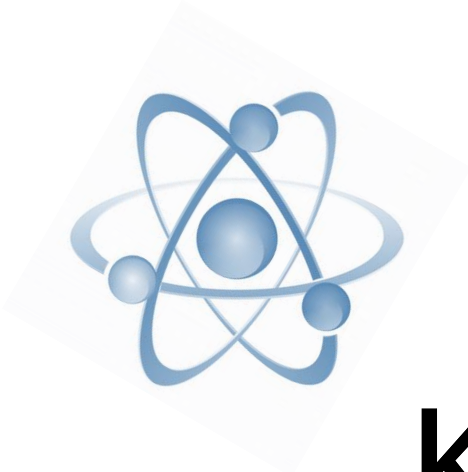


Kinematyka

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

Wstęp

opis ruchu

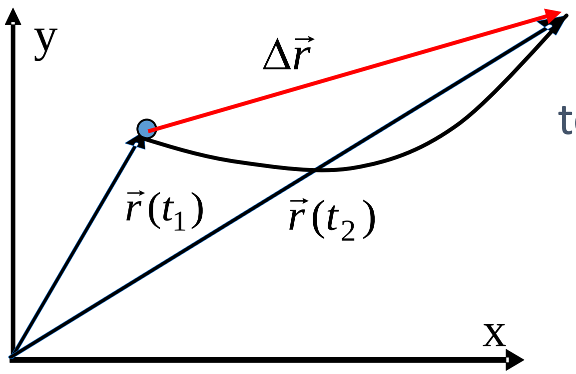
KINEMATYKA

przyczyny ruchu

DYNAMIKA

MECHANIKA

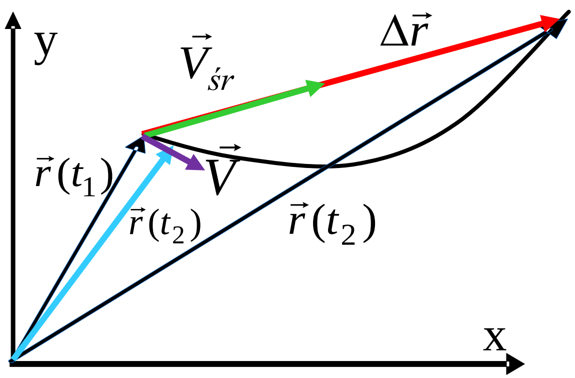
Podstawowe pojęcia ruchu krzywoliniowego



tor ruchu

przemieszczenie

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



prędkość średnia

$$\vec{V}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

prędkość chwilowa

gdy $t_2 \to t_1$ $\Delta t \to dt$ to $\Delta r \to dr$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

skoro $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ to $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\dfrac{dx}{dt} + \hat{j}\dfrac{dy}{dt} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y$

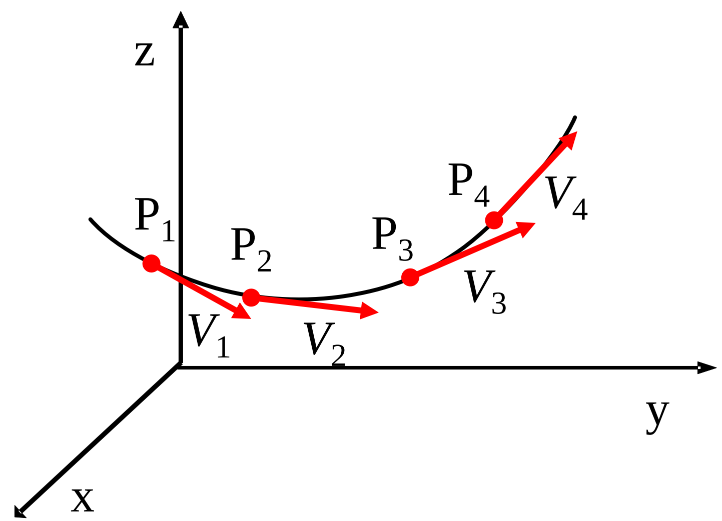
$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad \vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru.



Przyspieszenie

Przyspieszenie związane jest ze zmianą wektora prędkości

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{i}\frac{dV_x}{dt} + \hat{j}\frac{dV_y}{dt} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

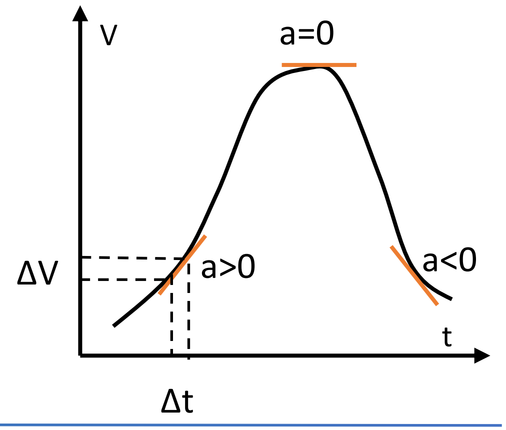
$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

Jeżeli $\vec{a} = const$ to $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$

