

# Bryła sztywna

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>

# Środek masy



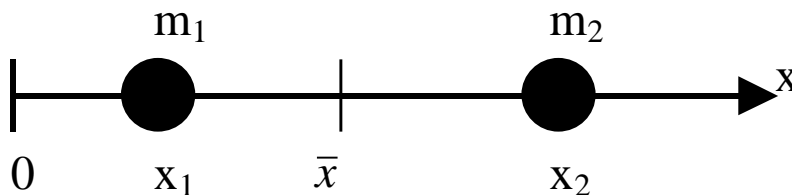
Jak opisać dowolny ruch ciała?

Którego punktu ciała?

Zawsze można wybrać taki punkt ciała, który porusza się tak jakby poruszał się pojedynczy punkt materialny pod działaniem tych samych sił zewnętrznych – **ŚRODEK MASY** ciała.



Dla układu punktów materialnych:



$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



## Dla mas punktowych

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

## Ciągły rozkład mas

$$\bar{x} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$\bar{y} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$\bar{z} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

## wektor położenia środka masy

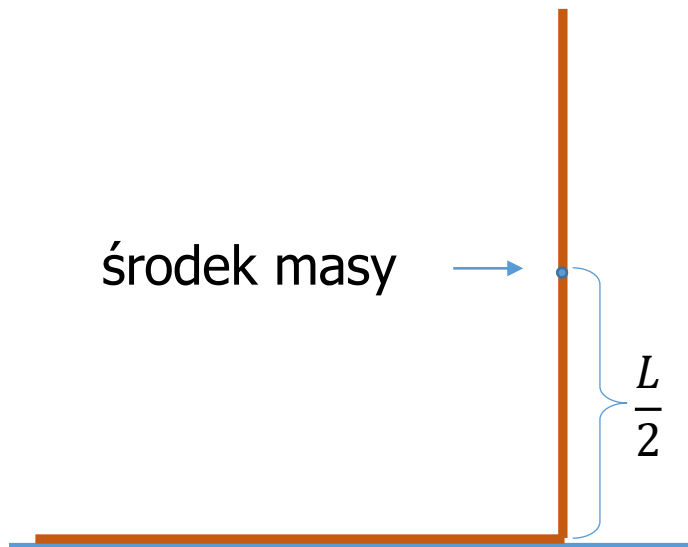
$$\vec{r}_s = \hat{i}\bar{x} + \hat{j}\bar{y} + \hat{k}\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_r = \frac{\int x dm + \int y dm + \int z dm}{M}$$

# Przykład



- Cienki, jednorodny słupek o masie  $M$  i długości  $L$  leżący poziomo postawiono pionowo. Obliczyć wykonaną pracę.



$$W = mg \frac{L}{2}$$

# Ruch środka masy



$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$M \cdot \vec{r}_s = m_1 \cdot \vec{r}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \quad | dt$$

$$M \cdot \vec{v}_s = m_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \quad | dt$$

$$M \cdot \vec{a}_s = m_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

Ruch środka masy odbywa się pod wpływem wektorowej sumy wszystkich sił działających na układ - również sił wewnętrznych.

Jednak z III zasady dynamiki  $\Rightarrow$  siły wewnętrzne się równoważą

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_{zew}$$



# Ruch środka masy

- Środek masy układu porusza się tak, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne na nią działały.
- Pęd środka masy

$$\vec{p}_s = M \cdot \vec{V}_s \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_s}{dt} = M \frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{F}_{zew}$$

$$\vec{F}_{zew} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_s}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{p}_s = \text{const}$$

Zasada zachowania pędu

## Przykład:

Siedzący na dziobie canoe o masie  $m$  i długości  $L$  wioślarz o masie  $M$  wstał i przeszedł z szybkością  $V_w$  na jego drugi koniec. Oblicz z jaką szybkością i o ile przesunęło się canoe.

$$\text{przesunięcie} \quad a = \frac{M \cdot L}{M + m} \quad \text{szybkość} \quad V_c = \frac{V_w \cdot a}{L - a}$$

# Ruch środka masy



Gdy rzucimy kij baseballowy środek masy porusza się po torze parabolicznym a tory wszystkich innych punktów kija są znacznie bardziej złożone. Pęd środka masy

HR tom.1

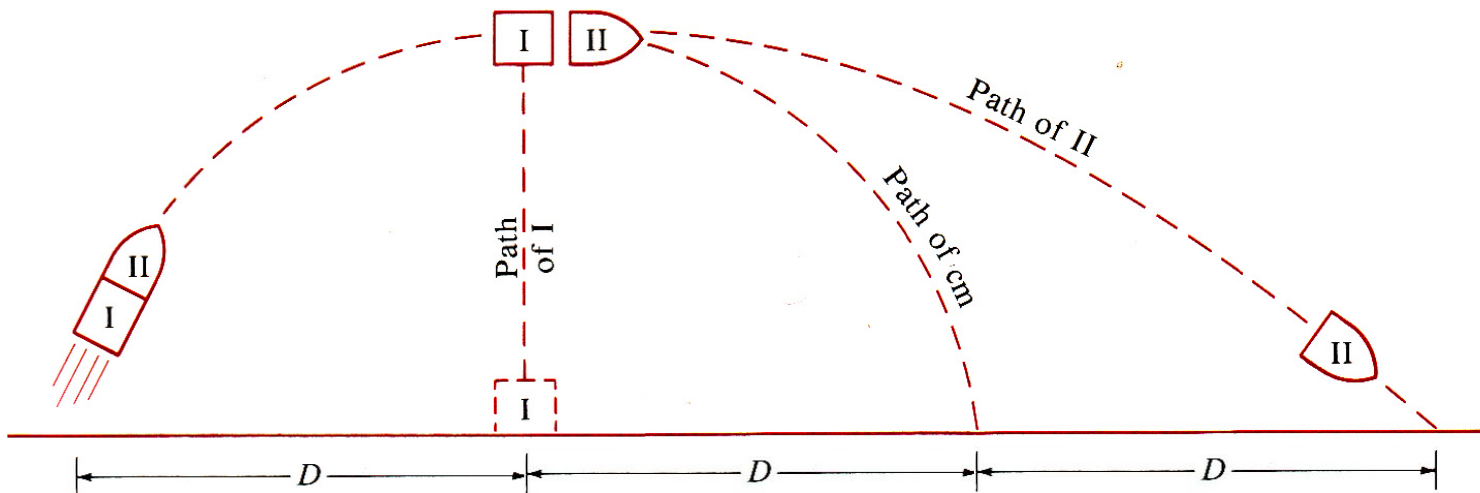


# Ruch środka masy

## Przykład:

Wystrzelona po torze parabolicznym rakieta w najwyższym punkcie toru rozpada się na dwie równe części. Jedna z nich spada pionowo na powierzchnię Ziemi, a druga porusza się dalej. Przedyskutuj ten przypadek oraz narysuj:

- Dalszy tor środka masy obu części rakiet,
- Tor drugiej części rakiety.
- W jakiej odległości od miejsca startu wyląduje druga część rakiety?

