

# Dynamika

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>



- Jeśli ciało znajduje się we właściwym miejscu, to jego ruch jest możliwy jedynie pod wpływem działania sił zewnętrznych. Z wyjątkiem ciał niebieskich stanem normalnym jest stan spoczynku.

Arystoteles (384-322 pne.)

- Każde ciało trwa w swym stanie: spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.

Isaac Newton (1642-1727)

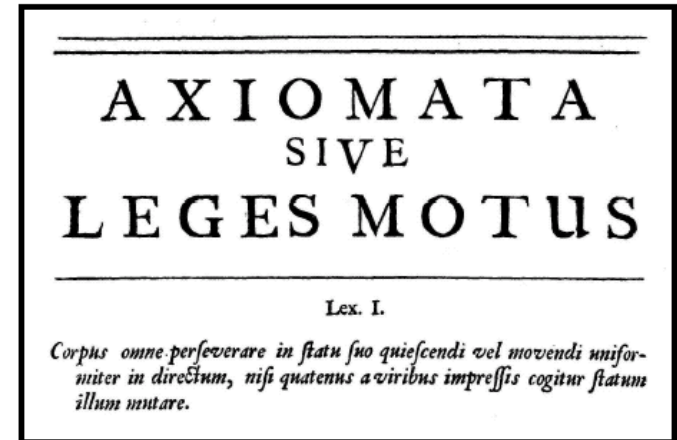
# Zasady dynamiki



Principia Mathematica Philosophiae  
Naturalis

1687 – zasady dynamiki

Istnieje **układ inercjalny** – tzn. układ odniesienia, w którym ciało, na które nic nie działa, spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.



Zasada bezwładności Newtona jest postulatem istnienia układu inercjalnego.

Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością  $\mathbf{V} = \text{const}$  jest też układem inercjalnym; istnieje więc nieskończenie wiele układów inercjalnych

# Druga zasada dynamiki Newtona

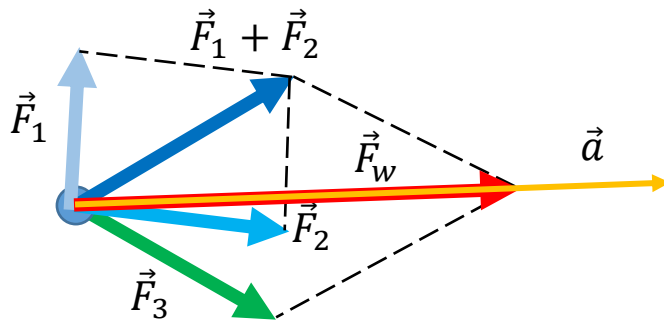


Niezerowa wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało nadaje ciału przyspieszenie o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej oraz wartości wprost proporcjonalnej do wartości tej siły a odwrotnie proporcjonalnej do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Obowiązuje w inercyjnym układzie odniesienia

# Druga zasada dynamiki



$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Druga zasada dynamiki Newtona:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Różniczkowe równanie ruchu:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_w(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$$

siła może nie być stała, lecz może zależeć od położenia, prędkości, czasu

# Druga zasada dynamiki



Jeśli znamy rozkład sił i masę ciała oraz warunki początkowe dla położenia i prędkości, to rozwiązując równanie ruchu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_w(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$$

otrzymamy układ trzech równań skalarnych, opisujących zachowanie ciała w czasie:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

# Przykłady



$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

ruch ładunku w polu magnetycznym

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}$$

ruch ładunku w polu elektrycznym

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g}$$

ruch masy w polu grawitacyjnym

Np.: rzut pionowy, poziomy lub ukośny



## Uogólniona zasada dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Zmiana pędu wymaga działania siły}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}) = \frac{dm}{dt} \vec{V} + m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Dla stałej masy:

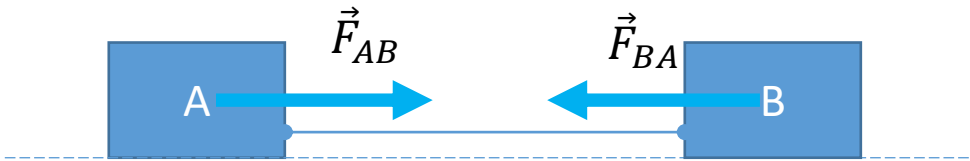
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$$



# Trzecia zasada dynamiki

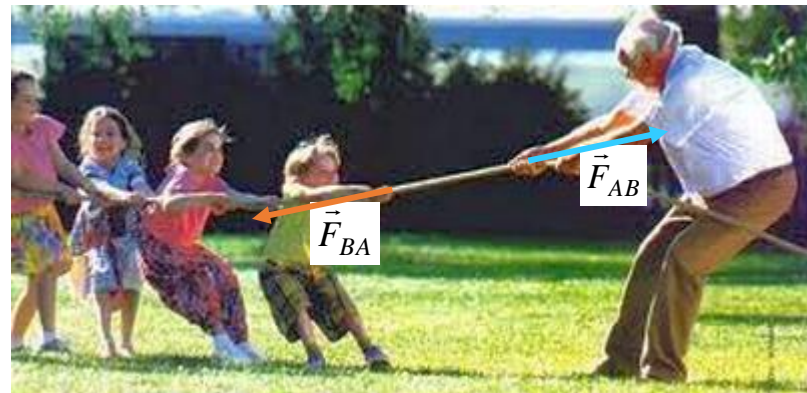


Każdemu działaniu (akcji)  
towarzyszy przeciwdziałanie (reakcja)