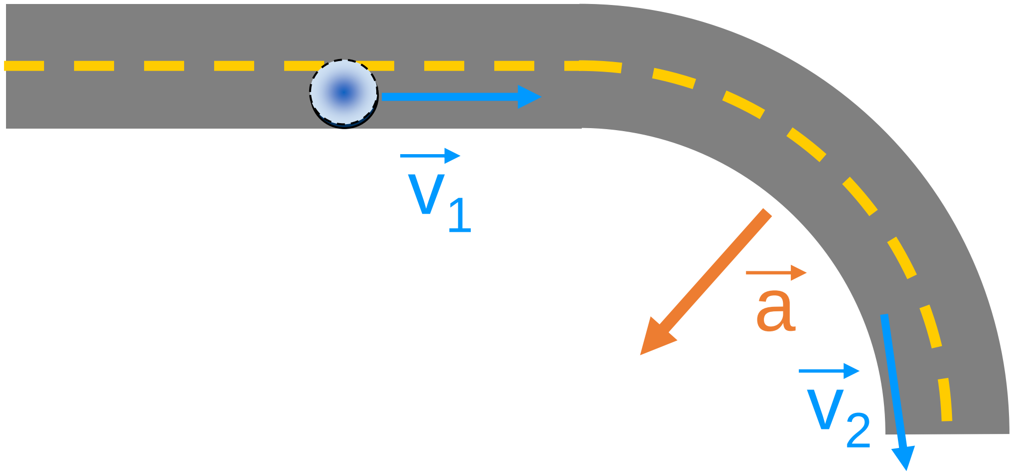
ponieważ:

$$\frac{dV}{dt} = a \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_{t=0}^{t} adt$$

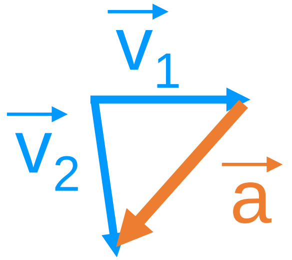
więc $V = V_0 + at$



Ruch krzywoliniowy

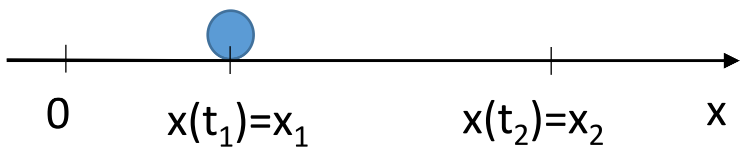


W ruchu krzywoliniowym występuje zmiana wektora prędkości.



Konsekwencją tego jest występowanie przyspieszenia pomimo stałej wartości prędkości

Przypadek szczególny - ruch prostoliniowy



Przemieszczenie $\Delta x = x_2 - x_1$

Przemieszczenie może być dodatnie lub ujemne.
Znak zależy od zgodności z osią OX.

Przykład

Zakładając, że a=const. oraz warunki początkowe: $v(t=0)=v_0$ $x(t=0)=x_0$ wyprowadzić równania ruchu v(t) oraz x(t).

$$v = \int a\,dt = a\int dt = at + C$$

$$v(0) = v_0 \qquad v(0) = a \cdot 0 + C = C \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0$$

$$v = at + v_0$$

$$x = \int v\,dt = \int (at + v_0)dt = \int at\,dt + \int v_0 dt$$

$$\int at\,dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1$$

$$\int v_0 dt = v_0 t + C_2 \qquad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C$$

Przykład

Zakładając, że a=const. oraz warunki początkowe: $v(t=0)=v_0$ $x(t=0)=x_0$ wyprowadzić równania ruchu v(t) oraz x(t).

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C$$

$$x(0) = x_0 \qquad x(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C \Rightarrow C = x_0$$

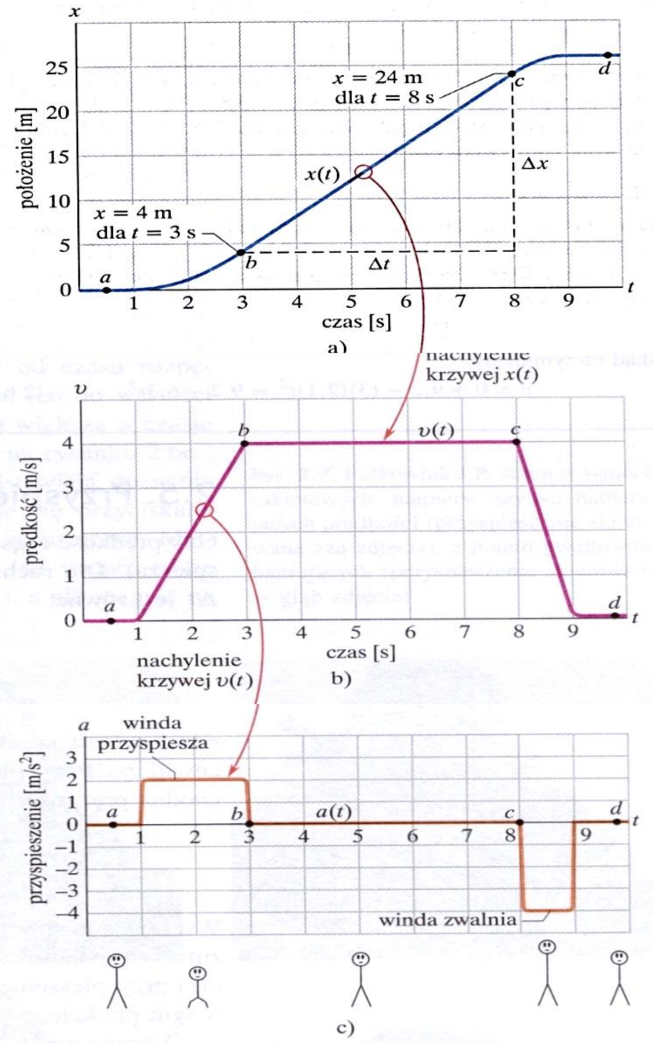
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Wzory na położenie i czas w ruchu jednostajnie zmiennym:

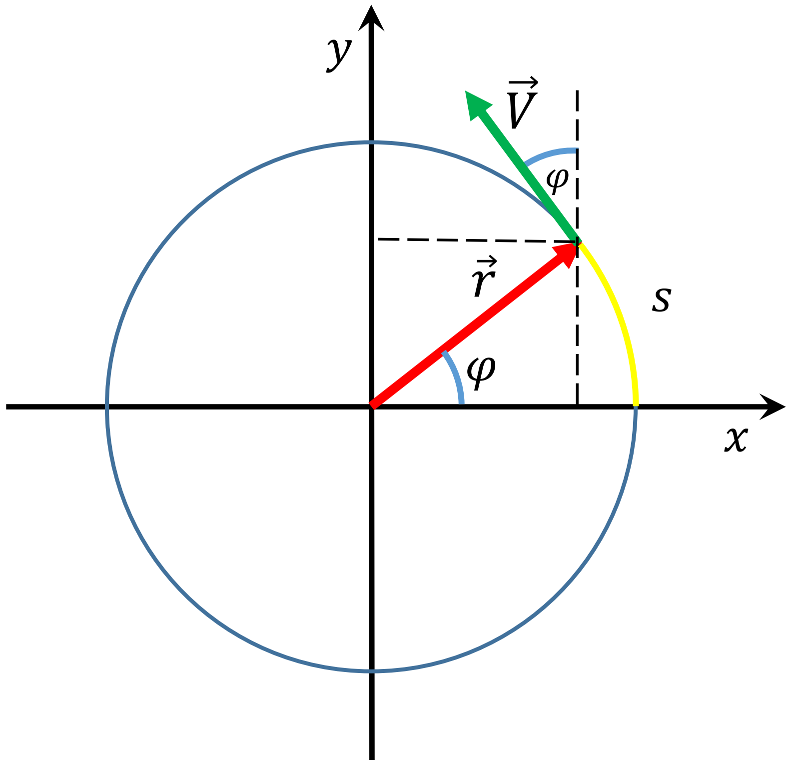
$$\boxed{x(t) = \pm x_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2}at^2} \qquad \boxed{V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t}$$

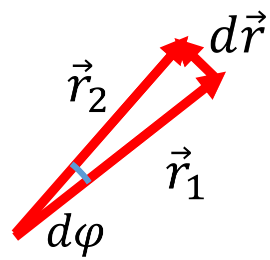
v(t) i a(t) graficznie

Rys. 2.6. Przykład 2.2. a) Wykres $x(t)$ dla windy, wznoszącej się wzdłuż osi x. b) Wykres $v(t)$ dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji $x(t)$ (gdyż $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$). c) Wykres $a(t)$ dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji $v(t)$ (gdyż $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$). Figurki z patyczków, narysowane pod wykresem pokazują, jak przyspieszenie działa na ciało pasażera



Ruch po okręgu





$$V = \frac{s}{t} \qquad \varphi = \frac{s}{r}$$

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{V}{r} = \omega$$

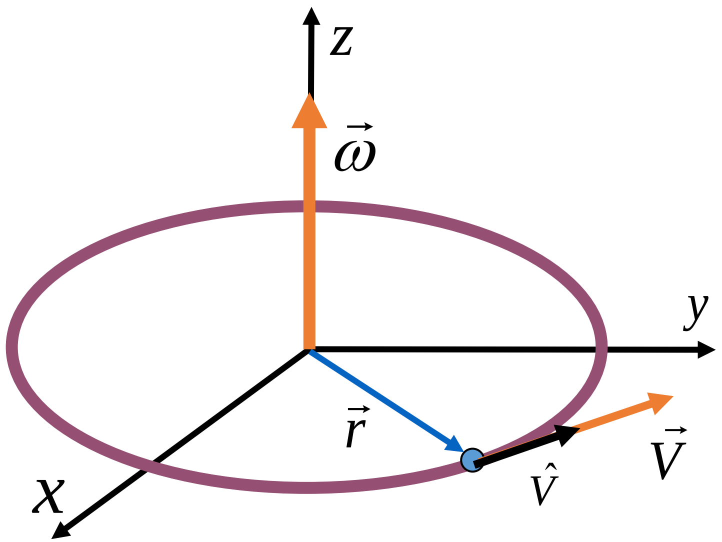
$$V = \omega r$$

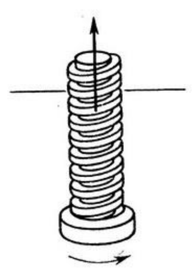
wektorowo $\quad \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\hat{\imath} + r\sin\varphi\,\hat{\jmath}$$

Związek pomiędzy prędkością liniową i kątową



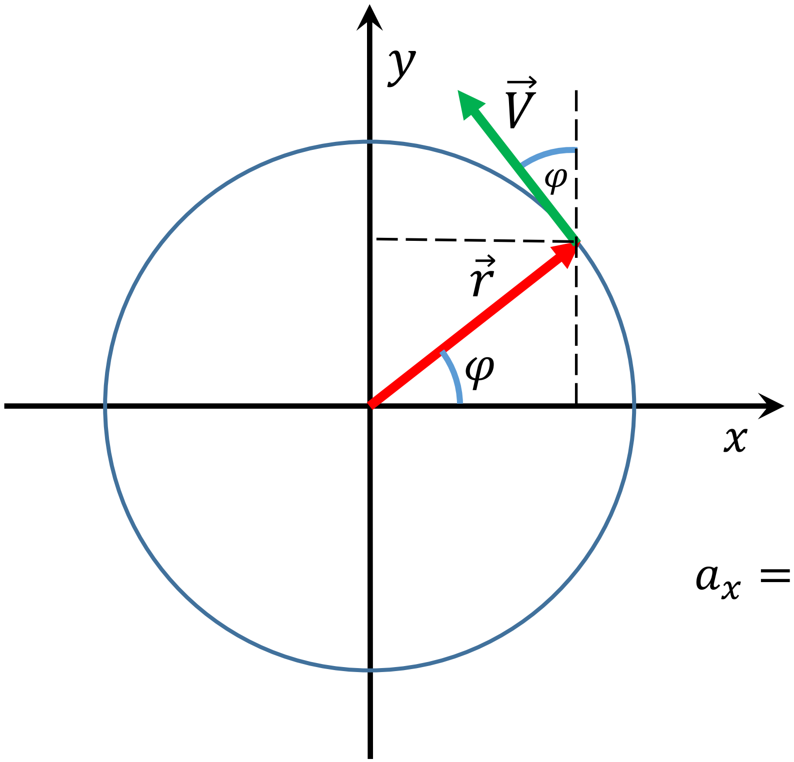


$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

w ruchu jednostajnym po okręgu, wektor prędkości kątowej jest stały

reguła śruby prawoskrętnej!!

