

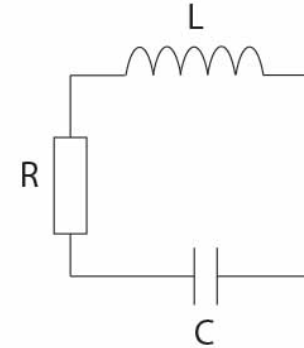
Drgania oscylator harmoniczny

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>

Drgania



Drgania - zjawiska powtarzające się okresowo



Drgania harmoniczne – wielkość drgająca zmienia się sinusoidalnie

- Drgania mechaniczne
- Drgania elektromagnetyczne

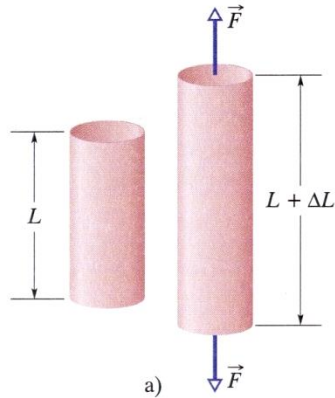
Ruch okresowy (periodyczny) - stan układu powtarza się w jednakowych odstępach czasu.

Wielkości w ruchu okresowym harmonicznym

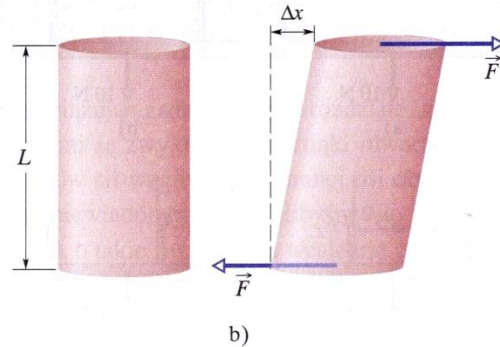


- Okres – czas trwania jednego pełnego drgania
- Częstotliwość – liczba drgań w jednostce czasu
- Położenie równowagi – położenie w którym na punkt materialny nie działa żadna siła
- Przemieszczenie – odległość od położenia równowagi w dowolnej chwili
- Amplituda – maksymalne wychylenie z położenia równowagi

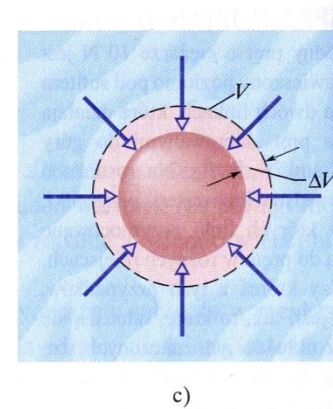
Przyczyna drgań



napężenie
rozciągające



napężenie
ścinające



napężenie
objętościowe

Napężenie to siła odkształcająca przypadająca na jednostkową powierzchnię na którą działa

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Napężenie zależy od materiału (moduł sprężystości) i odkształcenia

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

E – moduł Younga



Naprężenie rozciągające (ściskające)

Naprężenie σ definiuje się jako:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

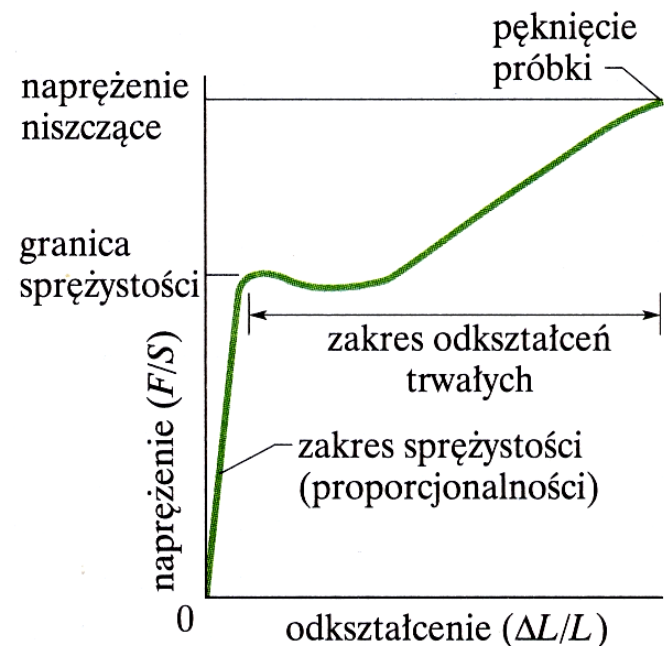
gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa $\Delta L/L$ – względna zmiana długości

W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje prawo Hooke'a

E- moduł Younga

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$





Naprężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścinania) naprężenie σ definiuje się również jako:

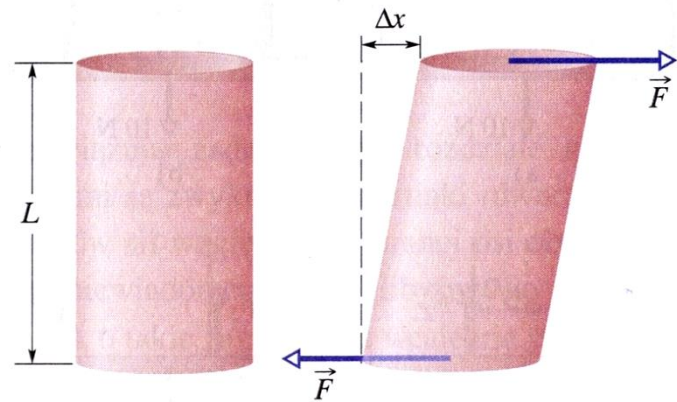
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ale siła działa równoległe do powierzchni S