$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

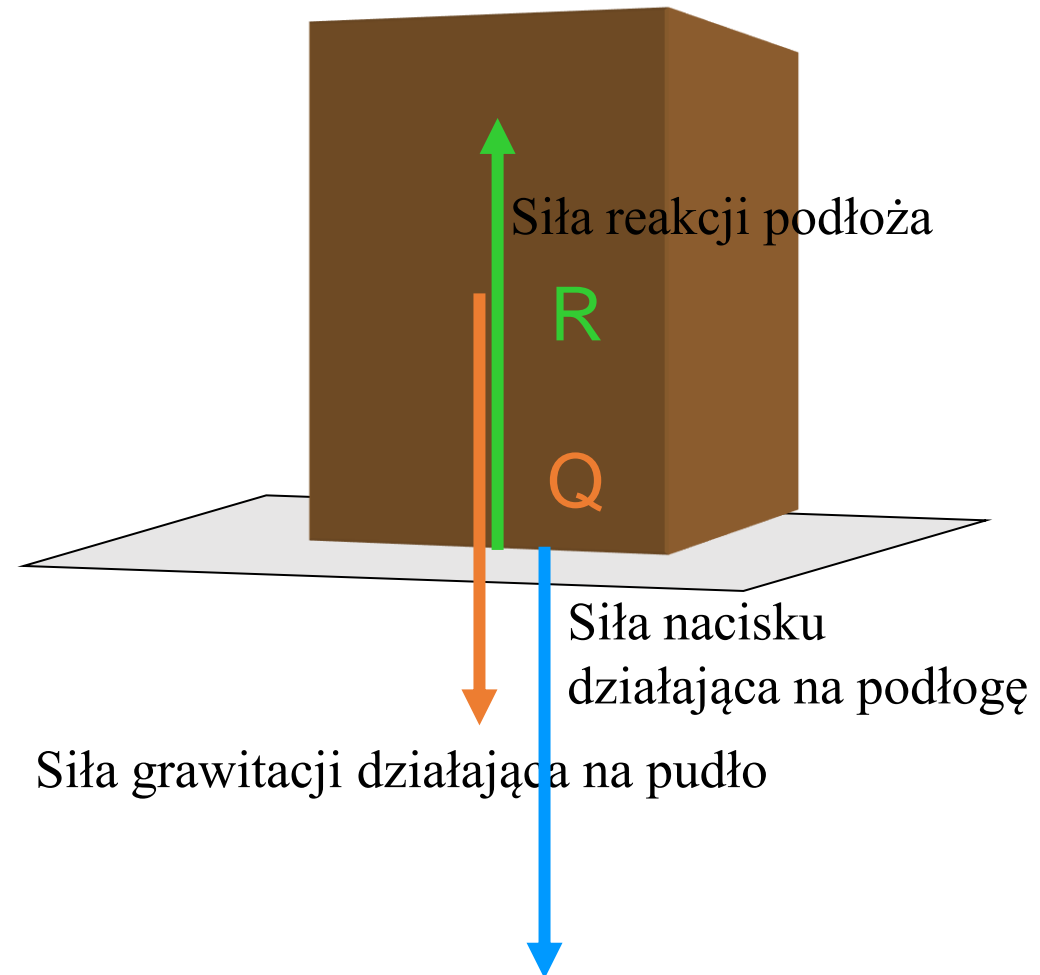
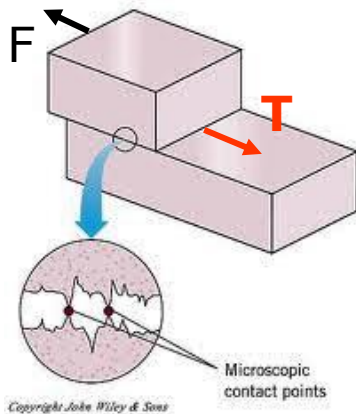
Siła działająca na ciało A ze strony ciała B jest równa co do wartości sile działającej na ciało B ze strony ciała A.