Ruch niejednostajny po okręgu



dla współrzędnej x:

$$x(t) = r \cdot \cos\varphi(t)$$

pochodna wewnętrzna

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

druga pochodna

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \cos\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \cos\varphi(t) \cdot \omega \cdot \omega - r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi(t) - r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Ruch niejednostajny po okręgu

$$x(t) = r \cdot \cos\varphi(t) \qquad V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi(t) - r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \omega \cdot \sin\varphi(t)$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi(t) - r \cdot \sin\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$x(t) \qquad \frac{V_x}{\omega}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 \cdot x + \frac{V_x}{\omega} \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x$$

Ruch niejednostajny po okręgu

dla współrzędnej y: $y(t) = r \cdot \sin\varphi(t) \Rightarrow V_y = \frac{dy}{dt} = r \cdot \cos\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi(t) + r \cdot \cos\varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$V_y = \frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos\varphi(t)$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\underbrace{r \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi(t)}_{y(t)} + \underbrace{r \cdot \cos\varphi(t)}_{\frac{V_y}{\omega}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 \cdot y + \frac{V_y}{\omega} \cdot \varepsilon \Rightarrow a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y$$

Ruch niejednostajny po okręgu

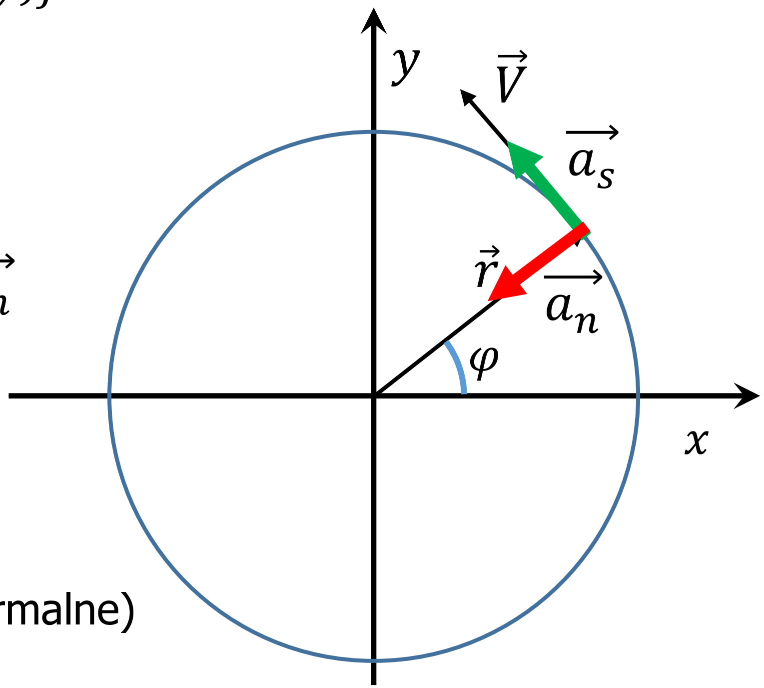
$$a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x \qquad a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y$$

$$\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x\right)\hat{\imath} - (\omega^2 \cdot x)\hat{\imath} + \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y\right)\hat{\jmath} - (\omega^2 \cdot y)\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot (V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath}) - \omega^2 \cdot (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

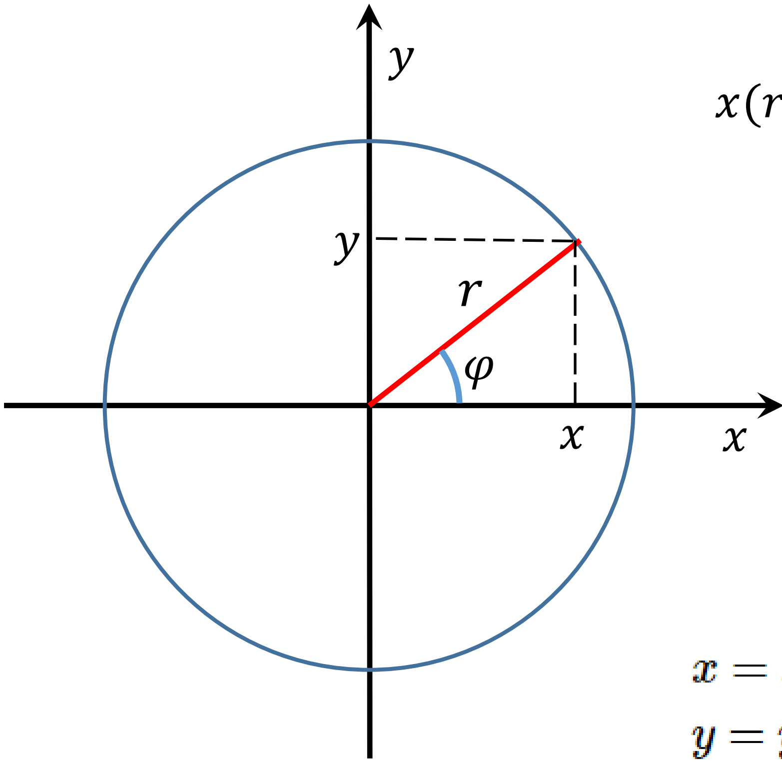
$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \vec{V} - \omega^2 \cdot \vec{r} = \overrightarrow{a_s} + \overrightarrow{a_n}$$