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa $\Delta x/L$

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L}$$

moduł ścinania



Naprężenie objętościowe



Naprężeniem jest ciśnienie p ciecży

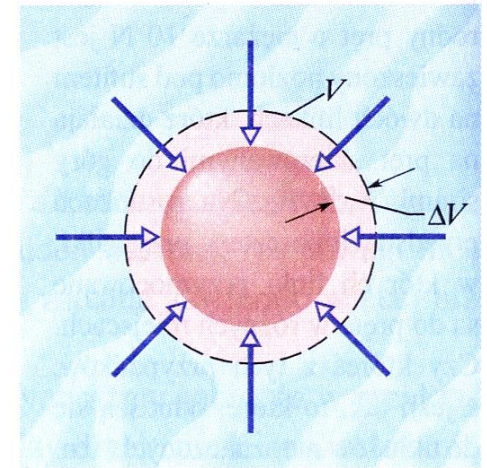
$$p = \frac{F}{S}$$

Jednostką ciśnienia jest $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Miarą odkształcenia jest względna zmiana objętości $\Delta V/V$

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

K - moduł sprężystości objętościowej lub moduł ściśliwości





Przykład

Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie $4,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$. Ile wynosi, związana z tym ciśnieniem, względna zmiana objętości $\Delta V/V$ wody a ile kulki wykonanej ze stali? Moduł ścisłości wynosi $2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ dla wody, a dla stali $16 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

dla wody

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^9} = 1.8\%$$

dla kuli stalowej

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{16 \cdot 10^{10}} = 0.025\%$$

Oscylator harmoniczny



Dla małych wychyleń (w granicach sprężystości)

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

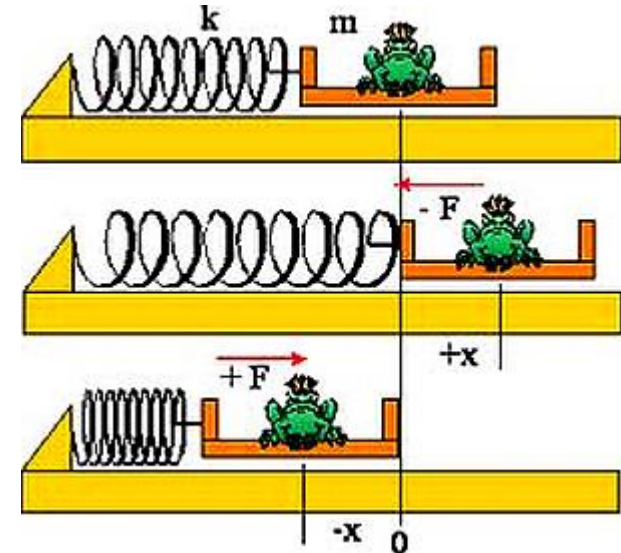
$$F = \frac{E \cdot S}{L} \Delta L \quad k = \frac{E \cdot S}{L}$$

Siła proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi.

Zwrot siły przeciwny do zwrotu wychylenia z położenia równowagi.

$$F = -kx$$

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad F\hat{i} = -kx\hat{i}$$



Równanie ruchu oscylatora



Na oscylator działa siła: $F = -kx$

Z II zasady dynamiki Newtona: $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$

Porównując otrzymujemy: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Jest to równanie różniczkowe drgań harmoniczných

Przyjmując: $\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0}$

Oscylator harmoniczny



Oscylator harmoniczny prosty

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Częstość drgań własnych $\longrightarrow \omega$

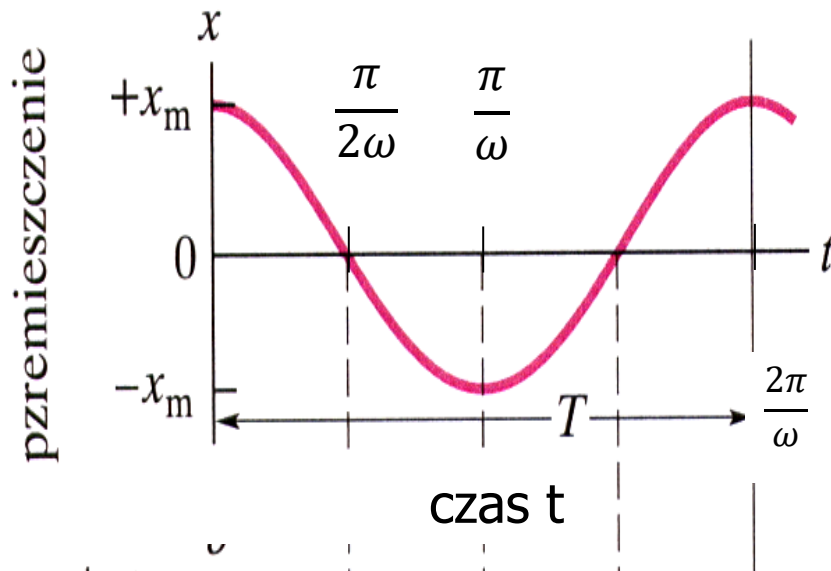
Dla układu masa m – sprężyna o stałej sprężystości k :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Stąd okres drgań T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Rozwiązanie oscylatora harmonicznego