# Przykłady istotnych sił rzeczywistych



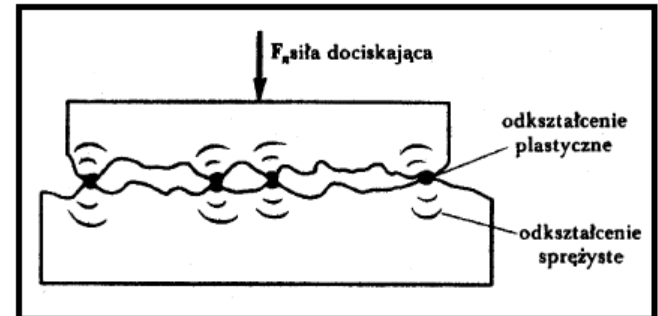
- Siła grawitacji (ciężkości)
- Siła nacisku-reakcji
- Siła naprężenia
- Siła tarcia (oporu)
- Siła dośrodkowa





# Tarcie

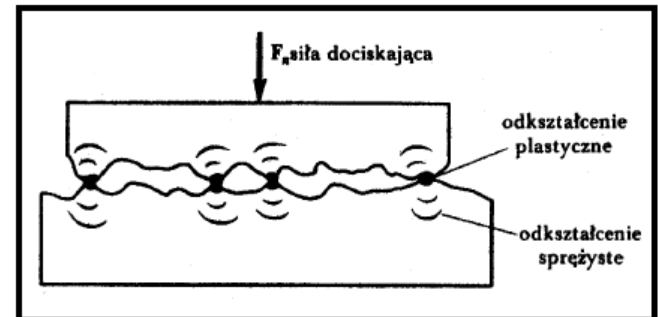
- Źródłem siły tarcia jest oddziaływanie pomiędzy ciałem a powierzchnią, po której jest wprawiane w ruch.
- Tarcie jest powodowane przez oddziaływanie elektromagnetyczne między cząstkami/atomami stykających się ciał.
- Siła tarcia jest sumą wektorową sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała.
- Powierzchnia rzeczywistego kontaktu mikroskopowego obu ciał może być nawet 10 000 razy mniejsza od powierzchni pozornego makroskopowego kontaktu.



# Tarcie



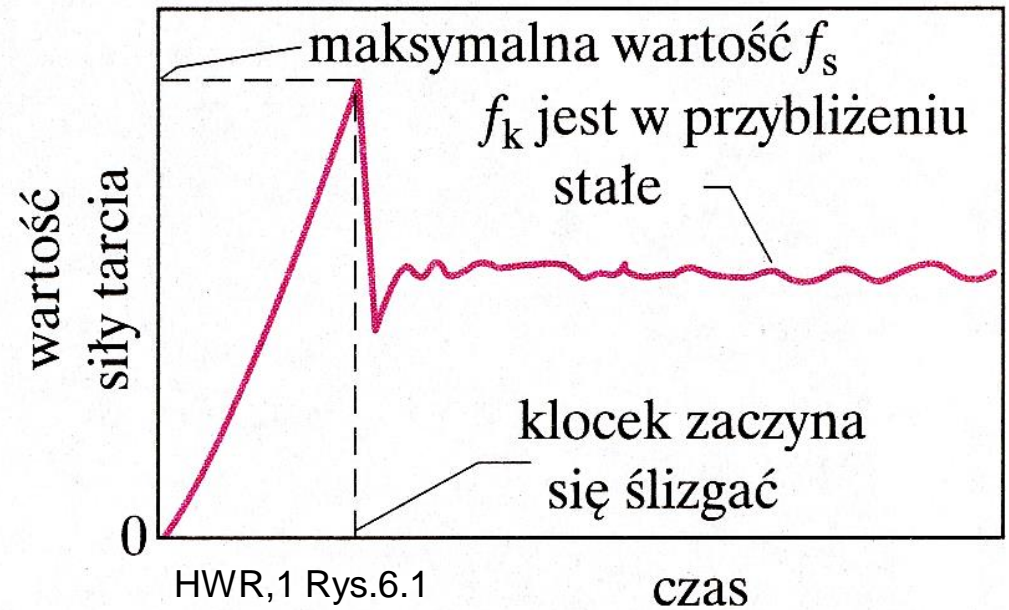
1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego równoważy składową siłę równoległą do powierzchni. Siła tarcia statycznego dopasowuje się do siły usiłującej wprowadzić ciało w ruch.
2. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego dana jest wzorem  $T_{S_{max}} = \mu_s N$ , gdzie  $\mu_s$  jest współczynnikiem tarcia statycznego,  $N$  jest wartością siły nacisku - prostopadłej do powierzchni, równej sile reakcji działającej na ciało.
3. Jeżeli wartość składowej siły  $F$ , równoległej do powierzchni przekracza wartość  $T_{S_{max}}$  to ciało zaczyna się ślizgać. Wartość siły tarcia gwałtownie wówczas maleje do  $T_k = \mu_k N$ , gdzie  $\mu_k$  jest współczynnikiem tarcia kinetycznego





## Przykładowe współczynniki tarcia:

Materiał	Wsp. tarcia statycznego $\mu_s$	Wsp. tarcia kinetycznego $\mu_k$
stal / stal	0.6	0.4
po dodaniu smaru do stali	0.1	0.05
metal / lód	0.022	0.02
opona / sucha nawierzchnia	0.9	0.8
opona / mokra nawierzchnia	0.8	0.7





# Tarcie wewnętrzne – lepkość

- Lepkość to opór, powstający pomiędzy warstwami (strugami) cieczy lub gazu przemieszczającymi się względem siebie.
- Rodzaj przepływu określa liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{v \rho L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$$