$\boxed{\overrightarrow{a_s} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \vec{V}}$ - przyspieszenie styczne

$\boxed{\overrightarrow{a_n} = -\omega^2 \cdot \vec{r}}$ - przyspieszenie dośrodkowe (normalne)

Układ współrzędnych biegunowych



$$x(r,\varphi) = r \cdot \cos\varphi(t) \qquad y(r,\varphi) = r \cdot \sin\varphi(t)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

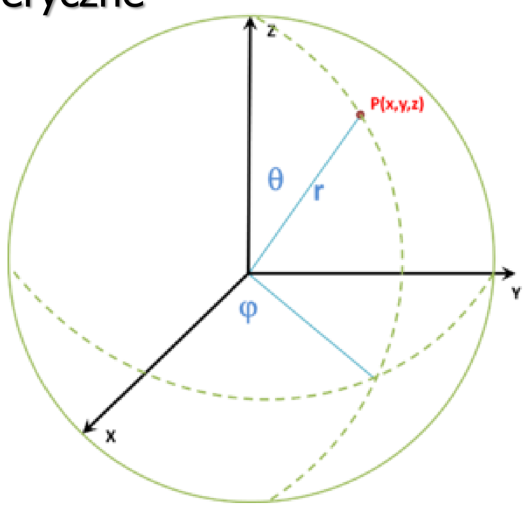
$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = arctg\frac{y}{x}$$

Współrzędne sferyczne

$$x = x(r,\theta,\phi) = r\,\sin\theta\,\cos\phi,$$
$$y = y(r,\theta,\phi) = r\,\sin\theta\,\sin\phi,$$
$$z = z(r,\theta,\phi) = r\,\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\theta = \operatorname{arcctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos\frac{z}{r},$$



Wnioski

- kiedy maleje składowa *Vy* prędkości, to rośnie składowa *Vx*;
- przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest wzdłuż promienia - do środka okręgu

$$\overrightarrow{a_n} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

- wartość przyspieszenia dośrodkowego jest równa: $\boxed{a_n = \frac{V^2}{r}}$

$$\overrightarrow{a_n} = -\omega^2 \cdot \vec{r} = -\frac{V^2}{r^2} \cdot r \cdot \hat{r} = -\frac{V^2}{r} \cdot \hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

Przykład

1. Pająk porusza się po torze krzywoliniowym, którego długość opisana jest równaniem: $S(t) = S_0 e^{ct}$
   gdzie S_0 i c to stałe. Wektor przyspieszenia pająka tworzy w każdym punkcie toru stały kąt φ ze styczną do jego toru.

Obliczyć wartość:

a) przyspieszenia stycznego,

b) przyspieszenia normalnego,

c) promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

ROZWIĄZANIE:

a) przyspieszenie styczne $a_s = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ $\quad V = \dfrac{dS}{dt} = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

stąd $a_s = c^2 S_0 e^{ct}$

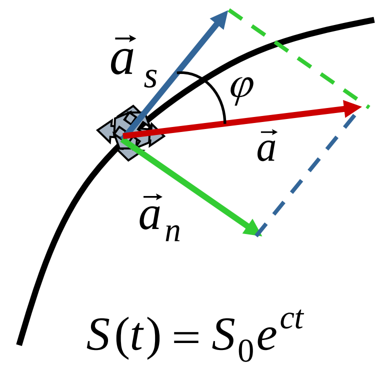
Przykład cd.

b) z rysunku wynika że

$$tg\varphi = \frac{a_n}{a_s}$$

stąd

$$a_n = a_s \cdot tg\varphi \quad = c^2 S_0 e^{ct} \cdot tg\varphi$$



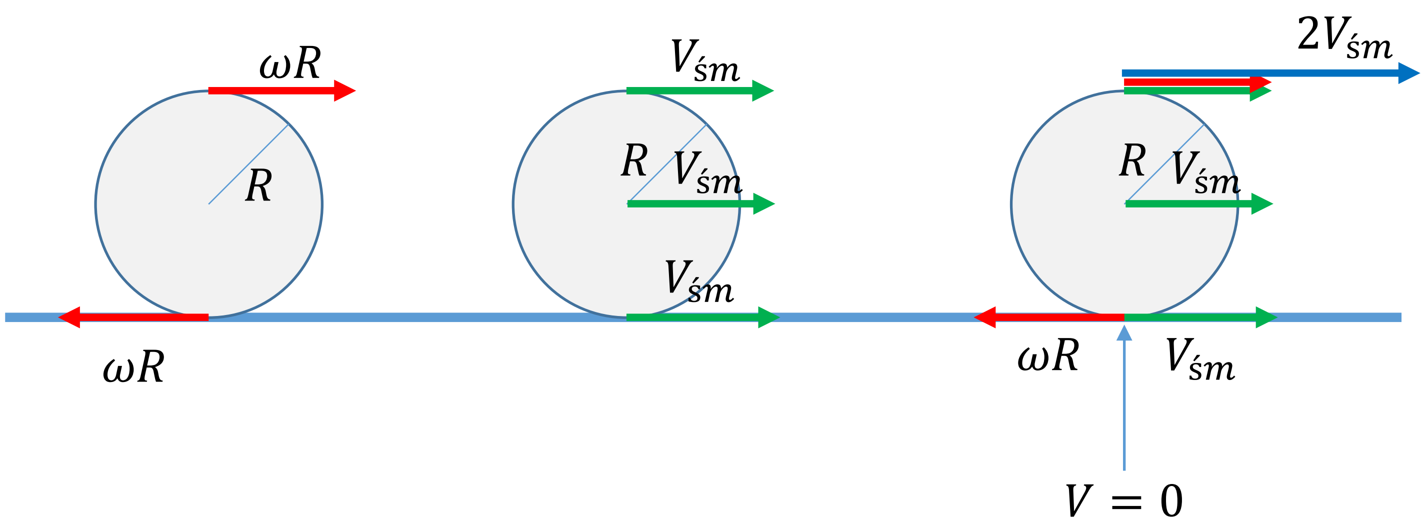
c) z innej definicji przyspieszenia dośrodkowego (normalnego):

$a_n = \frac{V^2}{r}$ stąd podstawiając wyliczone wcześniej $V = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{c^2 S_0^2 \cdot \left(e^{ct}\right)^2}{c^2 S_0 \cdot e^{ct} \cdot tg\varphi} = S_0 \cdot e^{ct} \cdot ctg\,\varphi = S \cdot ctg\,\varphi$$

Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu – musi występować tarcie między ciałem a podłożem, jest specyficznym rodzajem ruchu ciała, będącym złożeniem ruchu postępowego (środka masy) i ruchu obrotowego - wokół środka masy.

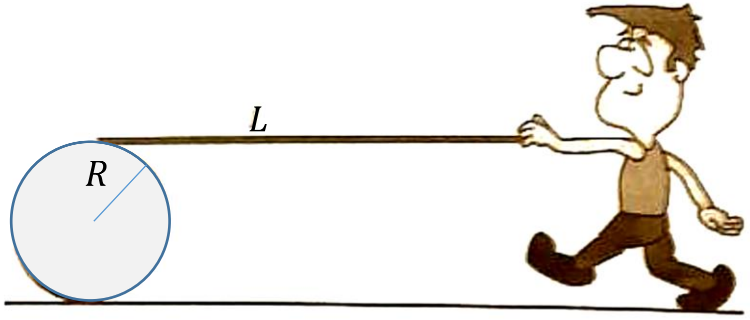


Przykład

Człowiek trzyma za jeden koniec deski o długości L opartej drugim końcem na walcu o promieniu R. Następnie człowiek zaczyna iść pchając deskę, która bez poślizgu toczy się po walcu, który toczy się po podłożu.

- Jaką odległość musi przejść człowiek aby dotrzeć do walca ?
- Czy/jak zależy to od promienia walca ?

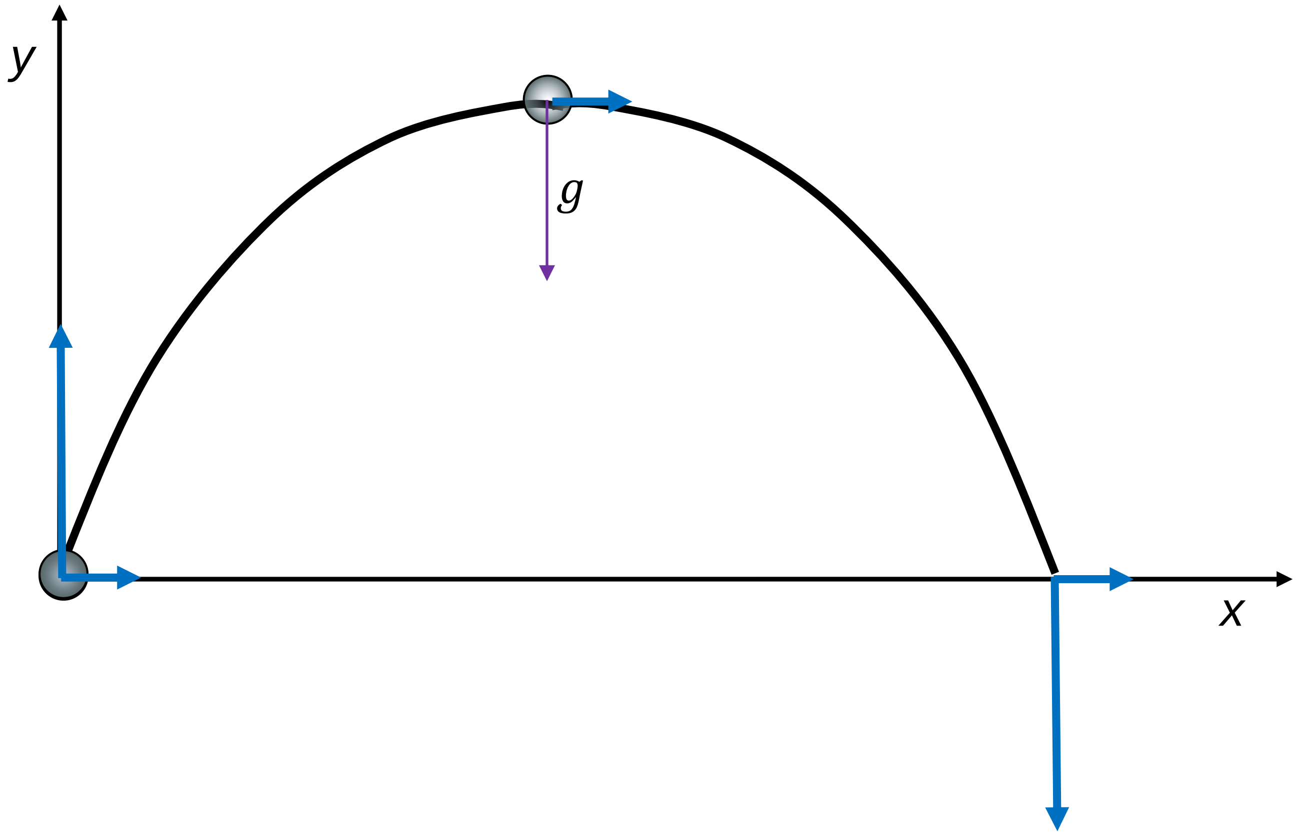
W czasie t środek walca przebędzie odległość $S = L = v \cdot t$
W tym samym czasie górny punkt styczności z deską przesunie się na odległość $2v \cdot t = 2L$
Czyli człowiek będzie musiał przebyć odległość 2L niezależnie od promienia walca.



Rzut ukośny

jest to złożenie dwóch niezależnych ruchów:

- ruchu jednostajnego w poziomie – oś x
- ruchu jednostajnie zmiennego w pionie – oś y



Rzut ukośny

Dla osi **x**:

$F_x = 0$; $a_x = 0$,

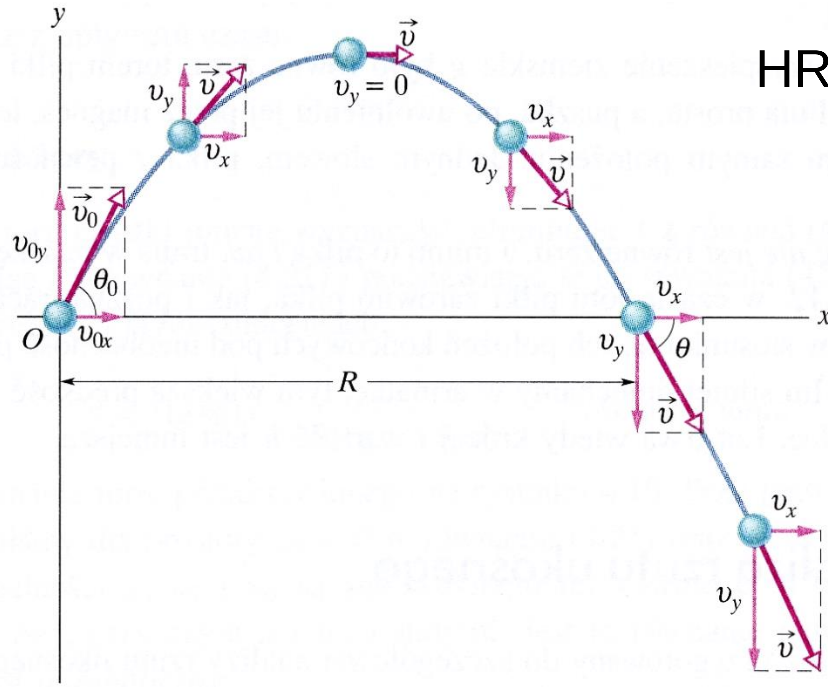
ruch jednostajny

Dla osi y:

$F_y = mg$; $a_y = g$,

ruch jednostajnie zmienny

HRW,1



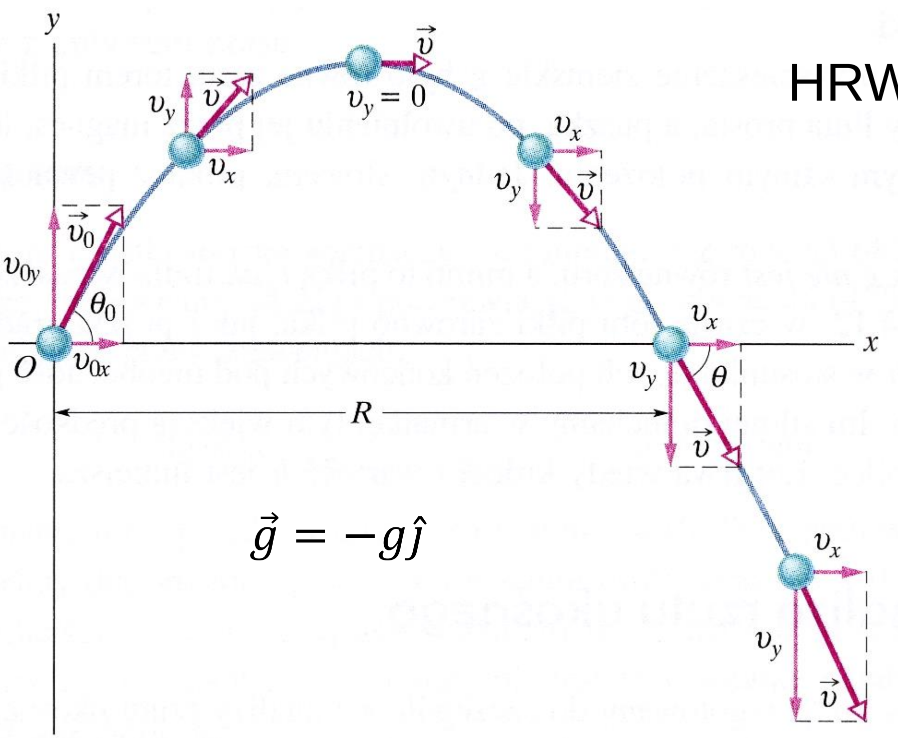
Rys. 4.10. Tor pocisku wystrzelonego z punktu o współrzędnych $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, z prędkością początkową $\vec{v}_0$. Na rysunku pokazano wektor prędkości początkowej i wektory prędkości cząstki w różnych punktach jej toru oraz składowe tych wektorów. Należy zauważyć, że składowa pozioma prędkości pozostaje stała, a jej składowa pionowa zmienia się w sposób ciągły.