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

wychylenie
z położenia
równowagi

amplituda

częstość

faza
początkowa

okres ruchu T : czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

amplituda : wartość bezwzględna maksymalnego wychylenia z położenia równowagi, oznaczana x_m , A

$$T = \frac{1}{\nu}$$

← częstość : liczba drgań (cykli) na sekundę (jednostka 1Hz)

Równanie ruchu oscylatora



a) rozwiązanie oscylatora
położenie:

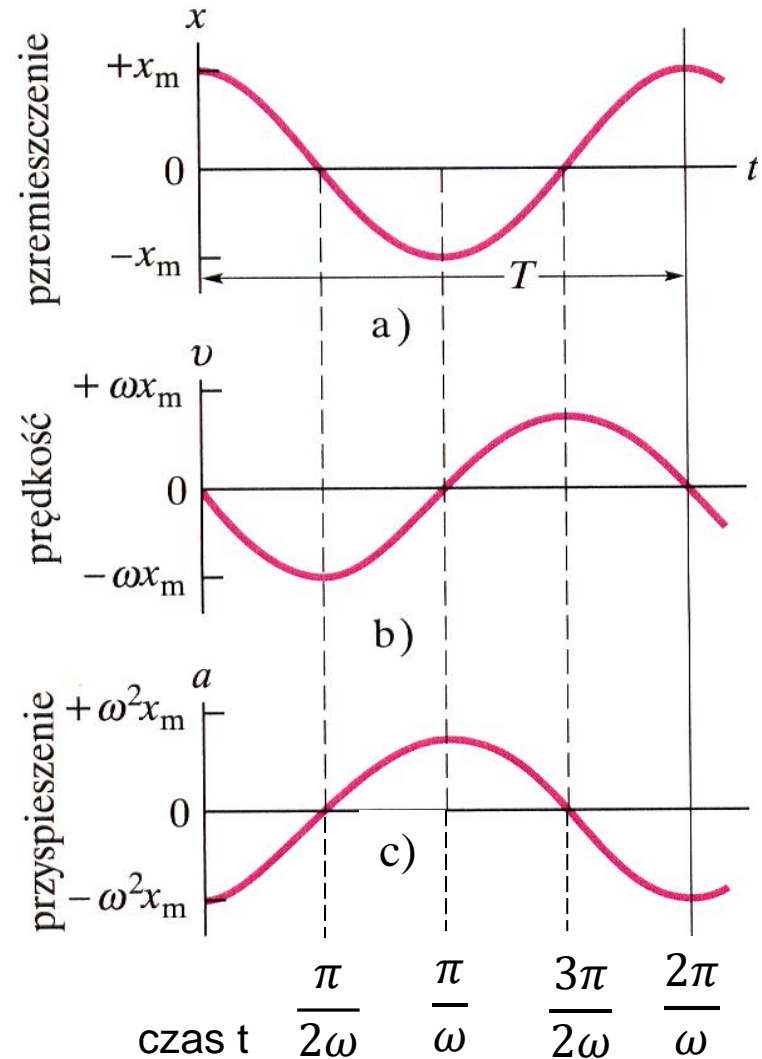
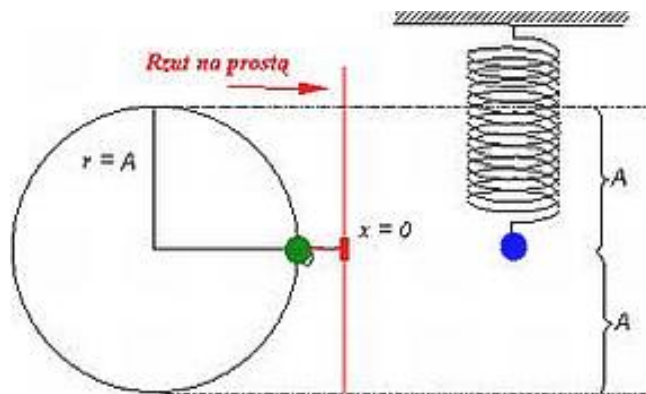
$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

b) prędkość:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

c) przyspieszenie:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$





Energia w ruchu harmonicznym

energia potencjalna sprężystości:

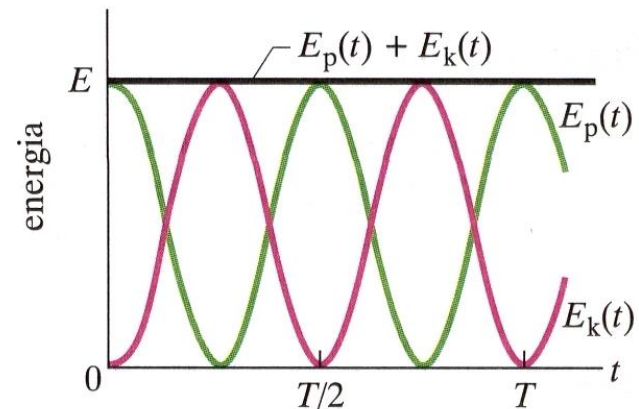
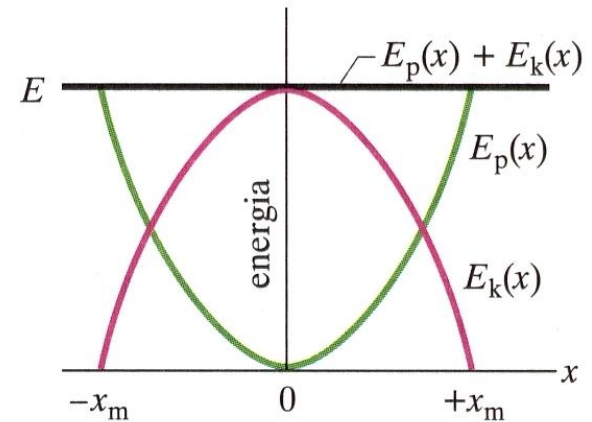
$$E_p = k \frac{x^2}{2} \quad E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

energia kinetyczna:

$$E_k = m \frac{v^2}{2} \quad E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

energia całkowita

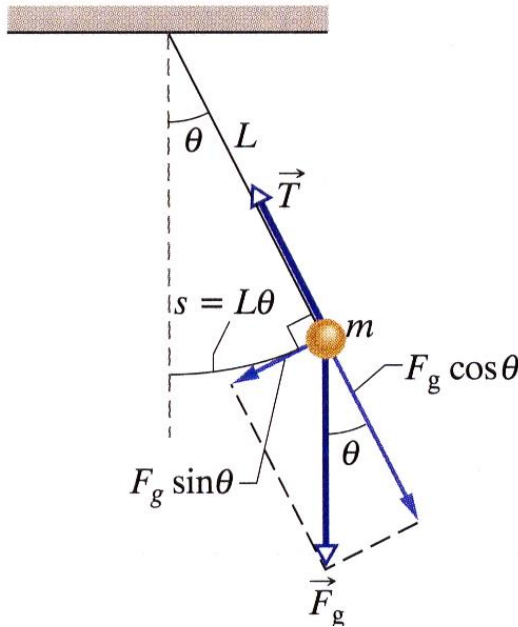
$$E_C = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2$$





Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to przykład oscylatora harmonicznego:



Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$M = -L(F_g \sin \theta) = -Lmg \sin \theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Zakładamy, że kąt θ jest mały (małe drgania) czyli $\sin \theta \approx \theta$:

$$M = -Lmg\theta$$

Wahadło matematyczne



$$M = -Lmg\theta$$

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Lmg\theta}{I} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$

$$I = mL^2 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

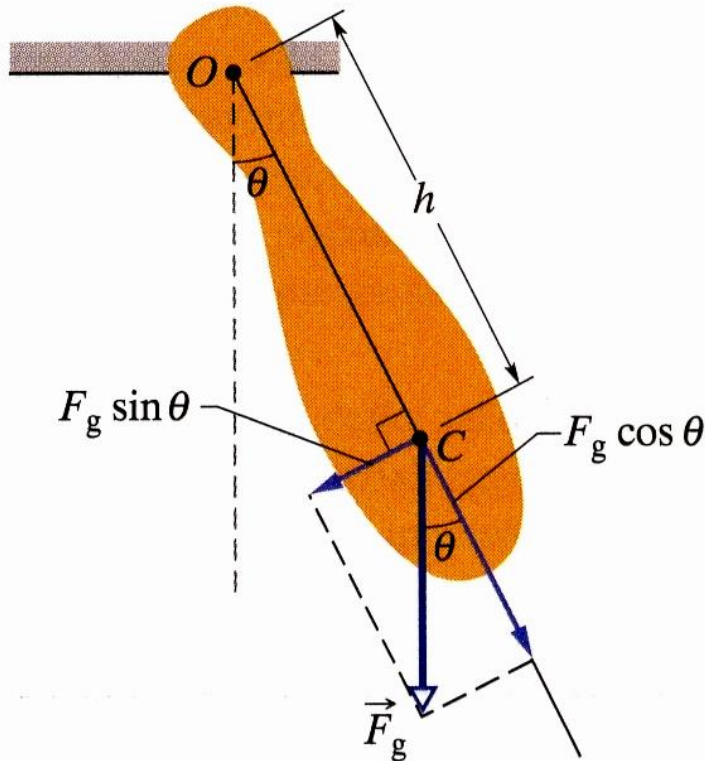
wzór dokładny dla małych wychyleń

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym



$$M = -mgh \sin \theta$$

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

dla małych kątów $\sin \theta \approx \theta$

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgh\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_{\text{śm}} + mh^2}}$$