$v$  – prędkość;  $\rho$  - gęstość

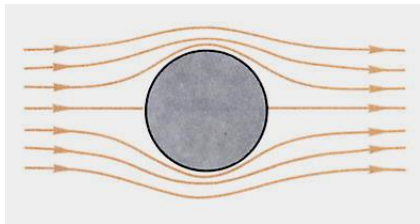
$L$  – charakterystyczny rozmiar ciała

$\eta$  - współ. lepkości (dynamiczny)

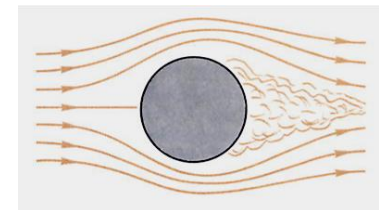
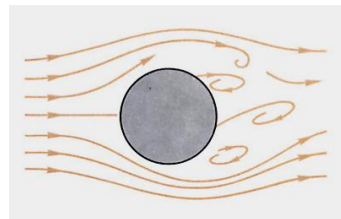
$$[Pa \cdot s]$$

$\nu$  - współ. lepkości (kinematyczny)

$$\left[ \frac{m^2}{s} \right]$$



przepływ  
laminarny  
 $Re \ll 1$



przepływ  
turbulentny  
 $Re > 2000$



# Tarcie wewnętrzne – lepkość

## ■ Prędkość graniczna



$$V_{gr} = \sqrt{\frac{2F_g}{C \cdot \rho \cdot S}}$$

$C$  – współczynnik oporu  
 $\rho$  – gęstość ośrodka  
 $S$  – pole przekroju

$$V_{gr} = \frac{(m_k - m_p) \cdot g}{6\pi\eta r} \quad \text{prędkość graniczna kulki}$$

## ■ Siła Stokes'a

Kulka o promieniu  $r$  porusza się w ośrodku lepkiem (mała liczba Reynoldsa)

$$F_o = 6\pi\eta rV$$

$$F_w = m_p \cdot g$$

$$F_g = m_k \cdot g$$

gdzie:

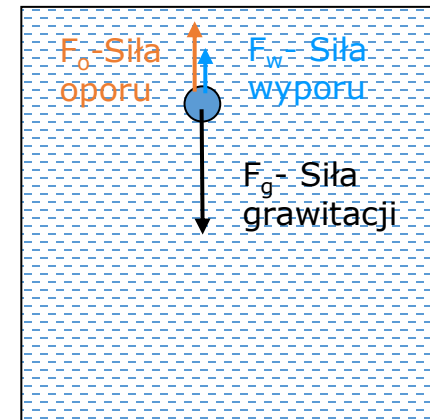
$m_p$  – masa płynu

wypartego przez kulkę

$m_k$  – masa kulki

Równanie ruchu kulki:

$$\Leftarrow m \frac{dV}{dt} = m_k \cdot g - m_p \cdot g - 6\pi\eta r \cdot V$$





# Siła ciężkości

- Siła ciężkości zwana również siłą grawitacji to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało.

Źródłem siły ciężkości jest pole grawitacyjne Ziemi

Pole grawitacyjne jest to własność przestrzeni przejawiająca się tym, że na ciało o masie  $m$  umieszczone w tym polu działa siła  $F$  określona wzorem:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Od czego zależy natężenie pola grawitacyjnego (przyspieszenie grawitacyjne)?:

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$
$$F = mg$$
$$g(r) = G \frac{M}{r^2}$$

Masa Ziemi jest bardzo duża  
 $M=5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  
wytwarza zatem w swoim  
otoczeniu silne pole grawitacyjne





## ZASADY DYNAMIKI NEWTONA OBOWIĄZUJĄ W UKŁADACH INERCJALNYCH

Co można zrobić aby móc stosować te zasady w układach nieinercjalnych?

Siły pozorne,

Siły bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u \quad \text{przyspieszenie układu}$$

II zasada dynamiki:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{rz} + \vec{F}_b = m\vec{a}$$



# Ciężar pozorny

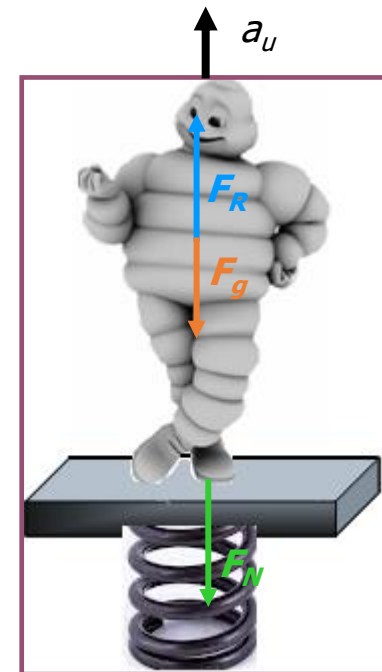
Winda rusza w górę ze stałym przyspieszeniem  $a$ . Jaki ciężar wskaże waga sprężynowa?