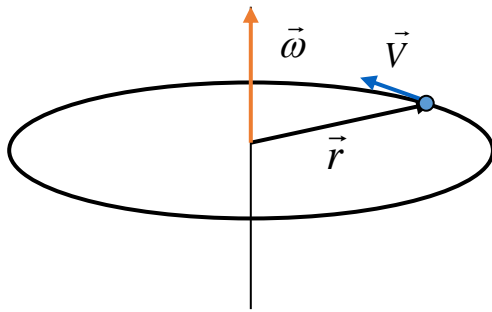




# Ruch obrotowy – moment pędu



- Odpowiednikiem **pędu** w ruchu postępowym jest **moment pędu** w ruchu obrotowym



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Skoro  $\vec{r} \perp \vec{p}$  to  $L = r \cdot mV$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skoro  $\vec{\omega} \perp \vec{r}$  oraz  $\omega \parallel \vec{L}$

to  $V = \omega \cdot r$  oraz  $L = r^2 m \omega$

W ruchu postępowym siłę wiążemy z liniowym przyspieszeniem ciała.

Jaką wielkość wiążemy z przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym ?



# Ruch obrotowy – moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

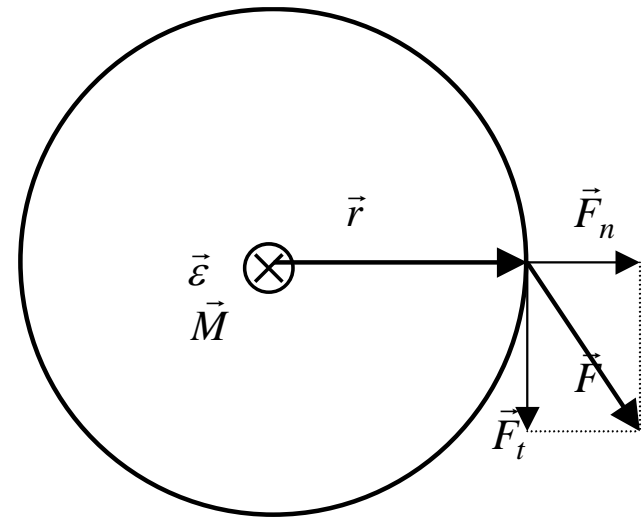
Jeżeli  $\vec{r} \perp \vec{F}$  to  $M = r \cdot F$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \text{oraz} \quad \vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$$

$$\text{to} \quad M = r^2 m \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = I \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_t + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_t + 0$$

Moment siły w tym ruchu nadaje siła styczna.





# Ruch obrotowy – moment siły

## Równanie ruchu obrotowego

Jeżeli zmienia się moment pędu układu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \neq const$

to działa moment siły  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$

$$\text{czyli } \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) + \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \underbrace{(\vec{v} \times m \cdot \vec{v})}_0 + (\vec{r} \times \vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \neq 0$$

Ostatecznie:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

## **Zasada zachowania momentu pędu.**

Jeżeli  $\vec{L} = const$  to  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{zew} = 0$



# Ruch obrotowy – moment siły

## Przykład:

Stojący pionowo dysk o masie  $m$  opiera się o schodek o wysokości równej połowie promienia dysku.

Na oś dysku działa poziomo siła  $F$  aby wtoczyć dysk ruchem jednostajnym na schodek. Obliczyć wartość tej siły.

## Rozwiązanie:

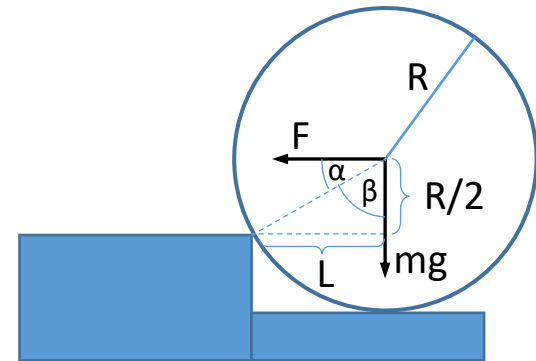
Dysk wtacza się na schodek  $\longrightarrow \vec{M} = \vec{M}_F + \vec{M}_g$

$$\vec{M}_F = \vec{R} \times \vec{F} \quad M_F = R \cdot F \cdot \sin \alpha = R \cdot F \cdot \frac{1}{2}$$

Przeciwdziała moment siły grawitacji  $\vec{M}_g = \vec{R} \times m\vec{g}$

$$M_g = R \cdot mg \cdot \sin \beta = R \cdot mg \cdot \sin(90 - \alpha) = R \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{L}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} \quad R \cdot F \cdot \frac{1}{2} = R \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad F = mg \cdot \sqrt{3}$$

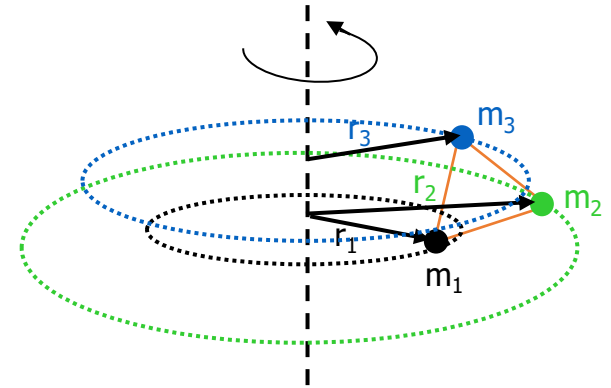


# Ruch obrotowy – moment bezwładności



Energia kinetyczna  $i$ -tego punktu materialnego:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$



Energia układu punktów materialnych obracających się z taką samą  $\omega$

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_i m_i \cdot r_i^2}_I \right) \cdot \omega^2$$

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

Dla ciągłego rozkładu mas

$$I = \int r^2 dm$$

Moment bezwładności zależy od:

- wyboru osi obrotu
- kształtu ciała
- rozmieszczenia masy ciała

$$E_k = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Twierdzenie Steinera (o osiach równoległych)

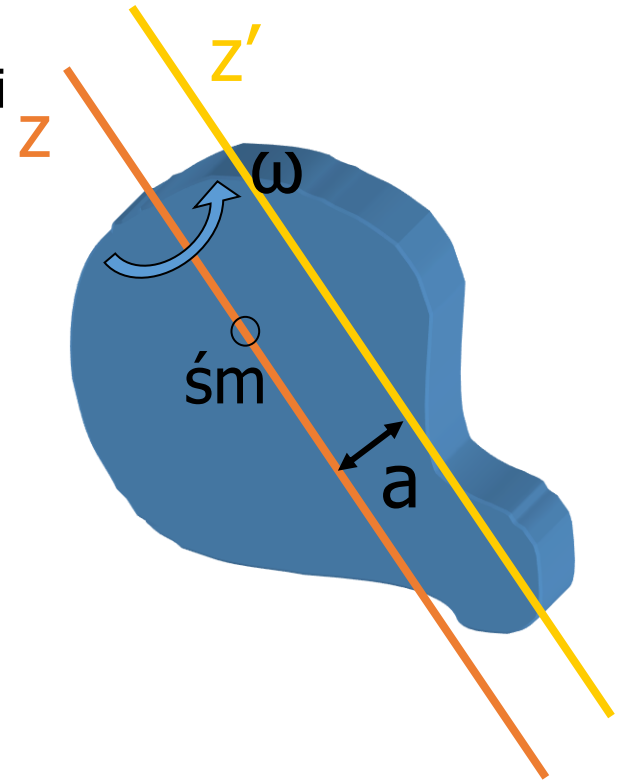


Gdy obrót bryły o masie  $M$  następuje wokół osi  $Z$  przechodzącej przez środek masy to

$$I_Z = I_0$$

Jeżeli bryła zacznie się obracać wokół osi  $Z'$ , równoległej do  $Z$  i oddalonej od niej o odległość  $a$  to

$$I_{Z'} = I_0 + Ma^2$$



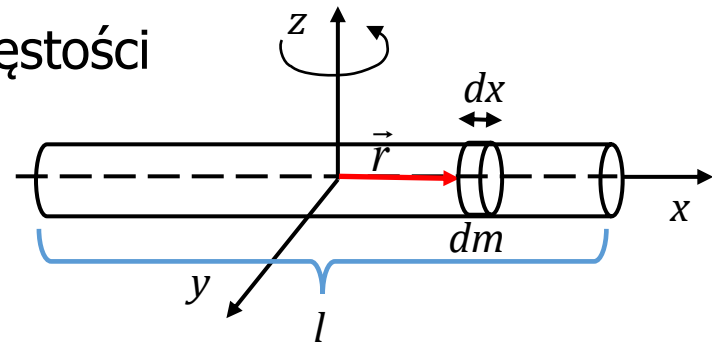
## Przykład

Toczenie się bez poślizgu walca można traktować jako obrót wokół chwilowej osi obrotu – punktu styczności z podłożem.



# Liniowy rozkład masy

Cienki jednorodny pręt o długości  $l$  i gęstości liniowej  $\lambda$  obraca się wokół osi  $x$



$$I_{xx} = 0$$

oraz 
$$I_{yy} = I_{zz} = \int r^2 dm$$

$$\rho = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

$$I_{xx} = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} \left( \frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{m}{3l} \frac{2l^3}{8} \rightarrow I_{xx} = \frac{ml^2}{12}$$

Moment bezwładności względem końca z twierdzenia Steinera:

$$I_k = I_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$



# Powierzchniowy rozkład masy

Cienki jednorodny dysk o promieniu  $R$  i masie  $M$  oraz jednorodnej gęstości powierzchniowej  $\sigma$

$$\sigma = \frac{M}{s} = \frac{dm}{ds}$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm$$

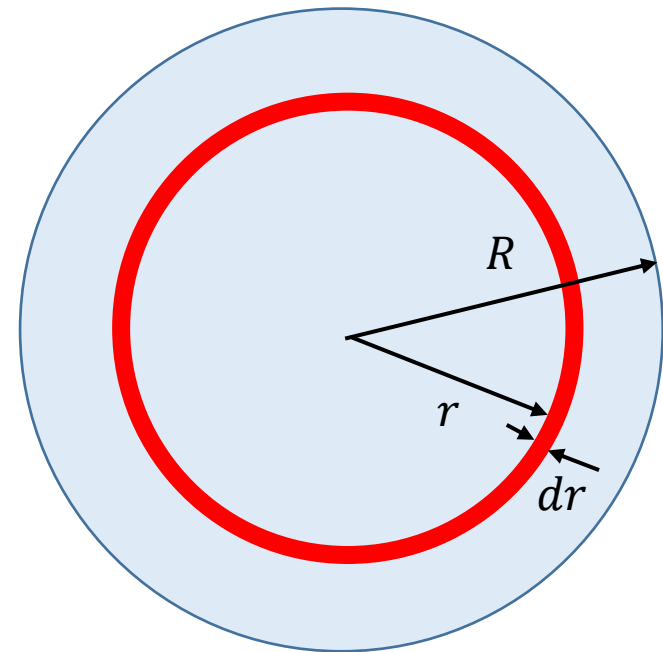
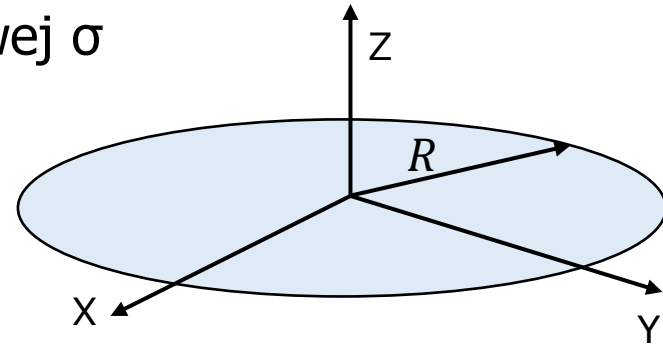
$$dm = \sigma \cdot ds$$

$$ds = 2\pi r \cdot dr$$

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

więc

$$I_{zz} = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$





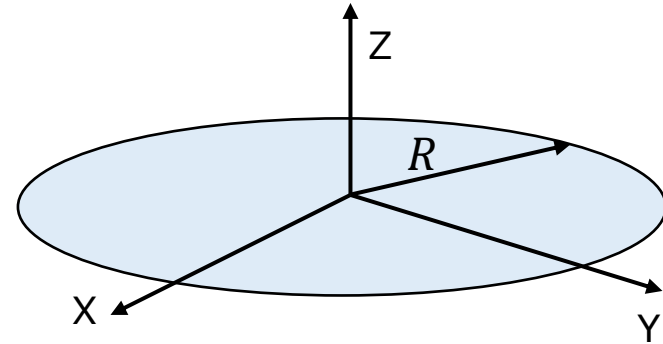


# Powierzchniowy rozkład masy

Moment bezwładności różni się w zależności od wybranej osi obrotu

Dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int r^2 dm$$



Dla dysku:

$$I_{xx} = I_{yy}$$

więc

$$2I_{xx} + I_{zz} = 2 \int r^2 dm \quad \text{ale już policzone} \quad I_{zz} = \int r^2 dm = \frac{MR^2}{2}$$

$$2I_{xx} = 2I_{zz} - I_{zz}$$

$$2I_{xx} = I_{zz} \quad I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4}$$

# Powierzchniowy rozkład masy



Gęstość powierzchniowa powłoki o promieniu  $R$

wynosi 
$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

Skoro jest symetria kulista to:

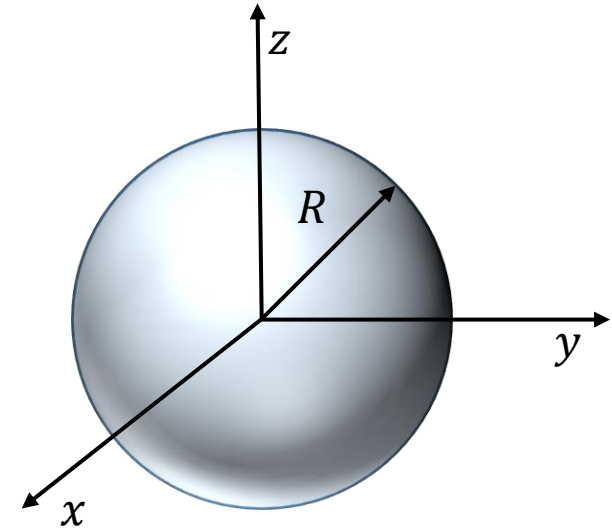
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int R^2 dm$$

$$3I_{xx} = 2R^2 \int dm$$

$$3I_{xx} = 2R^2 M$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$





# Objętościowy rozkład masy

Kula o promieniu  $R$  i gęstości objętościowej  $\rho$

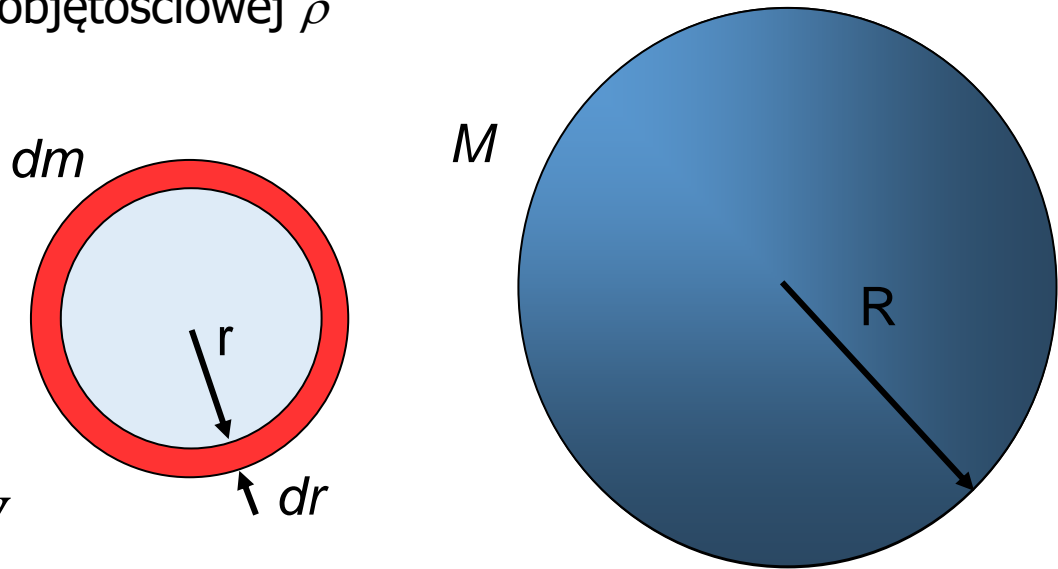
$$I_{sfery} = \frac{2}{3}MR^2$$

$$dI = \frac{2}{3}r^2 dm \quad I = \int dI$$

$$I = \int \frac{2}{3}r^2 dm = \int \frac{2}{3}r^2 \rho dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \boxed{\frac{2}{5}MR^2}$$





# Objętościowy rozkład masy

Inny sposób obliczeń

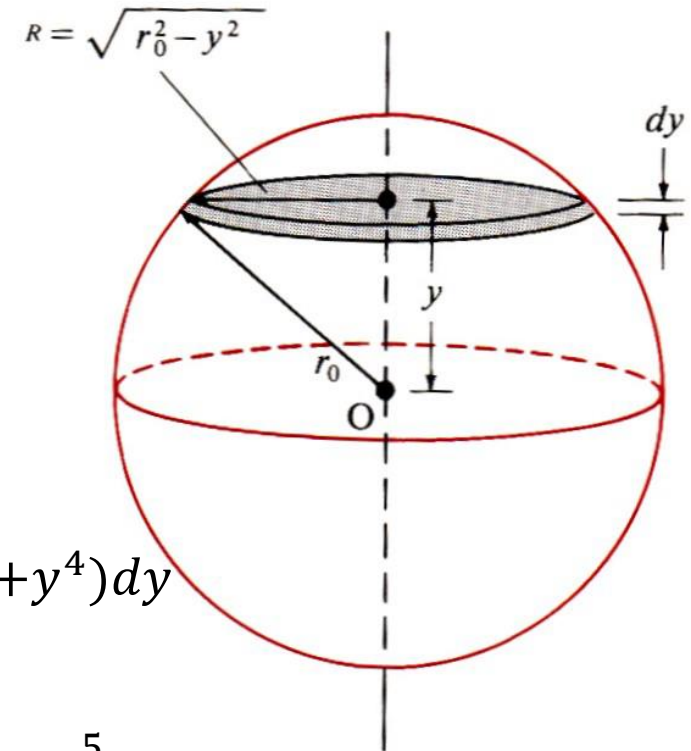
Kulę o promieniu  $r_0$  składamy z plastrów o bieżącym promieniu  $R$  i grubości  $dy$ :