Zasięg rzutu R jest to droga, którą przebywa cząstka w poziomie *do chwili jej powrotu na wysokość, z której została wyrzucona*

Rzut ukośny

$$s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$$V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t$$



$$\vec{g} = -g\hat{j}$$

Oś x:

$$x(t) = V_x t$$

$$V_x(t) = V_{0x} = const$$

Oś y:

$$V_y(t) = V_{0y} - gt$$

$$y(t) = V_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$V_{0x} = V_0 cos\theta_0$$

$$V_{0y} = V_0 sin\theta_0$$

$$y = (\mathrm{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

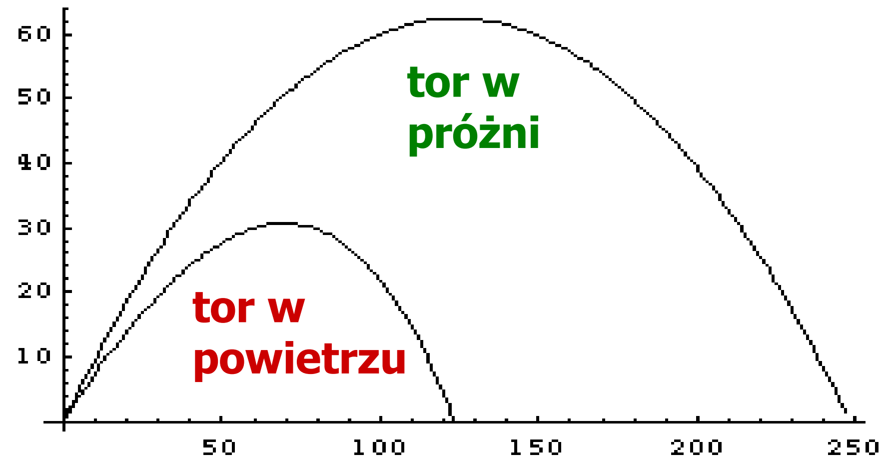
równanie toru - parabola

Rzut ukośny – w powietrzu

Siła oporu powietrza wpływa na tor rzutu ukośnego !

Piłka do gry w baseball rzucona pod kątem 45° z prędkością v = 50 m/s osiąga:

- bez oporu powietrza -
  - wysokość 63 m,
  - zasięg 254 m,
- z oporem powietrza -
  - wysokość 31 m,
  - zasięg 122 m



optymalny kąt rzutu wynosi:

20^o - 30^o 45^o

Rzut poziomy

Dla osi OX

ruch jednostajny

$$x(t) = V_x t$$

$$t = \frac{x}{V_x}$$

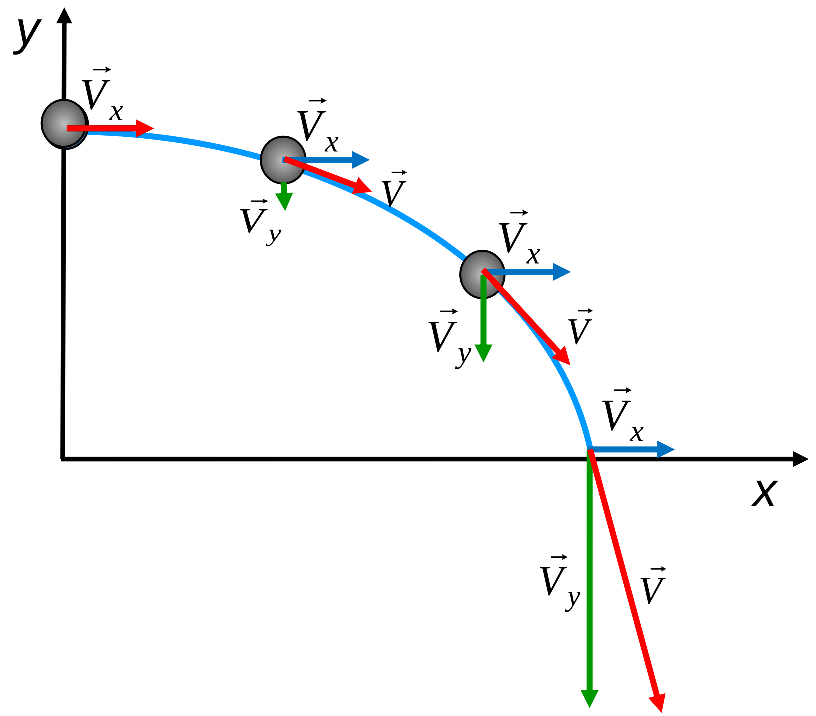
Dla osi OY

ruch jednostajnie przyspieszony

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

$$y = h - \frac{gx^2}{2V_x}$$

$V_0 = V_x = const$



Równanie toru – parabola – typu: $y(t) = bx^2$

$$V_x(t) = V_x = V_0 \qquad V_y(t) = -gt$$

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_x + \vec{V}_y(t) = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Przykład - zadanie

Wspinacze utknęli na szczycie skały wznoszącej się 250 m nad poziomem ziemi. Samolot mający dostarczyć zaopatrzenie leci poziomo na wysokości 200 m ponad wspinaczami, z szybkością 250 km/h. Gdy znajduje się w pewnej odległości od szczytu skały następuje wyrzut zasobnika.

a) W jakiej odległości od celu zasobnik powinien zostać upuszczony z samolotu?
b) Jeżeli samolot zbliży się na odległość 400 m, to z jaką szybkością pionową (w górę czy w dół?) zasobnik musi być wyrzucony aby trafił w cel?
c) Z jaką szybkością uderzy on w szczyt skały?

$$\boxed{s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2}$$

$$\boxed{V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t}$$

Zadanie domowe

Piłkę wyrzucono ukośnie w górę pod kątem 45° z prędkością początkową V_0= 12 m/s. W odległości 12 m od miejsca wyrzutu stoi pionowa ściana. Oblicz:

a) czas t_t po którym piłka trafi w ścianę,
b) składowe prędkości piłki V_x i V_y w momencie trafienia i szybkość wypadkową V,
c) kąt pod jakim piłka trafi w ścianę,
d) maksymalną wysokość H na jaką wzniesie się piłka,
e) wysokość od podstawy ściany h na jakiej piłka w nią uderzy,
f) w jakiej odległości X od ściany piłka po sprężystym od niej odbiciu uderzy w ziemię.

$$\boxed{s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2}$$

$$\boxed{V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t}$$