$$F_R - F_g = a_u \cdot m$$

waga wskazuje siłę  $F_N$

ale  $F_R = F_N$  więc

$$F_N = F_g + m \cdot a_u$$



# Dynamika w ruchu po okręgu



Obserwator w układzie inercyjnym wskaże siły

Siły rzeczywiste:

siła grawitacji  
siła reakcji na nacisk  
siła tarcia

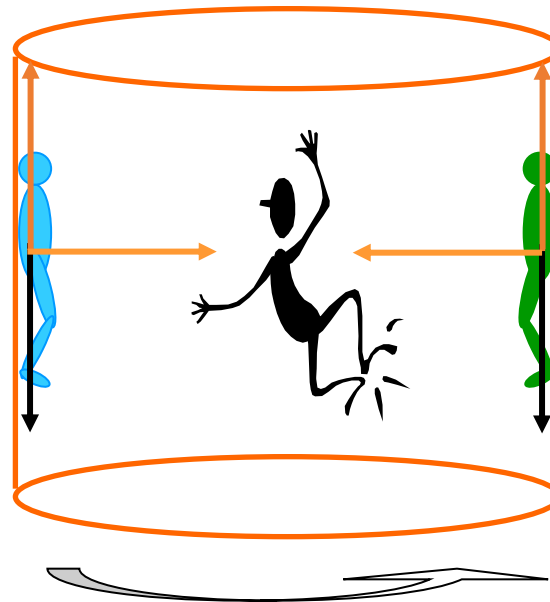
Dla obserwatora w układzie inercyjnym siła reakcji na nacisk pełni rolę siły dośrodkowej

Obserwator w układzie nieinercyjnym

Siła pozorna:

siła odśrodkowa  
bezwładności

Dla obserwatora w układzie nieinercyjnym wszystkie siły: rzeczywiste i siła odśrodkowa (bezwładności) się równoważą



# Czy Ziemia jest układem inercyjnym ?



Rotacja Ziemi wokół własnej osi



$$a_z \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Obieg wokół Słońca



$$a_o \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Obieg Słońca w Galaktyce



$$a_s \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$$



Z czym porównać oszacowane wartości przyspieszeń?

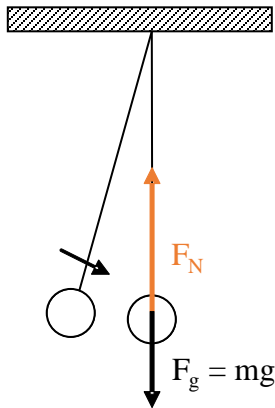
$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Wniosek?

# Wahadło matematyczne



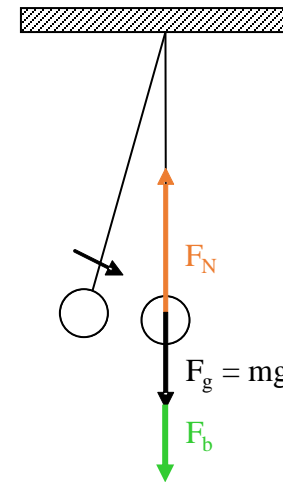
Układ inercjalny



$$\vec{F}_d = \vec{F}_N + \vec{F}_g \quad \text{czyli} \quad F_d = F_N - F_g$$

$$\frac{mV^2}{r} = F_N - mg \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{mV^2}{2} + mg$$

Układ nieinercjalny



$$\vec{F}_{wyp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_b = 0$$

$$\text{czyli} \quad F_N = F_g + F_b$$

$$\vec{F}_N = mg + \frac{mV^2}{r}$$

# Przyspieszenie i siła Coriolisa



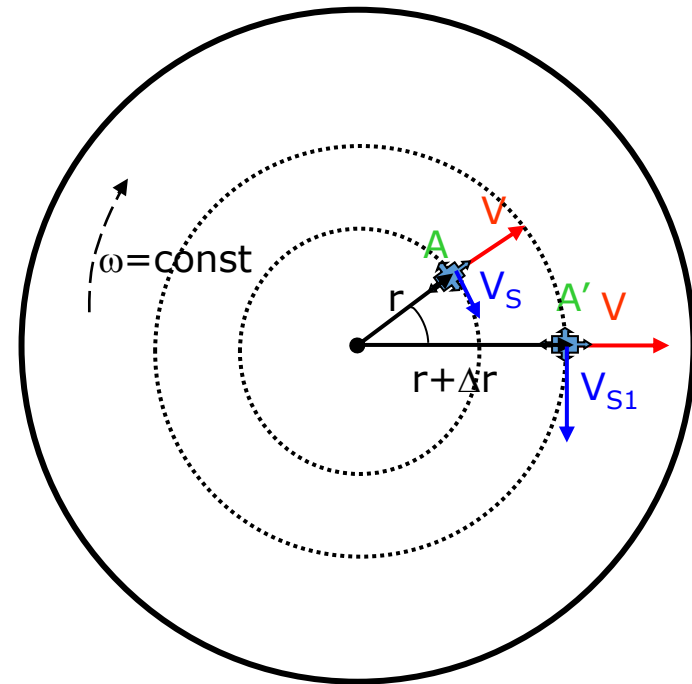
## *Mrówka na płycie gramofonowej*

Płyta obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ .

Mrówka porusza się względem płyty ruchem jednostajnym, prostoliniowym - wzdłuż promienia, z punktu A do punktu A' w czasie  $\Delta t$  z prędkością  $V$ .