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dy = \rho \pi (r_0^2 - y^2) dy$$

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{\rho \pi}{2} R^2 R^2 dy = \frac{\rho \pi}{2} (r_0^4 - 2r_0^2 y^2 + y^4) dy$$

$$I = \int dI = \int_{-r_0}^{r_0} \frac{\rho \pi}{2} (r_0^4 - 2r_0^2 y^2 + y^4) dy = \frac{8}{15} \rho \pi r_0^5$$

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \longrightarrow \boxed{I = \frac{2}{5} M r_0^2}$$

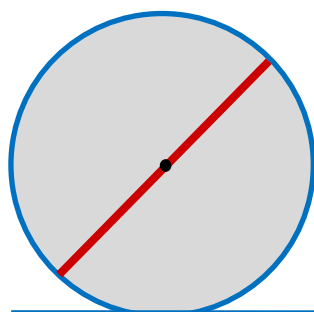




# Toczenie bez poślizgu

---

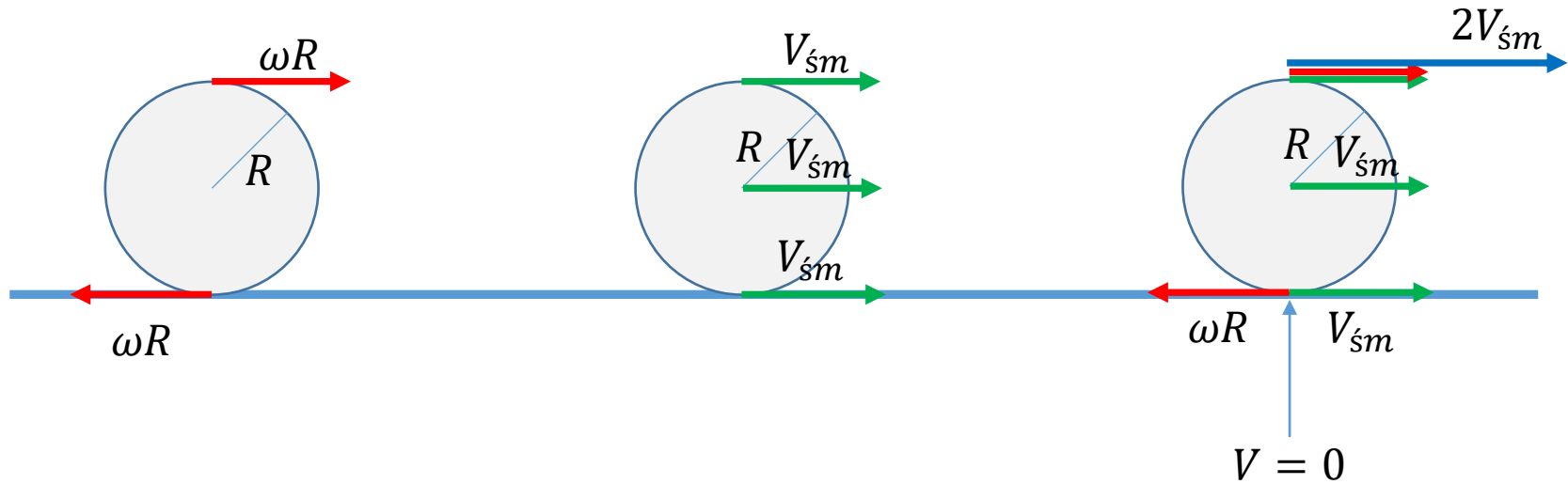
Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy. Przyczyną toczenia jest występowanie tarcia statycznego.



$2R$

śm

# Toczenie bez poślizgu



ruch obrotowy  
wokół osi  
przechodzącej  
przez środek  
masy

ruch postępowy

toczenie bez  
poślizgu jako  
złożenie ruchów

$$V_{śm} = \omega R$$

$$a_{śm} = \varepsilon R$$

# Energia toczącego się ciała



energia kinetyczna ruchu postępowego + energia kinetyczna ruchu obrotowego = energia kinetyczna całkowita

$$E_{kp}$$

$$E_{kp} = \frac{mV_{śm}^2}{2}$$

$$E_{ko}$$

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_{kc}$$

$$E_{kc} = E_{kp} + E_{ko}$$

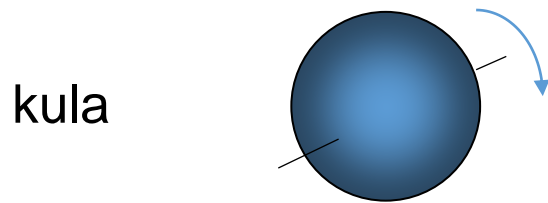
$$V_{śm} = \omega R$$

$$E_{kc} = \frac{mV_{śm}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_{kp} = \frac{mR^2\omega^2}{2}$$

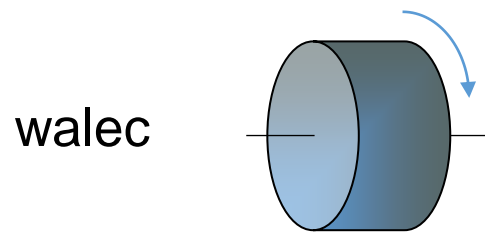
$$E_{kc} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

# Całkowita energia kinetyczna toczącego ciała



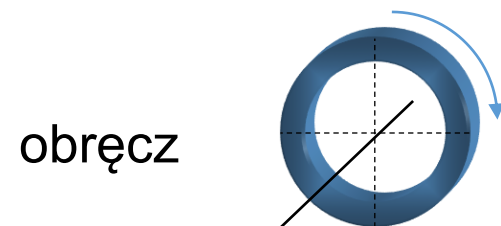
$$I_k = \frac{2}{5} mR^2$$

$$\begin{aligned} E_{kk} &= \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{2mR^2}{5} \cdot \frac{\omega^2}{2} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \right) mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mV^2 \end{aligned}$$



$$I_w = \frac{1}{2} mR^2$$

$$E_{kw} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} = \frac{3}{4} mV^2$$



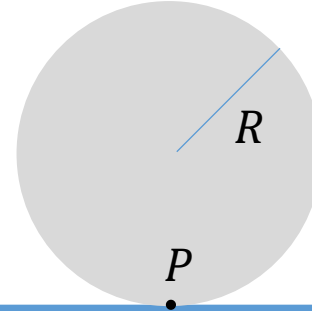
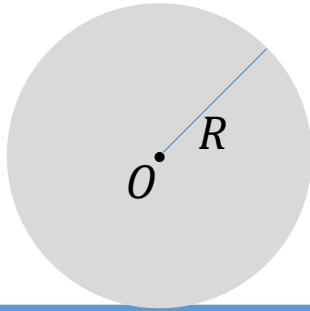
$$I_o = mR^2$$

$$E_{ko} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mV^2$$

$$E_{kk} < E_{kw} < E_{ko}$$



# Energia kinetyczna toczącego się koła



Oś obrotu w środku koła

Chwilowa oś obrotu

$$E_{kc} = E_{kp} + E_{ko}$$

Moment bezwładności z twierdzenia Steinera:

$$E_{kp} = \frac{mV_{śm}^2}{2} \quad E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2}$$

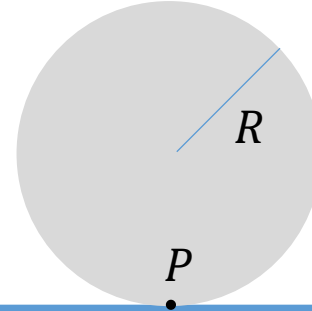
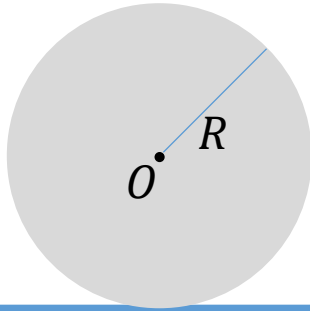
$$I_P = I_O + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2$$

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{2}mR^2 \frac{\omega^2}{2} = \boxed{\frac{3}{4}mV^2}$$

$$E_{kc} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} = \boxed{\frac{3}{4}mV^2}$$

# Energia kinetyczna – chwilowa oś obrotu



Oś obrotu w środku

Chwilowa oś obrotu

kula:

Moment bezwładności z  
twierdzenia Steinera:

$$I_k = \frac{2}{5} mR^2$$

$$I_P = I_O + mR^2 = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2$$

obręcz:

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{7}{5} mR^2 \frac{\omega^2}{2} = \boxed{\frac{7}{10} mV^2}$$

$$I_O = mR^2$$

$$I_P = I_O + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

$$E_{ko} = \boxed{mV^2}$$

# Toczenie po równi pochyłej – równania ruchu



- względem środka masy

ruch postępowy

ruch obrotowy

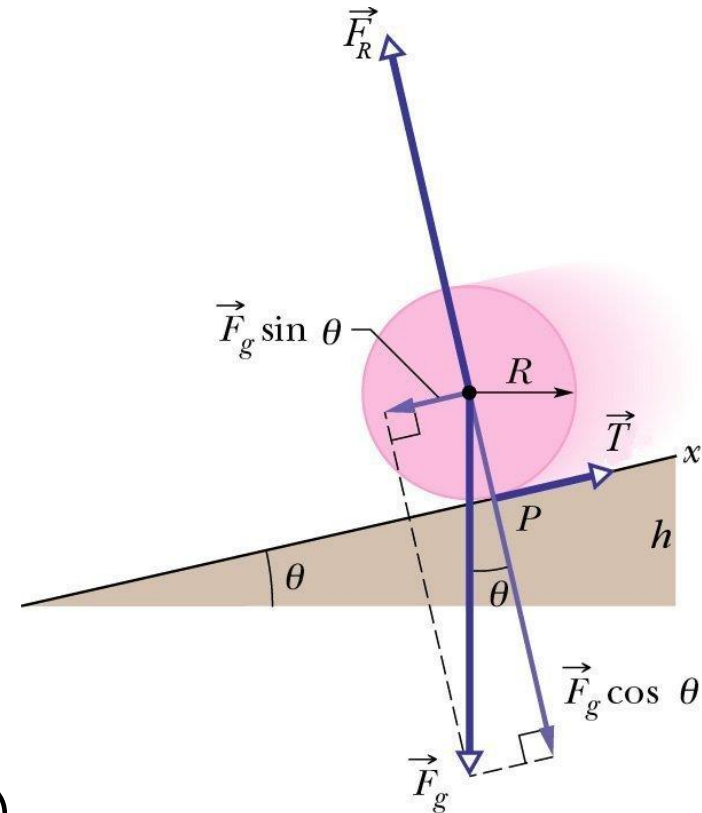
$$F_R - mg \cos \theta = 0$$

$$mg \sin \theta - T = ma$$

$$\tau = I_{sr.m.} \alpha = I_{sr.m.} \frac{a}{R}$$

Toczenie bez poślizgu  $RT = I_{sr.m.} \frac{a}{R}$

np. dla walca  $a = \frac{2}{3} g \sin \theta$



- względem chwilowej osi obrotu (punkt P)

tylko ruch obrotowy  $\tau = I_P \alpha = I_P \frac{a}{R}$

względem punktu P  $Rmg \sin \theta = I_P \frac{a}{R}$  dla walca  $a = \frac{2}{3} g \sin \theta$



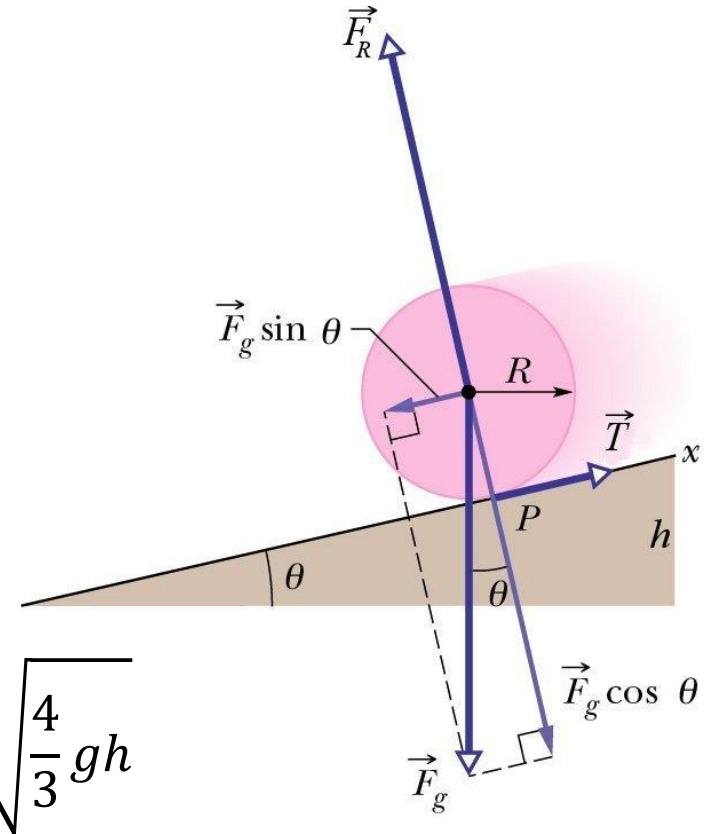
# Toczenie po równi pochyłej – ZZE

- względem środka masy

ruch postępowy      ruch obrotowy

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m v_{sr.m.}^2 \quad E_{ko} = \frac{1}{2} I_{sr.m.} \omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{sr.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{sr.m.} \omega^2$$



Toczenie bez poślizgu

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{np. dla walca} \quad v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

- względem chwilowej osi obrotu (punkt P)

tylko ruch obrotowy  $E_{ko} = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad mgh = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$

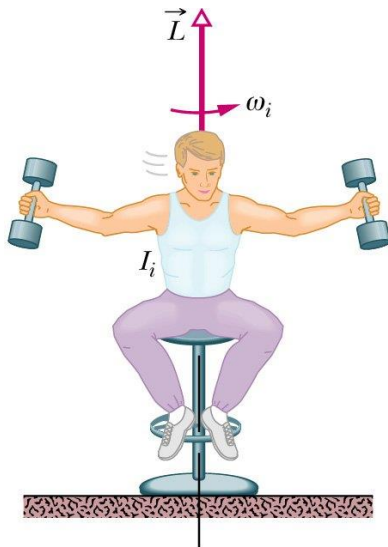
# Zasada zachowania momentu pędu



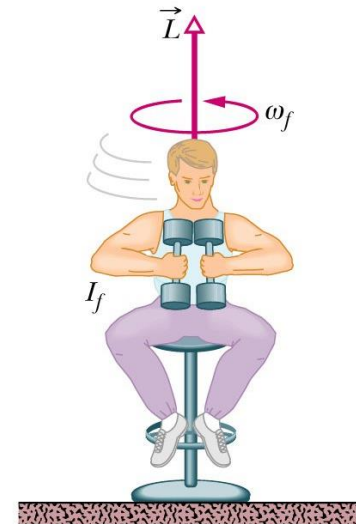
W układzie inercyjnym wypadkowy moment sił:

$$\vec{M}_{zew} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{jest równy zmianie momentu pędu bryły sztywnej}$$

Jeżeli  $\vec{M}_{zew} = 0$  to  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  czyli  $\vec{L} = const$



$$L = I\omega$$



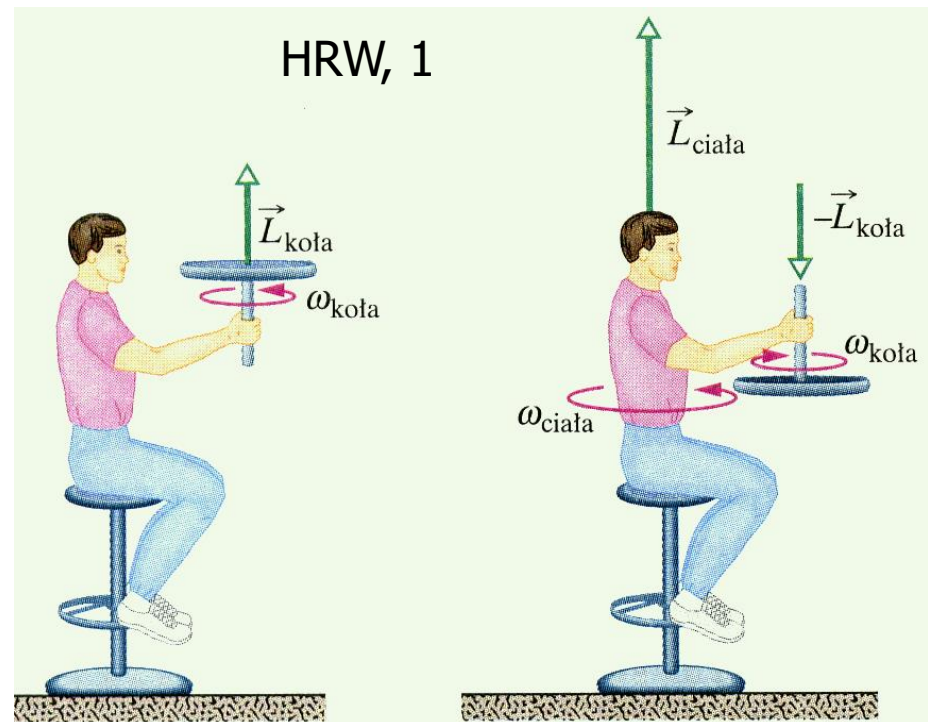
<https://www.youtube.com/watch?v=Eug4xY9mJE>



# Przykład

Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności  $I_k = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  względem swojej osi. Koło obraca się z prędkością kątową  $\omega_k = 3.9$  obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi  $I_c = 6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

Obliczyć prędkość kątową  $\omega_{\text{ciała}}$  po obróceniu koła.  
W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?



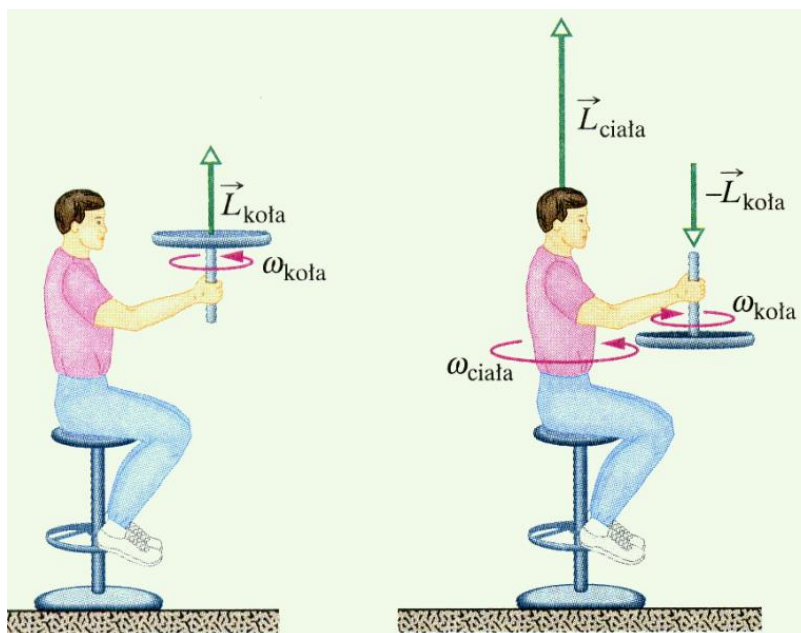


# Przykład

## Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \vec{L}_{\text{koła}} \\ \text{przed} \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \vec{L}_{\text{ciała}} \\ \text{po} \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ -\vec{L}_{\text{koła}} \end{array}$$



$$\vec{L}_{\text{przed}} = \vec{L}_{\text{po}}$$

$$L_k = L_c - L_k$$

$$L_c = 2L_k$$

$$\omega_{\text{ciała}} I_c = 2\omega_k I_k$$

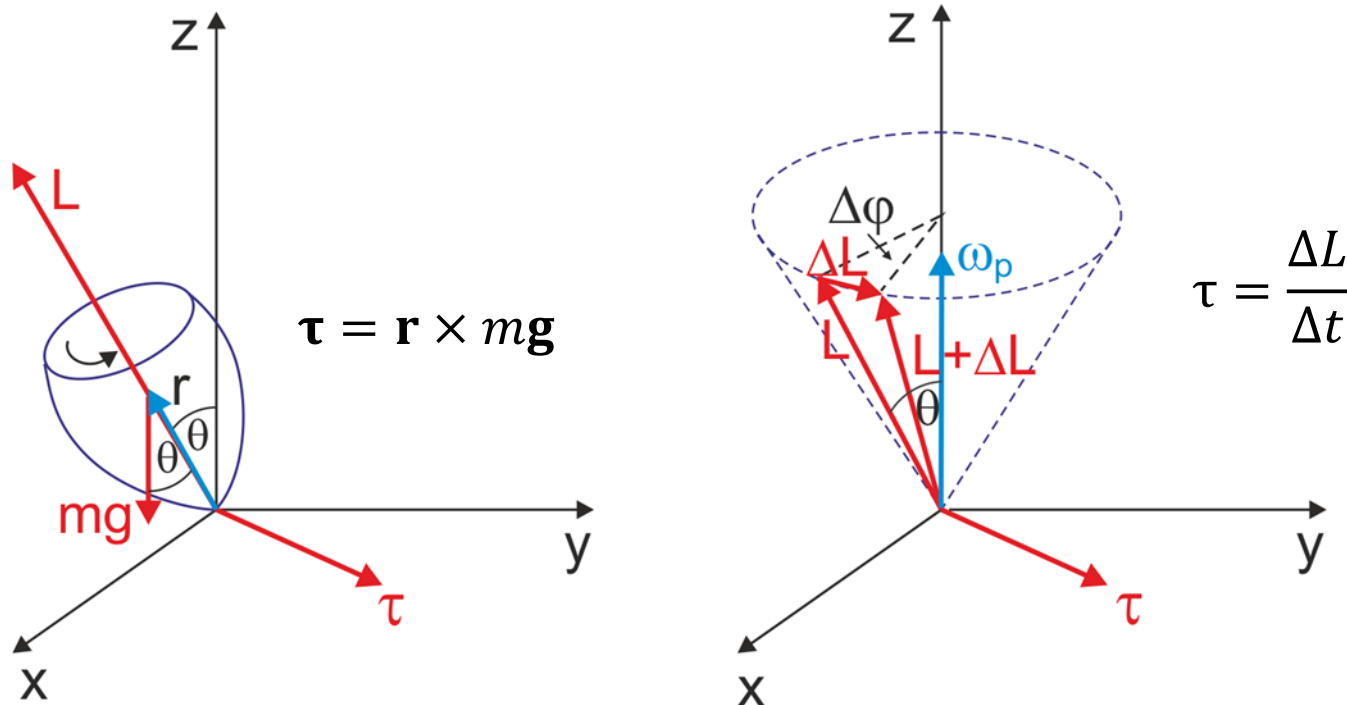
$$\omega_{\text{ciała}} = 2\omega_k \frac{I_k}{I_c}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=4S63WHzx49I>

# Precesja



Skomplikowany ruch bo oś obrotu nie jest nieruchomą w inercyjnym układzie odniesienia



$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \cong \frac{\Delta L}{L \sin\theta} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin\theta} \quad \longrightarrow \quad \tau = \omega_p L \sin\theta \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$$



# Ruch postępowy a ruch obrotowy



Ruch postępowy (stały kierunek)			Ruch obrotowy (stała oś obrotu)		
Położenie	$x$	$[m]$	Położenie kątowe	$\alpha$	$[rad]$
Prędkość liniowa	$V = \frac{dx}{dt}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
Przyspieszenie liniowe	$a = \frac{dV}{dt}$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$
Masa	$m$	$[kg]$	Moment bezwładności	$I$	$[kg \cdot m^2]$

# Ruch postępowy a ruch obrotowy



Ruch postępowy (stały kierunek)			Ruch obrotowy (stała oś obrotu)		
Siła	$\vec{F} = m\vec{a}$	[N]	Moment siły	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$	[Nm]
Pęd	$\vec{p} = m\vec{V}$	$\left[ kg \frac{m}{s} \right]$	Moment pędu	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	$\left[ kg \frac{m^2}{s} \right]$
Energia kinetyczna	$E_k = \frac{mV^2}{2}$	[J]	Energia kinetyczna	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$	[J]
Uogólniona zasada dynamiki	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	[N]	Uogólniona zasada dynamiki	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	[Nm]