wzór dla małej amplitudy drgań

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{śm}} + mh^2}{mgh}}$$



Przykład wahadła fizycznego

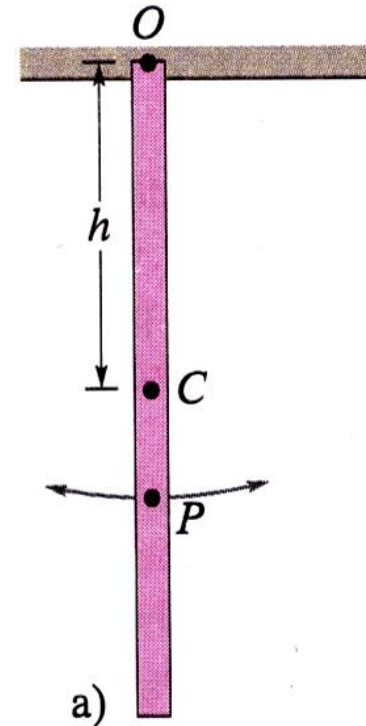
Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O , znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T , wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.

Rozwiązanie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\dot{s}m} + mh^2}{mgh}}$$

$$I_{\dot{s}m} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$h = \frac{L}{2} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2}{mg \frac{L}{2}}} \quad \longrightarrow \quad g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



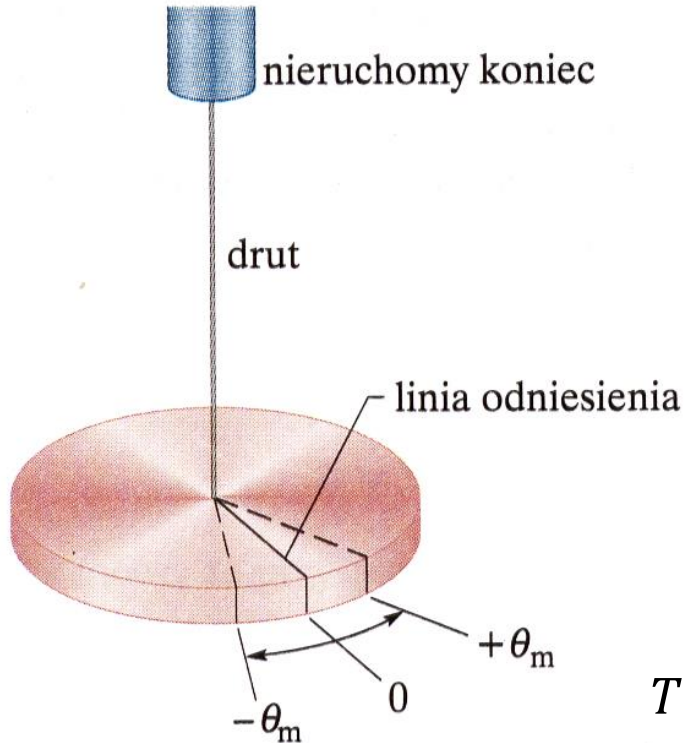
Zadanie



Cienki, jednorodny pręt o masie m i długości L zawieszono w odległości $x=1/3 L$ od końca. Pręt wychylono o niewielki kąt z położenia równowagi, a następnie puszczo swobodnie.

- a) Oblicz moment bezwładności takiego wahadła.
- b) Oblicz wypadkowy moment siły działający na wahadło.
- c) Podaj różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego stosując przybliżenie małych kątów i na jego podstawie oblicz okres drgań tego wahadła.

Wahadło torsyjne



$$M = -\kappa\theta$$

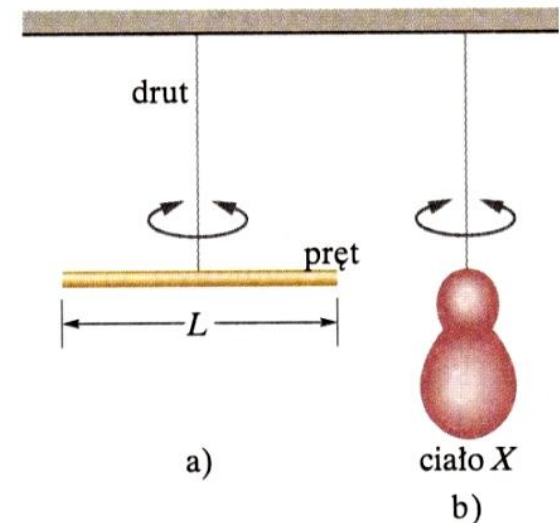
moment kierujący κ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

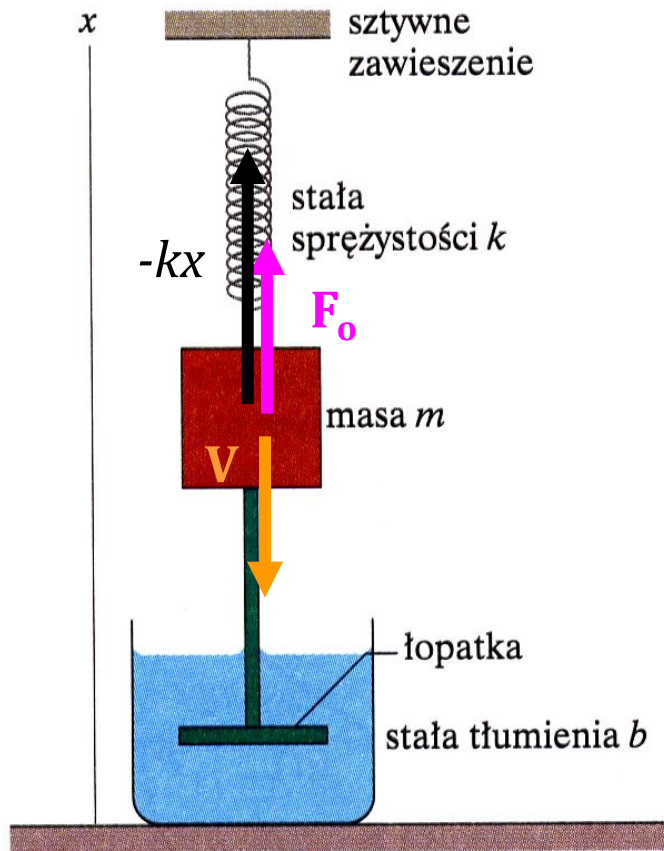
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$



Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach

Oscylator harmoniczny tłumiony



$$F_{wypadkowa} = F_{sprężystości} + F_{oporu}$$

Siła oporu – siła Stokes'a

$$F_{oporu} = -b \cdot v \text{ gdzie } b \text{ to stała tłumienia}$$

zatem

$$ma = -kx - bv$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

gdzie $\beta = \frac{b}{2m}$ to współczynnik tłumienia

Oscylator tłumiony - rozwiązanie

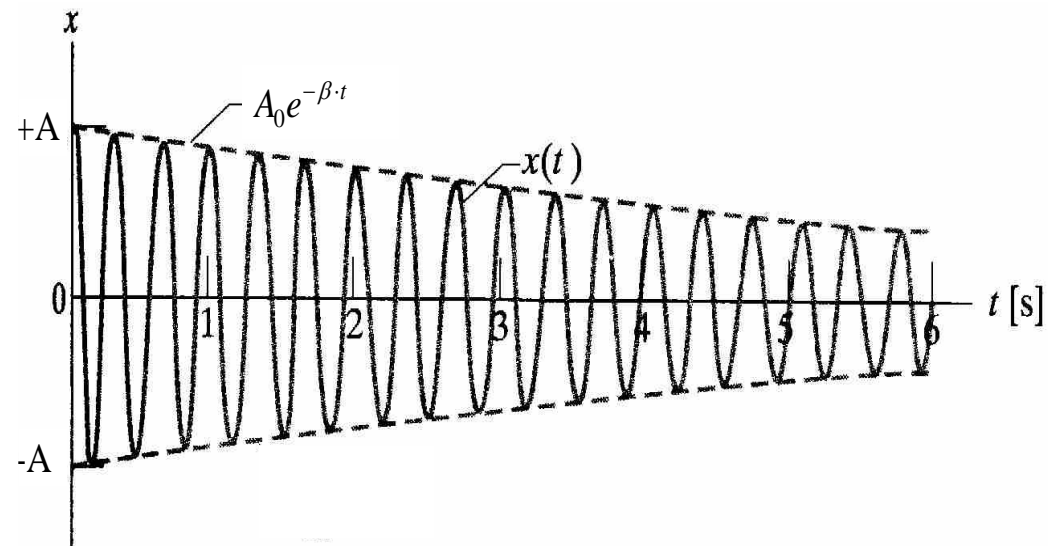


$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Dla małych wartości współczynnika tłumienia, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \phi)$$

gdzie $A(t)$ jest malejącą w czasie amplitudą oscylatora harmonicznego



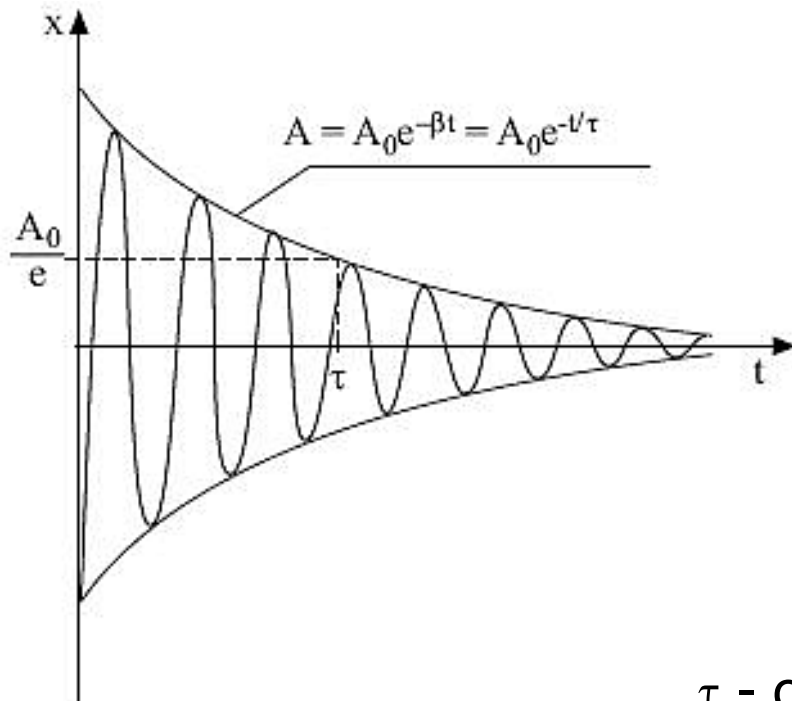
$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

oraz

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$



Oscylator tłumiony - rozwiązanie



Zależność $x = x(t)$ dla drgań tłumionych

$\omega_0 = \beta$ rozwiązanie krytyczne

$\omega_0 < \beta$ rozwiązanie aperiodyczne

$$x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \phi)$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia

rozwiązanie periodyczne – gdy:

$$\omega_0 \gg \beta \text{ bo } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

τ - czas relaksacji (amplituda maleje e – razy)

Miarą tłumienia jest logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}$$

<https://www.edukator.pl/resources/applet/drgania-tlumione>

Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego

Jeżeli chcemy podtrzymać drgania to musimy działać odpowiednią siłą zewnętrzną $F(t)$ Siłą taką nazywamy siłą wymuszającą

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

Równanie ruchu

$$ma = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t) \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t \quad \tau = \frac{m}{\gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \alpha_0 = \frac{F_0}{m} \quad \beta = \frac{1}{2\tau}$$

układ jest zasilany z częstotliwością ω różną od częstotliwości własnej ω_0

Drgania (wymuszone) odbywają się z częstotliwością siły zewnętrznej, a nie z częstotliwością własną.



Rezonans

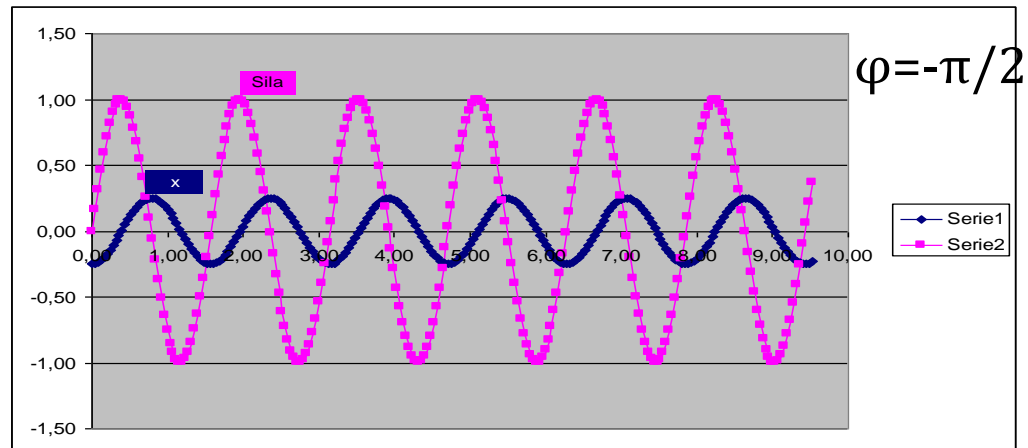
Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

- amplituda $A(\Omega)$ jest funkcją częstości wymuszenia

$$A(\Omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

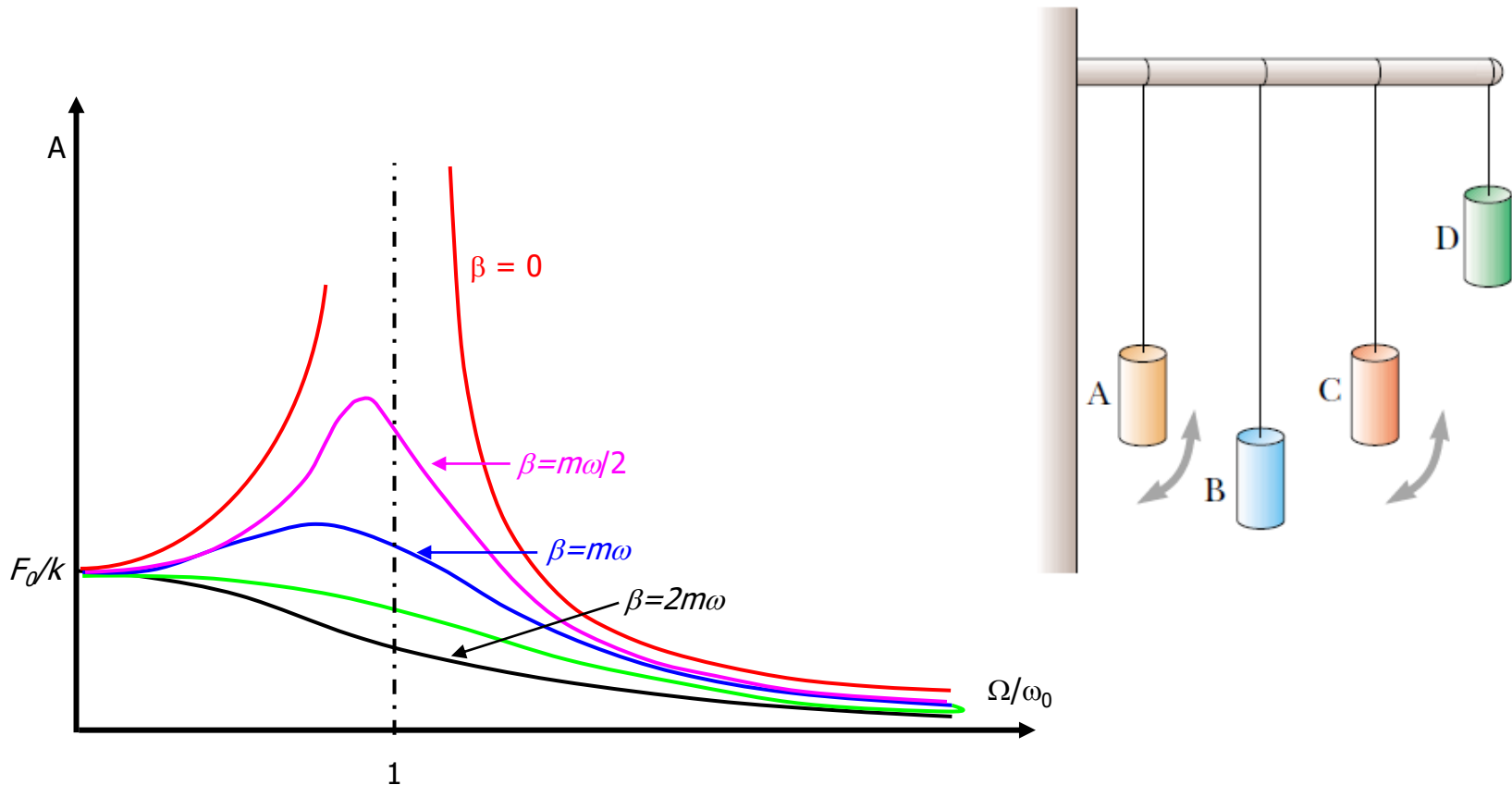
- przesunięcie fazowe $\varphi(\Omega)$ nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia. Informuje o jaki kąt maksimum wychylenia wyprzedza maksimum siły wymuszającej