Prędkość styczna  $V_S$  rośnie wraz z odległością od środka płyty.

W tym czasie płyta obraca się o kąt  $\Delta\varphi$



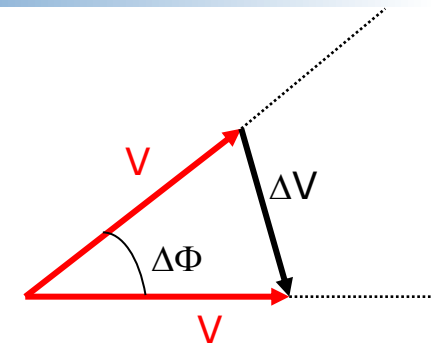


# Przyspieszenie i siła Coriolisa

Skoro  $\Delta\Phi$  jest małe to  $\Delta V = V \cdot \Delta\Phi$

czyli  $\frac{\Delta V}{\Delta t} = V \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  dla  $\Delta t \rightarrow 0$  można zapisać:

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{czyli} \quad a_1 = V \cdot \omega$$



Prędkość  $V_S$  zmienia się od:  $V_S = \omega \cdot r$   
do wartości  $V_{S1} = \omega \cdot (r + \Delta r)$

a więc  $\Delta V_S = \omega \cdot (r + \Delta r) - \omega \cdot r$  czyli  $\Delta V_S = \omega \cdot \Delta r \quad | : \Delta t$

otrzymujemy  $\frac{\Delta V_S}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t}$  dla  $\Delta t \rightarrow 0$   $\frac{dV_S}{dt} = \omega \frac{dr}{dt}$  czyli  $a_2 = V \cdot \omega$

$a_1$  i  $a_2$  to wartości wektorów o tym samym kierunku-wzrastającego  $\varphi$

Całkowite przyspieszenie  $a_C = a_1 + a_2 = 2V \cdot \omega \leftarrow$  przyspieszenie Coriolisa

W układzie nieinercyjnym mrówka jest w stanie równowagi  $\Rightarrow$

# Przyspieszenie i siła Coriolisa



Tarcie działające na mrówkę ma dwie składowe:  
radialną – równoważona przez **siłę odśrodkową** oraz  
styczną (zgodną z kierunkiem obrotu płyty) – równoważoną przez  
siłę działającą stycznie, przeciwnie do kierunku obrotu płyty –  
**siłę Coriolisa** – *jest to SIŁA POZORNA*  
*działa w obracającym się układzie odniesienia!*

$$\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}$$



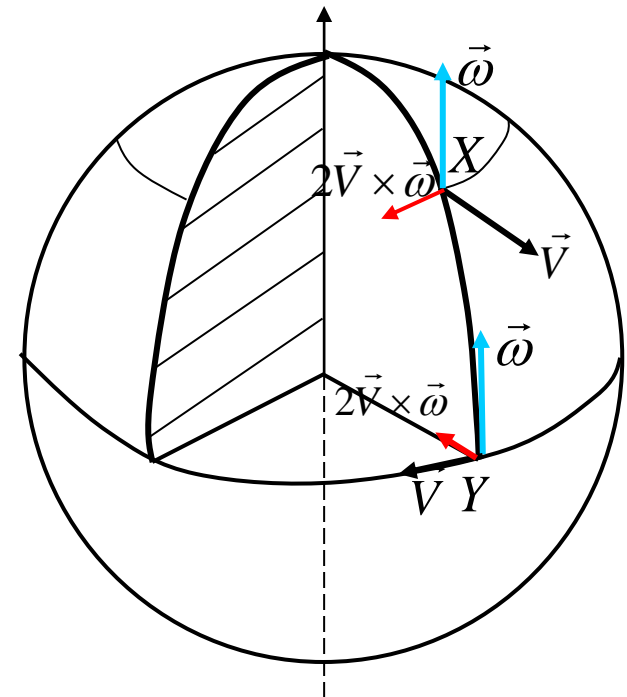
# Przyspieszenie i siła Coriolisa



Ciało wyrzucone w punkcie X, na półkuli północnej, pionowo w górę z prędkością  $\mathbf{V}$ , doznaje przyspieszenia Coriolisa stycznego do równoleżnika przechodzącego przez punkt X.

$$\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}$$

Z kolei ciało poruszające się z prędkością styczną do równoleżnika przechodzącego przez punkt Y doznaje przyspieszenia Coriolisa skierowanego do środka Ziemi.



# Siła Coriolisa - wnioski



Opisując ruch w układzie inercyjnym:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_r + 2m\vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{V}_r)$$

przysp. w ukł. inercyjnym	przysp. w ukł. obracającym się	Przyspieszenie Coriolisa	przyspieszenie dośrodkowe
------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------	------------------------------

## Przykładowe zadania na siłę Coriolisa

Dwaj myśliwi polowali na wilki. **A** strzelał do wilka znajdującego się na zachód od niego, **B** do wilka znajdującego się w kierunku południowym. Obydwaj spudłowali i tłumaczyli swoje niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa. Który z nich miał większe prawo tak się tłumaczyć? Jaka jest wielkość odchylenia pocisku, jeżeli średnia prędkość  $v_0 = 300 \text{ m/s}$ , czas lotu  $t = 1 \text{ s}$  a szerokość geograficzna  $\varphi = 49^\circ$ .

