Fale elektromagnetyczne

Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka

Prawa Maxwella (całkowe)

- Prawa Gaussa

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \circ d\boldsymbol{s} = \frac{\iiint \rho dV}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \circ d\boldsymbol{s} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\oint_C \boldsymbol{E} \circ d\boldsymbol{l} = -\iint_{SC} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \circ d\boldsymbol{s}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B} \circ d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_{SC} \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \circ d\boldsymbol{s}$$

Operator ∇

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}$$

Gradient pola skalarnego jest wektorem:

$$\mathbf{grad}\, V = \boldsymbol{\nabla}\, V$$

Dywergencja pola wektorowego jest skalarem:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{E}$$

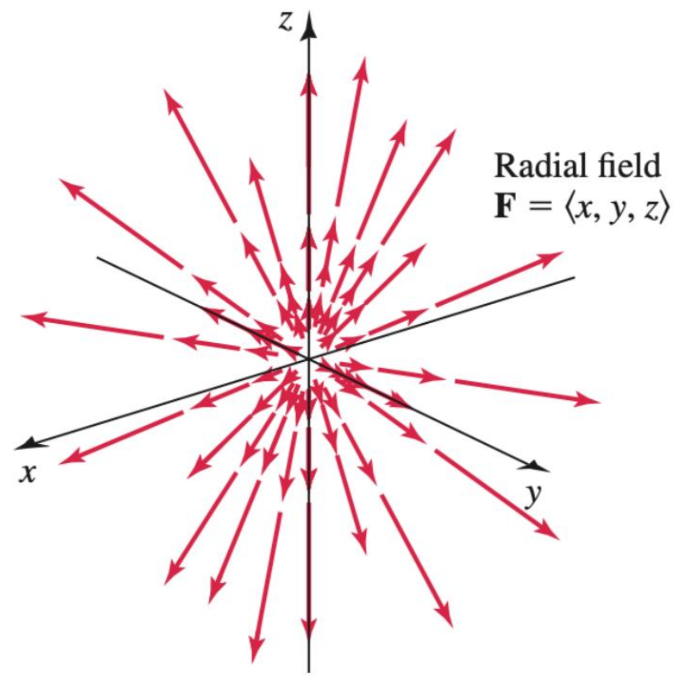
Rotacja pola wektorowego jest wektorem:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$$

Dywergencja pola wektorowego

Dywergencja: postać różniczkowa prawa Gaussa

$$\boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{E} = \lim_{V\to 0} \frac{\oiint_S \boldsymbol{E} \circ d\boldsymbol{s}}{V} = \lim_{V\to 0} \frac{Q(V)}{\epsilon_0 V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Dywergencja we współrzędnych kartezjańskich:

$$\boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Dywergencja we współrzędnych sferycznych:

$$\boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (E_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

Rotacja pola wektorowego

Rotacja pola ***B*** – różniczkowa postać prawa Ampera

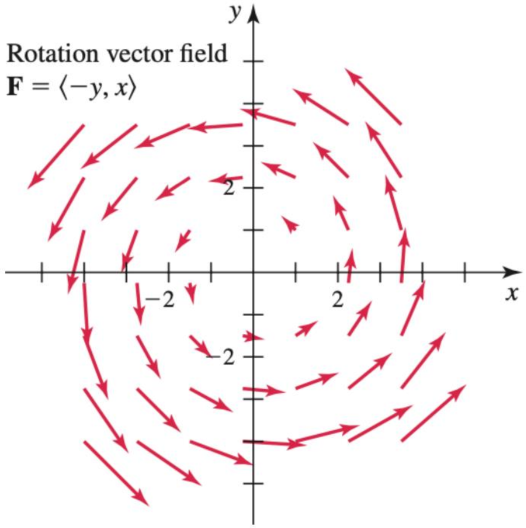
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{B}\circ d\boldsymbol{l}}{S} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Rotacja we współrzędnych kartezjańskich:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{\imath}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \widehat{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

Rotacja we współrzędnych sferycznych:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}/_{\boldsymbol{r^2}\sin\theta} & \widehat{\boldsymbol{\theta}}/_{r\sin\theta} & \widehat{\boldsymbol{\varphi}}/_{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ B_r & rB_\theta & r\sin\theta B_\varphi \end{vmatrix}$$



Zadania

- ✓ Korzystając z operatorów, wyznacz dywergencję i rotację pola elektrostatycznego wewnątrz i na zewnątrz kuli naładowanej jednorodnie w całej swej objętości. Wskazówka: rozkład pola elektrycznego można wyznaczyć z prawa Gaussa.
- ✓ Korzystając z operatorów, wyznacz dywergencję i rotację pola magnetycznego wewnątrz i na zewnątrz prostoliniowego przewodnika, przez który płynie prąd elektryczny o jednorodnej gęstości powierzchniowej. Wskazówka: rozkład pola magnetycznego można wyznaczyć z prawa Ampera.
- ✓ Oblicz gradient potencjału wytwarzanego przez ładunek Q, danego wzorem $V(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r$
- ✓ Oblicz rotację z gradientu liczonego w poprzednim zadaniu. Jaki wniosek?