Rezonans

Rezonans występuje gdy amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza że częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych



<https://www.edukator.pl/resources/applet/drgania-wymuszone>



Składanie drgań w tym samym kierunku

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

gdy amplitudy i częstości są jednakowe, a drgania są przesunięte w fazie o ϕ :

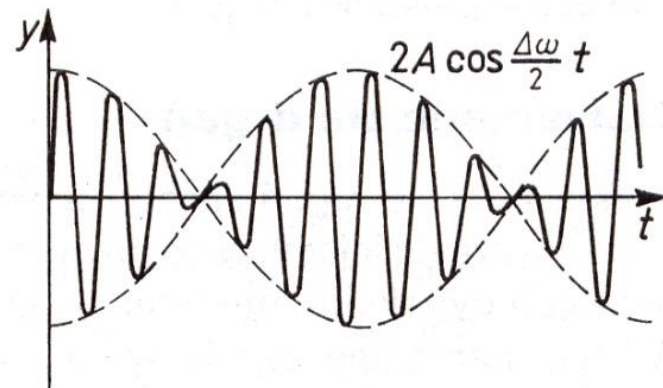
$$x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\phi}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right)$$

gdy $\phi = \pi$ - wygaszenie drgań

gdy $\phi = 2\pi$ - wzmocnienie

$$x_{wyp} = 2A \cos(\omega t)$$

Gdy drgania mają zbliżoną częstotliwość otrzymujemy drgania o modulowanej amplitudzie.





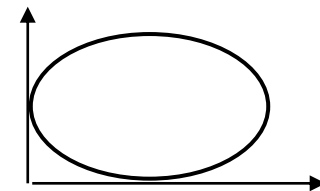
Składanie drgań prostopadłych

Składanie drgań zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

np. $x(t) = A_x \sin \omega t$ $y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1$$

Kąt φ Stosunek częstotliwości	0°	45°	90°	135°	180°
	$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{1}$				
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{2}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{3}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{2}{3}$					



Krzywe Lissajous

Jules Antoine Lissajous
(1822-1880) po raz
pierwszy zademonstrował
krzywe w roku 1857



Przykład

Do płytek odchylenia poziomego i pionowego oscyloskopu

przyłożono napięcia: $U_x = a \cdot \sin \omega t$ oraz $U_y = b \cdot \cos 2 \omega t$.

Wyznaczyć tor promienia na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie:

Równanie toru – należy wyeliminować czas z równań:

$$\frac{U_y}{b} = \cos 2 \omega t \quad \cos 2 \omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2 \sin^2 \omega t$$

$$\frac{U_x}{a} = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{U_y}{b} = 1 - 2 \left(\frac{U_x}{a} \right)^2 \quad \text{stąd} \quad U_y = b - \frac{2b}{a^2} U_x^2$$

parabola

Zadanie



Ciało o masie m umocowane do sprężyny odciągnięto z położenia równowagi na odległość L i puszczono swobodnie aby wykonywało drgania harmoniczne o okresie T . Oblicz:

- czas, w którym ciało przebędzie drogę od położenia równowagi do połowy maksymalnego wychylenia.
- prędkość ciała w połowie maksymalnego wychylenia.
- maksymalną wartość siły sprężystości.
- całkowitą energię mechaniczną drgań.
- czas po którym energia kinetyczna oscylatora będzie równa jego energii potencjalnej.