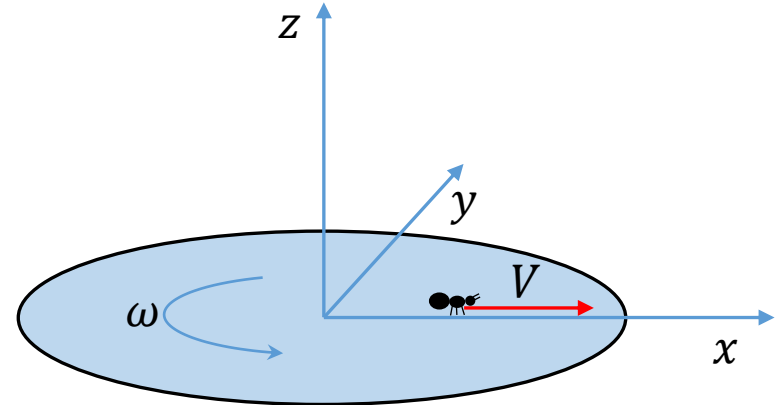
ODP.:  $\Delta x_A \approx 2,2 \text{ cm}$      $\Delta x_B \approx 1,7 \text{ cm}$



# Przykład

Zapisz w układzie nieinercyjnym, wektory wszystkich sił działających na mrówkę wędrującą po płycie gramofonowej z przykładu powyżej. Zapisz wektor wypadkowy tych sił.

- Siła grawitacji
- Siła reakcji
- Siła Coriolisa
- Siła odśrodkowa bezwładności
- Siła tarcia
- Siła boczna wywierana przez płytę na mrówkę.



$$\vec{F}_w = -mg\hat{k} + mg\hat{k} - m2\omega V\hat{j} + mr\omega^2\hat{i} - \mu mg\hat{i} + F_s\hat{j} = 0$$

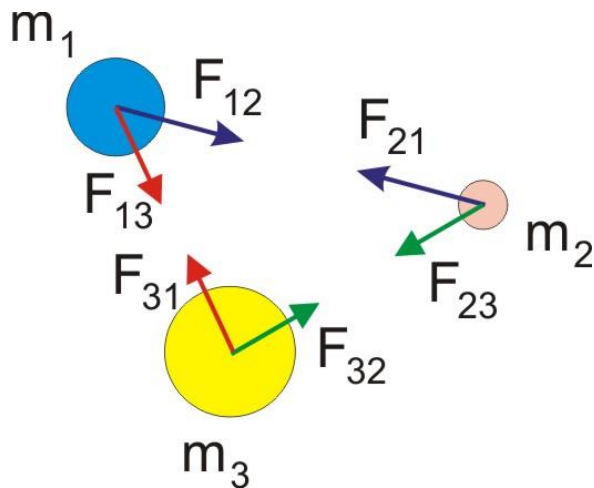


- Błędny jest przekonanie, że do podtrzymania ruchu potrzebna jest siła (patrz zasada bezwładności – I zasada dynamiki Newtona)
- Pojęcia: ruch i spoczynek mają sens jedynie względem konkretnego układu odniesienia
- Zasady dynamiki obowiązują w układzie inercyjnym. W układach nieinercyjnych wprowadza się siły pozorne, aby móc nadal stosować zasady dynamiki
- Ziemia może być traktowana jak układ inercyjny, lecz są zjawiska, które mogą być wyjaśnione jedynie przy uwzględnieniu sił pozornych: odśrodkowej i Coriolisa

# Dynamika układu punktów materialnych



- Zasady dynamiki Newtona dla układu punktów materialnych



$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_3}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} = 0$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero, to całkowity wektor pędu układu pozostaje stały.



# Zderzenia

zderzenia to szeroka klasa zjawisk np. :

- zderzenia kul bilardowych
- uderzenia piłki o ścianę
- oddziaływanie ładunków elektrycznych za pośrednictwem pola elektrycznego
- reakcje jądrowe
- rozpady cząstek



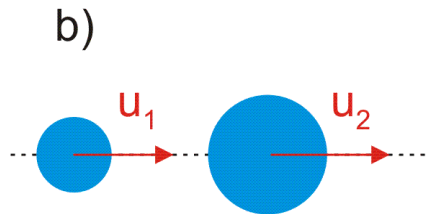
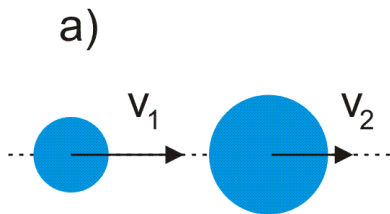
OpenStax CNX  
(<http://cnx.org>)

Ze względu na krótki czas działania nie możemy zmierzyć sił działających podczas zderzenia. Jednak spełnione są:

- **zasada zachowania pędu** (występują tylko siły wewnętrzne)
- **zasada zachowania energii całkowitej**

Gdy dwa ciała zderzają się to zderzenie może być **sprężyste** (elastyczne) lub **niesprężyste** (nieelastyczne) w zależności od tego czy **energia kinetyczna** jest zachowana podczas tego zderzenia czy też nie.

# Zderzenia w przestrzeni jednowymiarowej



centralne zderzenie sprężyste  
kul o masach  $m_1$  i  $m_2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Z zasady zachowania pędu: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \text{Z zasady zachowania energii kinetycznej: } \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \\ u_2 = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2 \end{array}$$

Szczególne przypadki:

- zderzenie identycznych ciał:  $m_1 = m_2 = m \rightarrow u_1 = v_2, u_2 = v_1$
- zderzenie lekkiej cząstki z ciężkim nieruchomym jądrem atomowym:  $m_1 \ll m_2, v_2 = 0 \rightarrow u_1 = -v_1, u_2 = 0$
- ciężka cząstka uderza w lekką nieruchomą cząstkę:  $m_1 \gg m_2, v_2 = 0 \rightarrow u_1 = v_1, u_2 = 2v_1$



# Dynamika układów o zmiennej masie

Ruch pod wpływem stałej siły  $F$  pojazdu o rosnącej masie.

( $m_0$ - masa początkowa)



stały przyrost masy

$$\frac{dm}{dt} = \mu = const \quad \Rightarrow \quad m = m_0 + \mu \cdot t$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$F = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} = \mu \cdot v + (m_0 + \mu \cdot t) \frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt}$$

rozdzielamy zmienne:





# Dynamika układów o zmiennej masie

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{F - \mu v} = \frac{dt}{m_0 + \mu t} \quad \text{po scałkowaniu:}$$

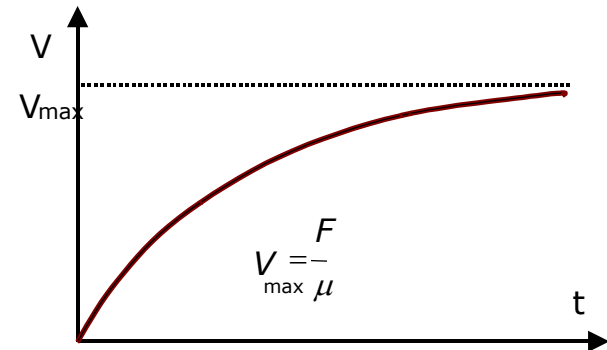
$$\int_0^v \frac{\mu dv}{F - \mu v} = \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 + \mu t} \Rightarrow -\ln(F - \mu v) \Big|_0^v = \ln(m_0 + \mu t) \Big|_0^t \quad \text{podstawiając granice:}$$

$$-\ln(F - \mu v) + \ln F = \ln(m_0 + \mu t) - \ln m_0$$

$$\ln \frac{F}{F - \mu v} = \ln \left( \frac{m_0 + \mu t}{m_0} \right) \Rightarrow \frac{F}{F - \mu v} = \frac{m_0 + \mu t}{m_0}$$

stąd ostatecznie:

$$v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} \Rightarrow v = \frac{F}{\frac{m_0}{t} + \mu} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{F}{\mu}$$



# Dynamika układów o zmiennej masie



Ruch pod wpływem stałej siły, ciała o malejącej masie

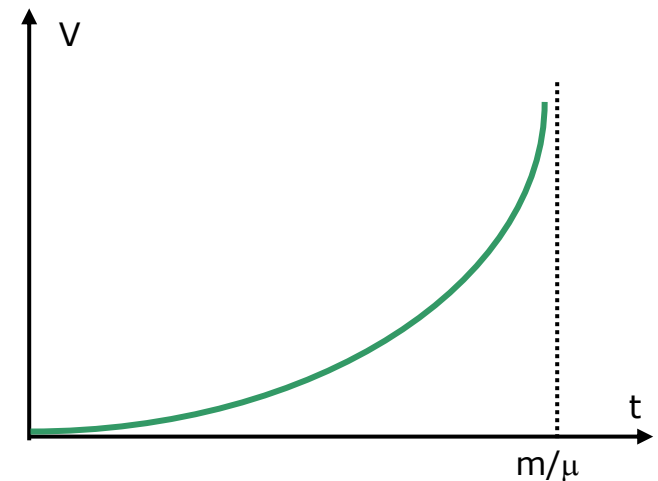


Podobnie jak w poprzednim przypadku

$$F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow F = (m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt}$$

wynik:

$$v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$



# Zadanie



Rakieta o masie początkowej  $M_0$  poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo w stałej ilości  $dm_s/dt = r$  [kg/s], nadając mu względem rakiety prędkość  $U$ .

Zapisz zasadę zachowania pędu w nieruchomym układzie odniesienia (porusza się w nim rakieta), pamiętając, że w porównaniu z masą  $M$  rakiety w dowolnej chwili  $dt$  ilość wyrzuconych gazów  $dm$  jest do zaniedbania. Korzystając z zasady zachowania pędu:

- a) Oblicz przyspieszenie początkowe rakiety.
- b) Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą  $V(m)$  i znajdź jego rozwiązanie zależne od czasu  $V(t)$ .