Prawa Maxwella (różniczkowe)

- Prawa Gaussa

$$\boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{D} = \rho \qquad \qquad \boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{H} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Związek indukcji i pola:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

Prawa Maxwella dla próżni (różniczkowe)

- Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \boldsymbol{D} = 0 \qquad \nabla \circ \boldsymbol{H} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego, zmienne pole elektryczne indukuje wir pola magnetycznego

Z praw Maxwella wynika równanie falowe

- Zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego, ile wynosi wir zmiennego pola magnetycznego?

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})$$

- Tożsamość

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

- Jak **A** i **B** to operator ∇, to przy uwzględnieniu prawa Gaussa…

$$-\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})}{\partial t} = -(\boldsymbol{\nabla} \circ \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}$$

- Ale rotacja pola magnetycznego indukowana jest przez zmianę pola elektrycznego, więc…

Z praw Maxwella wynika równanie falowe

- …związek drugiej pochodnej pola ***E*** po czasie z drugą pochodną pola ***E*** po położeniu jest równaniem falowym:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}$$

Operator Laplace'a: $\boldsymbol{\nabla}^2 = \Delta$

- To samo można wyprowadzić dla pola magnetycznego.

- Równanie fali, np. *fali płaskiej,* powinno spełniać równanie falowe:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{j} E_0 \sin(kx - \omega t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{j} E_0 \sin(kx - \omega t)}{\partial x^2}$$

- Jest to prawda, jeśli $\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = k^2$

Prędkość fali elektromagnetycznej

- Wektor falowy $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}$
- Częstość kołowa $\omega = {}^{2\pi}/_{T}$
- W takim razie ${}^{\omega^2}/_{k^2} = {}^{1}/_{\mu_0 \varepsilon_0} = \dfrac{\lambda^2}{T^2} = v^2$
- więc prędkość fali elektromagnetycznej w próżni jest stała:

$$c = {}^{1}/_{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- Równanie falowe: $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}$

Prędkość fali elektromagnetycznej

- prędkość fali elektromagnetycznej w próżni:

$$c = {}^{1}\!/_{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi 10^{-12}[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}] 8.8542 \ldots 10^{-12}[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}]}} = 299792458\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$

- W materii, gdzie istnieją dipole elektryczne i magnetyczne:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

- prędkość fazowa fali E-M będzie mniejsza niż *c*

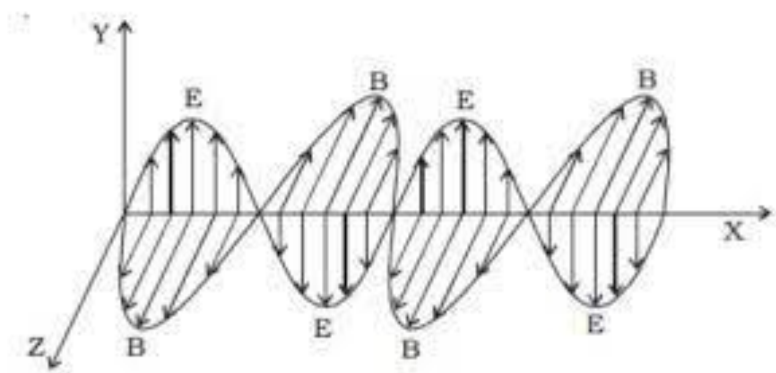
$$v = {}^{1}\!/_{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r \mu_0 \varepsilon_0}}$$

- Stąd wynika wartość bezwzględnego współczynnika załamania światła (w praktyce zależy od ε_r bo w dielektrykach $\mu_r \approx 1$):

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną

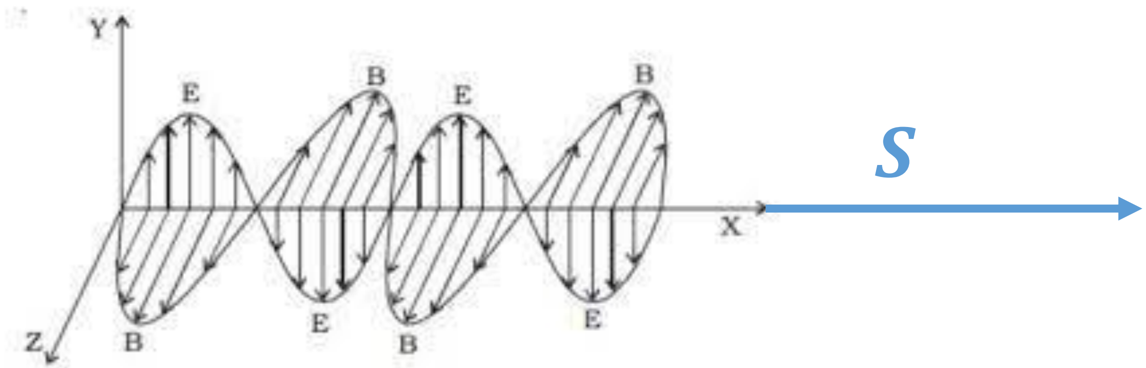
- Zadanie: dana jest fala płaska, rozchodząca się wzdłuż osi x, zdefiniowana przez wektor pola elektrycznego drgający wzdłuż osi y: $\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{j}E_0 \sin(kx - \omega t)$
- ✓ Korzystając z praw Maxwella, wyprowadź wzór na wektor pola magnetycznego
- ✓ W jakim kierunku drga wektor pola magnetycznego?
- ✓ Gdzie jest skierowany wektor proporcjonalny do iloczynu wektorowego pola elektrycznego i magnetycznego?



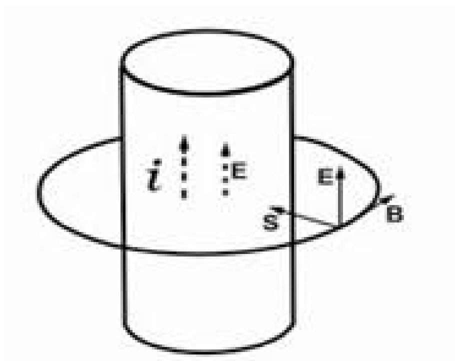
Wektor Poyntinga

- Gęstość strumienia mocy:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = {}^{1}/_{\mu_r \mu_0}\, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \quad [\mathrm{V/m \cdot A/m = W/m^2}]$$



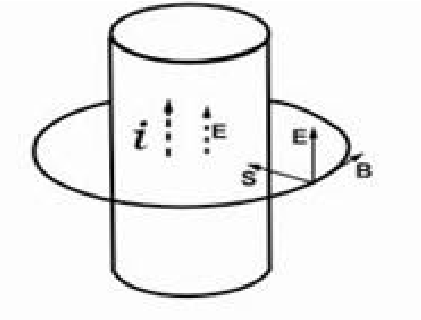
- również dla prądu stałego:



Wektor Poyntinga, zadania:

- Gęstość strumienia mocy światła słonecznego po przejściu przez bezchmurną atmosferę wynosi około 1kW/m^2. Zakładając falę sinusoidalną, ile wynoszą maksymalne amplitudy pola elektrycznego i magnetycznego?

- W przewodniku kołowym o przekroju S i rezystywności właściwej ρ płynie prąd I. Oblicz wartości pola E i B a powierzchni tego przewodnika oraz wartość wektora Poyntinga w tym punkcie.



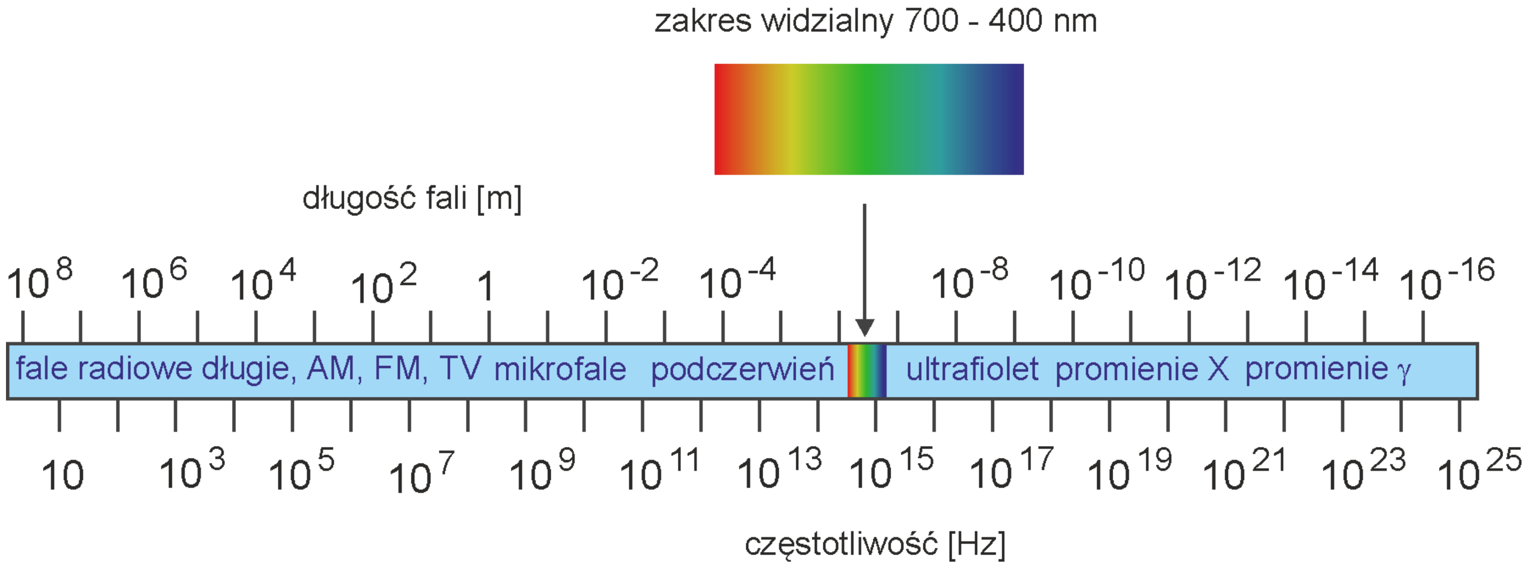
Jak generować i odbierać fale E-M

- Równanie fali płaskiej:

$$E(t) = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

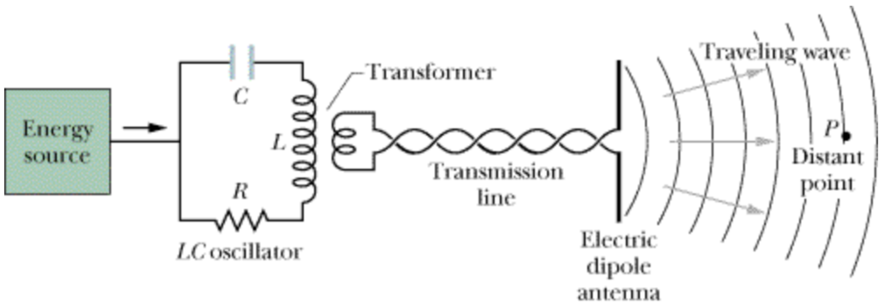
- W próżni $\omega/_{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = c \qquad \lambda = c/_{f}$

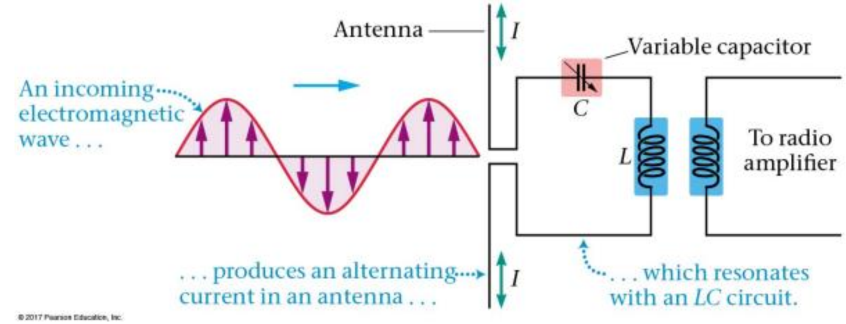
- Fale E-M mogą mieć bardzo różne długości i częstotliwości:



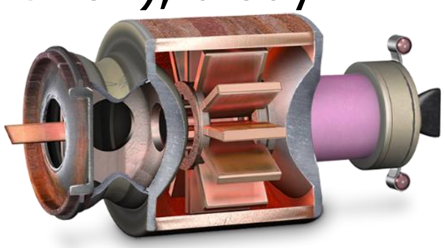
Jak generować i odbierać fale E-M o danej f

- Fale radiowe: obwód LC o elementach skupionych+antena





- Mikrofale: wnęki rezonansowe (klistron, magnetron), diody z ujemną rezystancją, masery

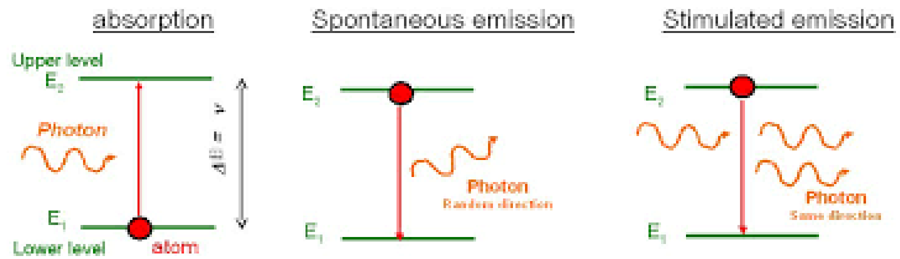


- Podczerwień, światło widzialne, ultrafiolet: lasery, diody LED/fotodiody

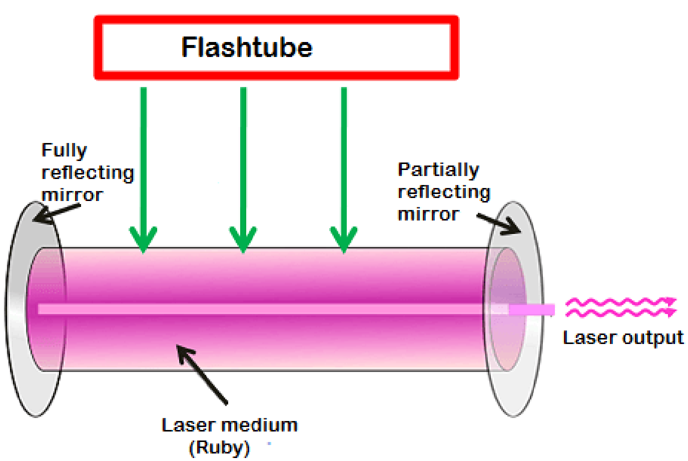
- Promieniowanie X: synchrotron, XFEL

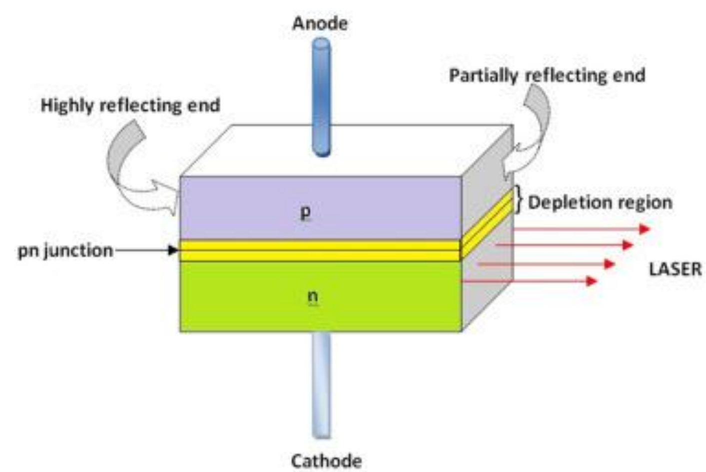
Laser – stabilny generator światła

- Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
- Elektrony wzbudzone na wyższy poziom energetyczny po pewnym czasie spontanicznie wypromieniowują energię świetlną. Poprzez układ luster, wielokrotnie odbijające się światło wymusza skoordynowaną emisję spójnej fali.



- Lasery gazowe, na ciele stałym, roztworze barwnika, złączu p-n.





Podsumowanie

- Prawa Maxwella opisują indukowanie wiru pola magnetycznego przez zmianę pola elektrycznego i na odwrót
- Z praw Maxwella wynika równanie falowe, którego rozwiązaniem jest równanie fali elektromagnetycznej.
- Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, a iloczyn wektorowy pola elektrycznego i magnetycznego definiuje moc niesioną przez tą falę.
- Prędkość każdej fali elektromagnetycznej w próżni wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s
- Prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku, np. szkle, jest mniejsza niż w próżni (więc długość też jest mniejsza, bo częstotliwość pozostaje ta sama) – stąd zjawisko załamania.
- Długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości
- Obiekty generujące fale elektromagnetyczne o danej długości powinny mieć rozmiary porównywalne z długością fali, np. antena, wnęka klistronu, cząsteczka, atom, jądro atomowe…