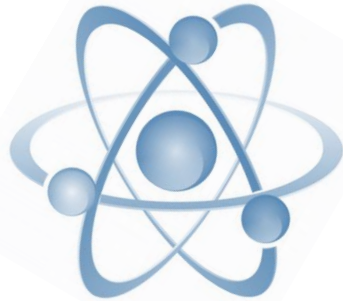




Prawa Maxwella

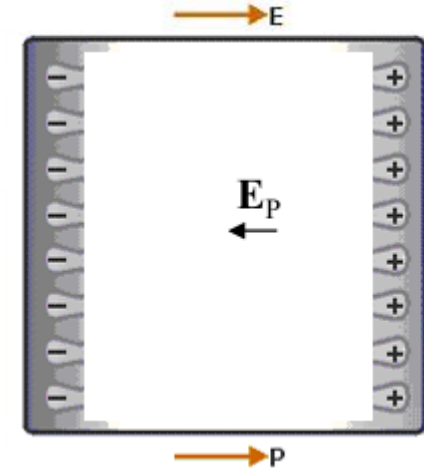
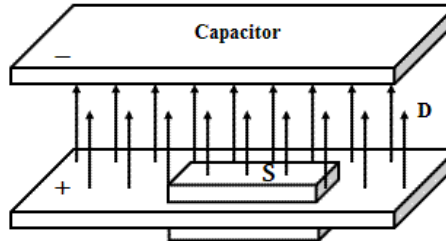
Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>

Indukcja i pole elektryczne



- Indukcja elektryczna (*displacement field*): przesunięcie ładunków pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego $\mathbf{E}$ [V/m]

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S} = \rho_s \text{ [C/m}^2\text{]}$$



- W jednorodnym dielektryku polaryzacja zależy od podatności elektrycznej

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

- Indukcja jest proporcjonalna do pola:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

- Całkowita gęstość ładunku:

$$\rho = \rho_p + \rho_s$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

Przenikalność elektryczna



Indukcja elektryczna (*displacement field*):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$$

Przenikalność elektryczna próżni
 $= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Przenikalność elektryczna względna

Substancja	ε_r
powietrze	1,00054
teflon	2,1
polietylen	2,25
polistyren	2,4–2,7
papier	3,5
krzemionka	3,9
beton	4,5
guma	7,0
diament	5,5–10
krzem	11,68
alkohol metylowy	~30
tlenek tytanu(IV)	86–173
ferroelektryki	>1000

Prawo Gaussa dla dielektryków



- Całkowity strumień indukcji elektrycznej jest równy swobodnemu (niespolaryzowanemu) ładunkowi:

$$\oiint_S \mathbf{D} \circ d\mathbf{s} = \iiint \rho_s dV$$

- W wersji z polem elektrycznym, ponieważ:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \oiint_S \mathbf{P} \circ d\mathbf{s} = \iiint \rho_p dV$$

- więc:

$$\oiint_S \mathbf{E} \circ d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint (\rho - \rho_p) dV = \frac{Q_s}{\varepsilon_0}$$

W próżni:

$$\mathbf{P} = 0$$

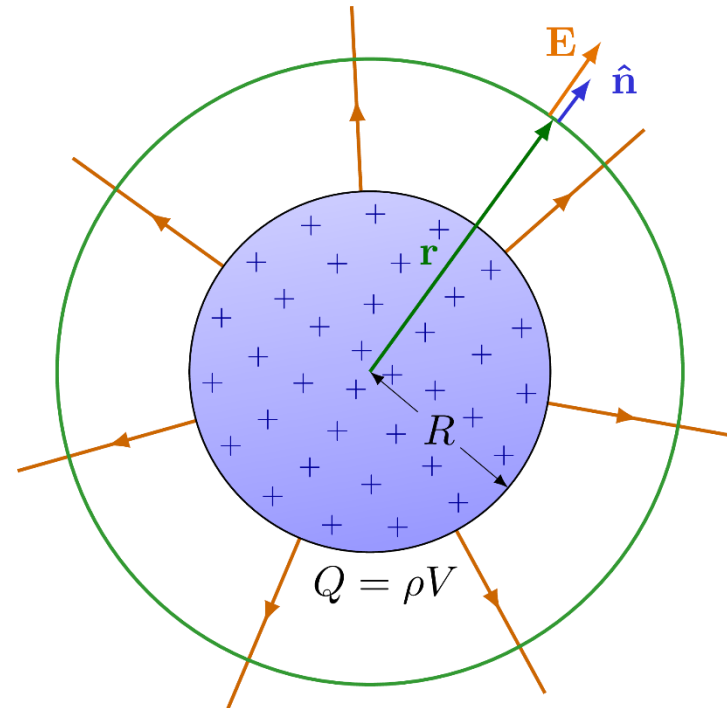
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Prawo Gaussa dla dielektryków



Zadanie 1: korzystając z prawa Gaussa, wyprowadzić wzór na indukcję elektryczną $\vec{D}$ w zależności od odległości r , dla, naładowanej jednorodnie objętościowo ładunkiem Q , teflonowej kuli o promieniu R . Rozważyć przypadek wewnątrz ($r < R$) i na zewnątrz ($r > R$) kuli.

Narysować wykres $D(r)$ oraz $E(r)$



Indukcja i pole magnetyczne



- Indukcja magnetyczna: gęstość strumienia magnetycznego

$$B = \frac{\Phi_B}{S} \text{ [T = Wb/m}^2\text{]}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- Pole magnetyczne $\mathbf{H}$ [A/m]

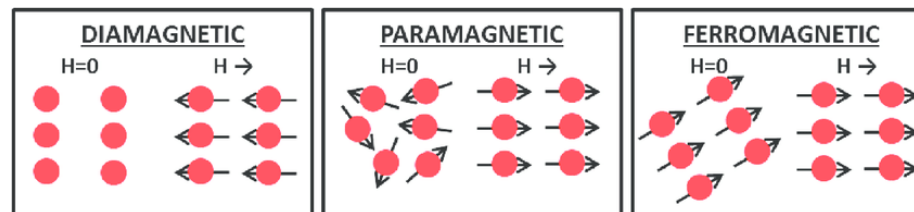
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

- Magnetyzacja $\mathbf{M}$ [A/m] wynika z podatności magnetycznej materiału

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

- Diamagnetyki: $\chi_m < 0$
- Paramagnetyki: $\chi_m > 0$
- Ferromagnetyki: *nie ma zależności liniowej $B(H)$*



W próżni:

$$\mathbf{M} = 0$$

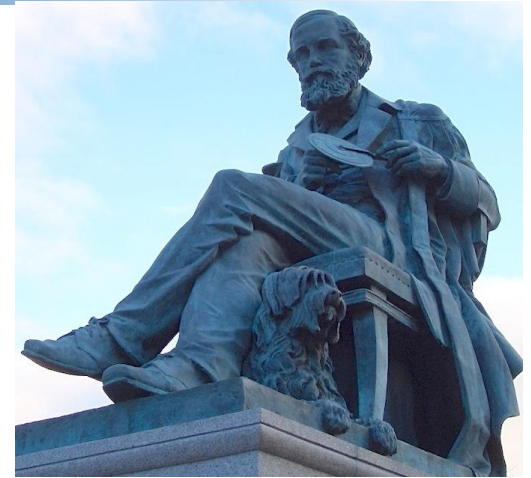
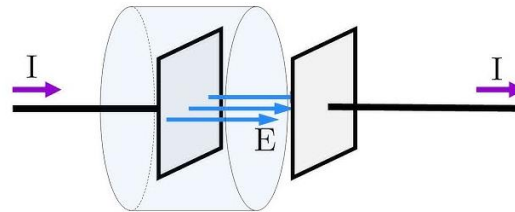
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Prąd przesunięcia



- James Clerk Maxwell, 1865: krok w stronę unifikacji pola elektrycznego i magnetycznego

- Przykład z ładowaniem kondensatora: prąd to zmiana ładunku w czasie



- Gęstość prądu przesunięcia definiuje się jako zmianę indukcji elektrycznej (pola przesunięcia):

$$\mathbf{j}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \circ d\mathbf{s} = Q_S$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Uogólnione prawo Ampera:

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{SC} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \circ d\mathbf{s}$$

W próżni: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{SC} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

Prawa Maxwella (całkowe)



➤ Prawa Gaussa

$$\oiint_S \mathbf{D} \circ d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_s dV$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = 0$$

➤ Prawa indukcji

$$\oint_C \mathbf{E} \circ d\mathbf{l} = - \iint_{SC} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{SC} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \circ d\mathbf{s}$$

Operator ∇



$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

Gradient pola skalarnego jest wektorem:

$$\mathbf{grad} V = \nabla V$$

Dywergencja pola wektorowego jest skalarem:

$$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \circ \mathbf{E}$$

Rotacja pola wektorowego jest wektorem:

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}$$



Dywergencja pola wektorowego

Dywergencja: postać różniczkowa prawa Gaussa (wynika z prawa Ostrogradskiego)

$$\nabla \circ \mathbf{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{D} \circ d\mathbf{s}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V} = \rho$$

Różniczkowe prawo Gaussa dla pola $\mathbf{E}$ w próżni:

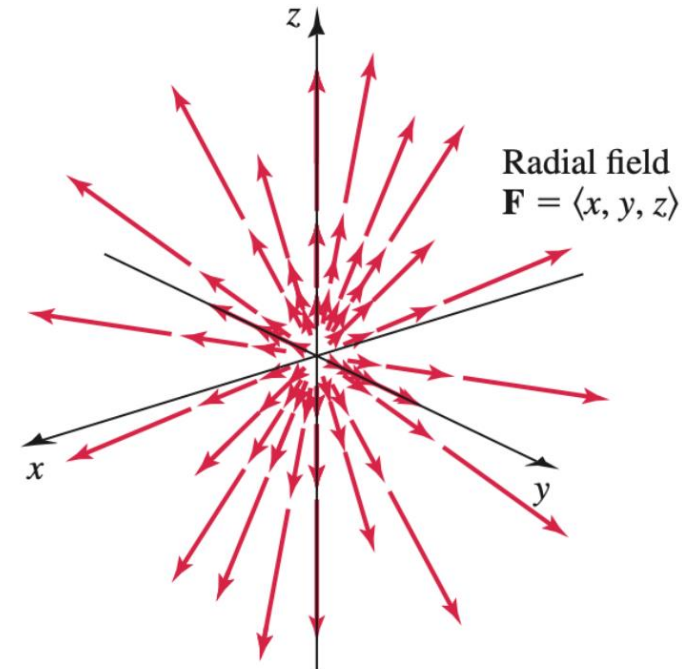
$$\nabla \circ \mathbf{E} = 0$$

Dywergencja we współrzędnych kartezjańskich:

$$\nabla \circ \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Dywergencja we współrzędnych sferycznych:

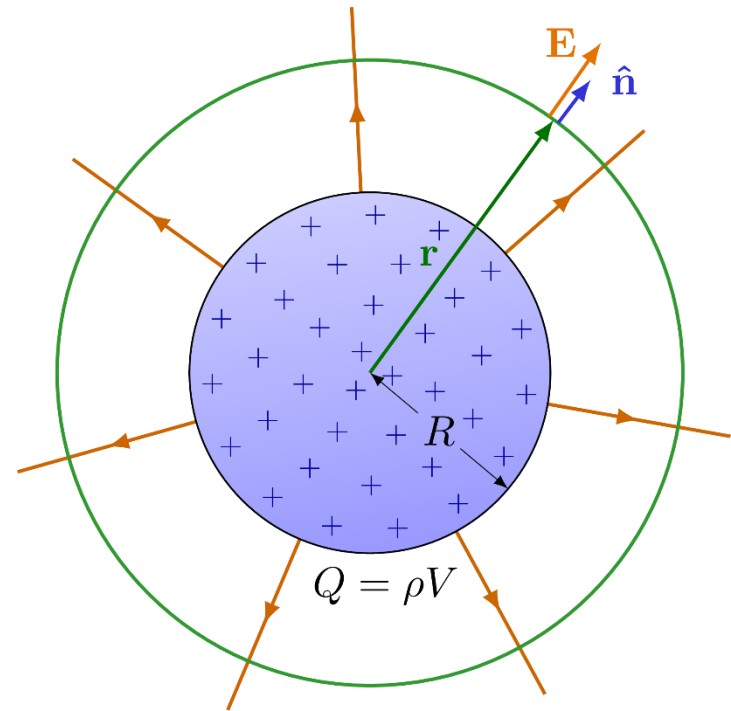
$$\nabla \circ \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(D_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$



Dywergencja pola



Zadanie 2: korzystając z wyników z **Zadania 1**, obliczyć dywergencję indukcji elektrycznej D (lub pola elektrycznego E), wewnątrz i na zewnątrz kuli. Można skorzystać z operatora ∇ w postaci kartezjańskiej (wtedy pole trzeba wyrazić w postaci kartezjańskiej) lub sferycznej.





Rotacja pola wektorowego

Rotacja pola $\mathbf{B}$ – różniczkowa postać prawa Ampera, wynika z prawa Stokesa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

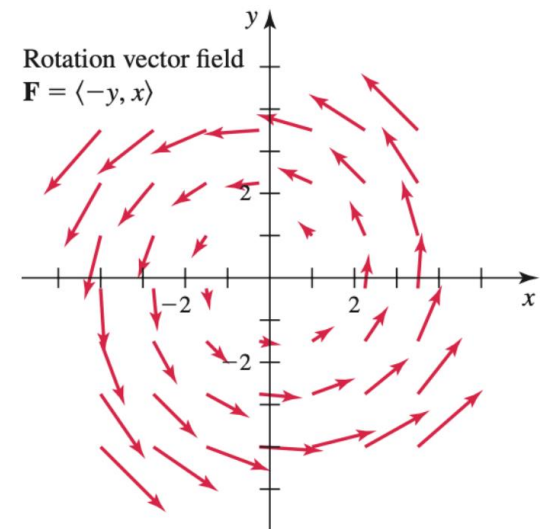
$$\text{bo } \oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \iint_{SC} (\nabla \times \mathbf{B}) \circ d\mathbf{s}$$

Rotacja we współrzędnych kartezjańskich:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Rotacja we współrzędnych sferycznych:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}}/r^2 \sin\theta & \hat{\boldsymbol{\theta}}/r \sin\theta & \hat{\boldsymbol{\phi}}/r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ B_r & r B_\theta & r \sin\theta B_\varphi \end{vmatrix}$$





- ✓ Korzystając z operatorów, wyznacz dywergencję i rotację indukcji pola magnetycznego wewnątrz i na zewnątrz prostoliniowego przewodnika, przez który płynie prąd elektryczny o jednorodnej gęstości powierzchniowej. Wskazówka: rozkład indukcji pola magnetycznego można wyznaczyć z prawa Ampera.
- ✓ Oblicz gradient potencjału wytwarzanego przez ładunek Q , danego wzorem $V(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r$
- ✓ Oblicz rotację z gradientu liczonego w poprzednim zadaniu. Jaki wniosek?

Prawa Maxwella (różniczkowe)



➤ Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = \rho_s$$

$$\nabla \circ \mathbf{B} = 0$$

➤ Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Związek indukcji i pola:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Prawa Maxwella dla próżni (różniczkowe)



➤ Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \circ \mathbf{B} = 0$$

➤ Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego, zmienne pole elektryczne indukuje wir pola magnetycznego

Podsumowanie



- Prawo Gaussa: pole elektrostatyczne jest źródłowe, a pole magnetyczne bezźródłowe.
- Prawo Faradaya: zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego.
- Uogólnione prawo Ampera: prąd lub zmienne pole elektryczne indukują wir pola magnetycznego.
- Prawa Maxwella opisują indukowanie wiru pola magnetycznego przez zmianę pola elektrycznego i na odwrót
- Z praw Maxwella wynika równanie falowe, którego rozwiązaniem jest równanie fali elektromagnetycznej.