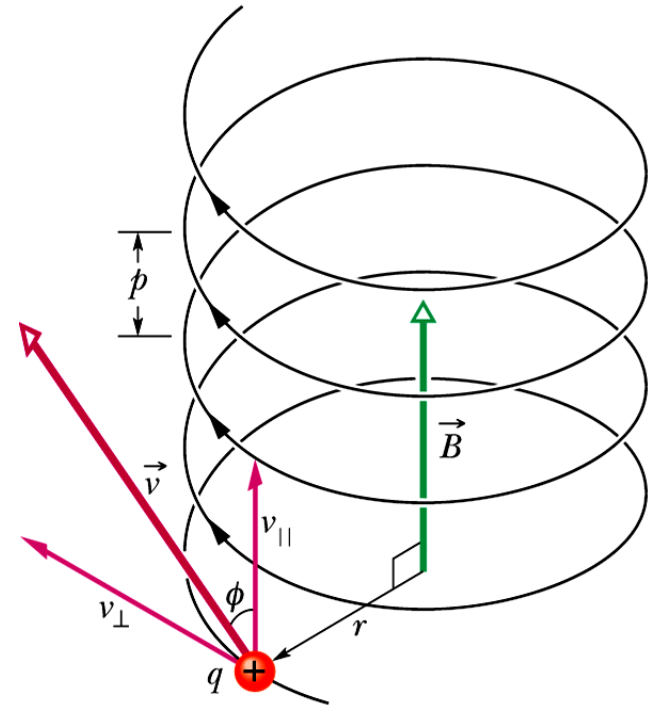
Siła Lorentza – siła działająca na ładunek  $q$  poruszający się w polu magnetycznym o wektorze indukcji  $\vec{B}$ :



siła dośrodkowa zakrzywiająca tor:

$$\vec{F}_L = q\vec{V} \times \vec{B}$$

$$F_L = qV_{\perp}B = \frac{mV^2}{r}$$



# Rachunek wektorowy w fizyce - zadanie



Stałe siły  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  oraz  $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  (gdzie  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę przesuając ją z punktu A (0, 4, 0) do B (2, 3, 4).

Oblicz:

- a) wektor przesunięcia;
- b) wypadkową siłę;
- c) kąt między siłami składowymi;
- d) pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki;
- c) moment siły wypadkowej działającej na cząstkę w punkcie B względem środka układu.



# Przykład

Wykazać, że pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej poruszającej się w nim, naładowanej cząsteczki

$$E_K = \frac{m}{2} \vec{V} \circ \vec{V}$$

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \vec{V} \circ \vec{V} = \frac{m}{2} \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \circ \vec{V} + \vec{V} \circ \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = \frac{m}{2} 2 \frac{d\vec{V}}{dt} \circ \vec{V}$$

$$\frac{dE_K}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \circ \vec{V} \quad \text{ale} \quad m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{gdzie} \quad \vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

$$\frac{dE_K}{dt} = \vec{F} \circ \vec{V} = q \underbrace{(\vec{V} \times \vec{B}) \circ \vec{V}}_0$$

$$E_K = \text{const}$$

# Rachunek wektorowy - podsumowanie



Działanie	Wynik	Metoda postępowania	Zastosowanie
dodawanie $\vec{a} + \vec{b}$	wektor	reguła równoległoboku	wypadkowe przemieszczenie wypadkowa siła
odejmowanie $\vec{a} - \vec{b}$	wektor		algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń
rozkład wektora	wektory składowe		równia pochyła, rzut ukośny, itp.

# Rachunek wektorowy - podsumowanie



Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezyjskim	W matematyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$	skalar	$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$	$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	prostopadłość wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$	wektor	1. kierunek 2. zwrot 3. wartość $ \vec{a} \times \vec{b}  = a \cdot b \cdot \sin \varphi$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	równoległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę $k$	wektor	1. kierunek 2. zwrot $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 3. wartość $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$	$k \cdot a_x = b_x$ $k \cdot a_y = b_y$ $k \cdot a_z = b_z$	równoległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki