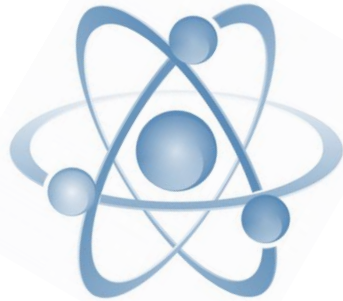




Fale elektromagnetyczne

Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>

Prawa Maxwella (całkowe)



➤ Prawa Gaussa

$$\oiint_S \mathbf{D} \circ d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_s dV$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \circ d\mathbf{s} = 0$$

➤ Prawa indukcji

$$\oint_C \mathbf{D} \circ d\mathbf{l} = -\varepsilon \iint_{SC} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \circ d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \circ d\mathbf{l} = \mu \iint_{SC} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \circ d\mathbf{s}$$

Prawa Maxwella (różniczkowe)



➤ Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = \rho_s$$

$$\nabla \circ \mathbf{B} = 0$$

➤ Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Związek indukcji i pola:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Prawa Maxwella (różniczkowe) dla próżni



- Prawa Gaussa

$$\nabla \circ \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \circ \mathbf{B} = 0$$

- Prawa indukcji

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Zmienne pola magnetyczne i elektryczne indukują się wzajemnie

Związek indukcji i pola:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Z praw Maxwella wynika równanie falowe



- Zmienne pole magnetyczne indukuje wir pola elektrycznego, ile wynosi wir zmiennego pola magnetycznego?

$$-\nabla \times \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{D})$$

- Tożsamość

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})\mathbf{C}$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ to operator ∇ , to...

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) = \nabla(\nabla \circ \mathbf{D}) - (\nabla \circ \nabla)\mathbf{D}$$

- Po uwzględnieniu prawa Gaussa w próżni...

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) = -\nabla^2 \mathbf{D}$$

Z praw Maxwella wynika równanie falowe



- Wir zmiennego pola magnetycznego:

$$-\nabla \times \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) = -\nabla^2 \mathbf{D}$$

- Zmiana kolejności różniczkowania:

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{D}$$

- Ale wir pola magnetycznego jest indukowany przez zmienne pole elektryczne:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Z praw Maxwella wynika równanie falowe



- Ostatecznie otrzymujemy równanie falowe dla wektora indukcji elektrycznej $\mathbf{D}$:

$$-\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\nabla^2 \mathbf{D} \quad \text{Operator Laplace'a: } \nabla^2 = \Delta$$

- Czyli ostatecznie:

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{D}$$

- Analogiczne rozumowanie można przedstawić dla wektora indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$:

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B}$$

Z praw Maxwella wynika równanie falowe



- Zarówno pole magnetyczne jak elektryczne podlega równaniu falowemu:

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{D} = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0$$



- Przypomnienie – równanie falowe dla fali mechanicznej:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{y} = 0$$

gdzie v jest prędkością fazową fali

- Przez analogię, prędkość fazowa fali elektromagnetycznej w próżni jest związana z przenikalnością dielektryczną i magnetyczną próżni

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{v^2}$$



Prędkość fali elektromagnetycznej

- Z praw Maxwella wynika, że prędkość fazowa fali elektromagnetycznej w próżni jest **stała** i wynosi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \equiv c$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{A^2 s^4}{kg m^3} \right] 4\pi 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am} \right]}} = 299792458 \dots \left[\frac{m}{s} \right]$$

- W materiałach, np. dielektryku, prędkość fali elektromagnetycznej jest mniejsza (bo $\epsilon_r > 1$):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

Równanie fali elektromagnetycznej



- Jeżeli pole magnetyczne (oraz elektryczne) podlegają równaniu falowemu, to równanie fali powinno spełniać to równanie, np.:

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \text{ dla fali płaskiej:}$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{j} B_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \mathbf{j} B_0 \sin(\omega t - kx) = -\mathbf{j} B_0 \sin(\omega t - kx) k^2$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(x, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{j} B_0 \sin(\omega t - kx) \omega^2$$

tożsamość ta jest spełniona tylko, gdy

$$\varepsilon_0 \mu_0 \cdot \omega^2 = k^2$$



Prędkość fali elektromagnetycznej

- Z równania falowego: $\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0 = k^2 / \omega^2$
$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \omega / k$$
- Częstość kołowa $\omega = 2\pi / T$ równanie fali:
 $\sin(\omega t - kx) =$
- Wektor falowy $k = 2\pi / \lambda$ $\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$
- W takim razie $c = \omega / k = \lambda / T$
- Związek dyspersyjny dla materii $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną

- Dana jest fala płaska, rozchodząca się wzdłuż osi x , zdefiniowana przez wektor indukcji magnetycznej drgający wzdłuż osi y : $\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{j}B_0\sin(kx - \omega t)$
- ✓ Korzystając z praw Maxwella, można wyprowadzić wzór na wektor indukcji elektrycznej:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_0\sin(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{B}) dt = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{k}B_0\cos(kx - \omega t)k dt$$

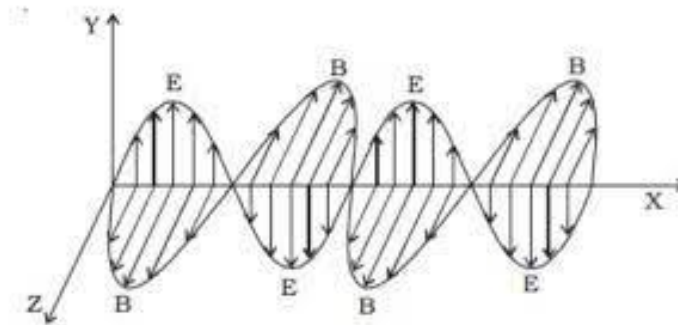
$$= -\mathbf{k} \frac{1}{\mu_0} B_0\sin(kx - \omega t) k/\omega = -\mathbf{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} B_0\sin(kx - \omega t)$$

Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną

- Dana jest fala płaska, rozchodząca się wzdłuż osi x , zdefiniowana przez wektor indukcji magnetycznej drgający wzdłuż osi y : $\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{j}B_0\sin(kx - \omega t)$
- ✓ Z praw Maxwella wynika, że stowarzyszony wektor indukcji elektrycznej drga wzdłuż osi z :

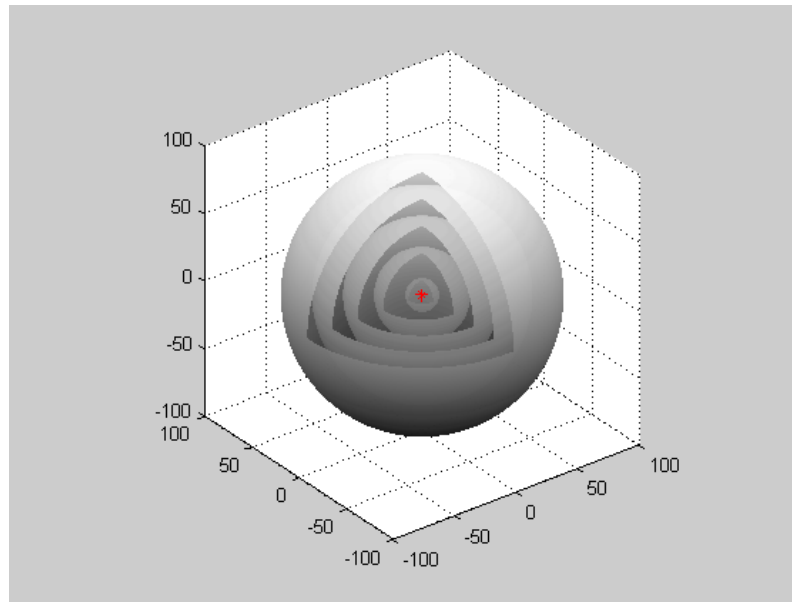
$$\mathbf{D}(x, t) = -\mathbf{k}\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}B_0\sin(kx - \omega t)$$

- ✓ Obydwa wektory są prostopadłe do siebie oraz prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali.



Czy istnieje sferyczna fala elektromagnetyczna

- ✓ Poniżej przedstawiono sferyczną falę mechaniczną, wysyłaną np. przez pulsujący balon.



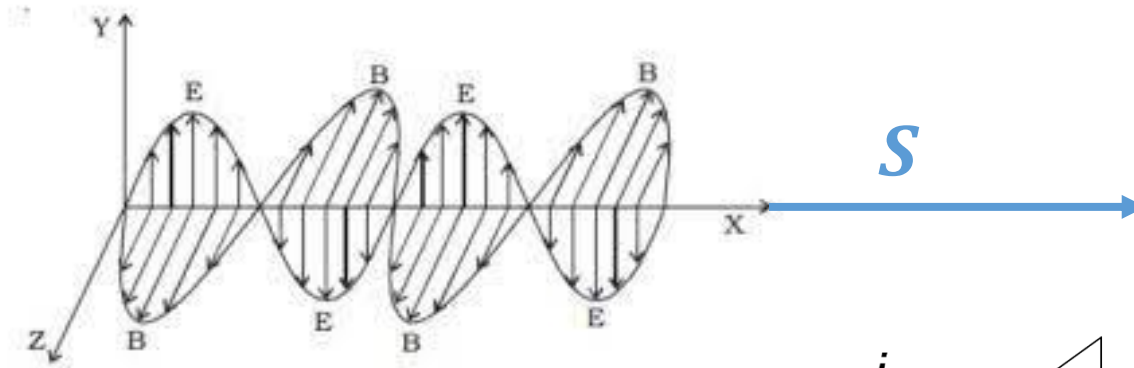
- ✓ Czy może istnieć idealna elektromagnetyczna fala kulista, wysyłana przez jakiś punkt we wszystkich kierunkach izotropowo?



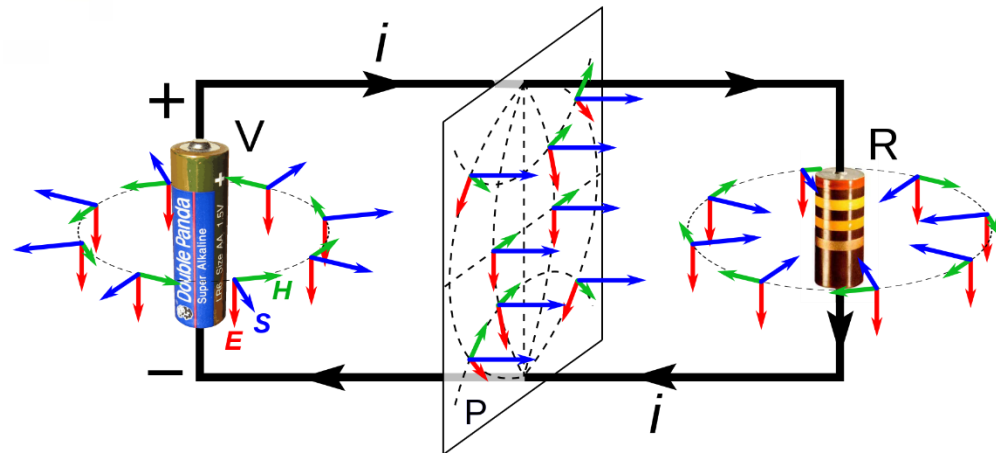
Wektor Poyntinga

- Gęstość strumienia mocy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_r \mu_0} \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad [\text{V/m} \cdot \text{A/m} = \text{W/m}^2]$$



- również dla prądu stałego:



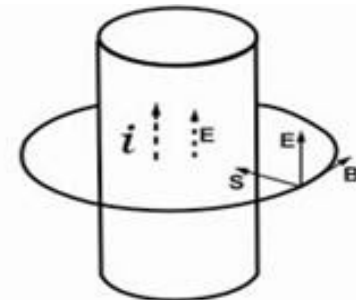


Wektor Poyntinga, zadania:

- Gęstość strumienia mocy światła słonecznego po przejściu przez bezchmurną atmosferę wynosi około 1kW/m^2 . Zakładając falę sinusoidalną, ile wynoszą maksymalne amplitudy pola elektrycznego i magnetycznego?



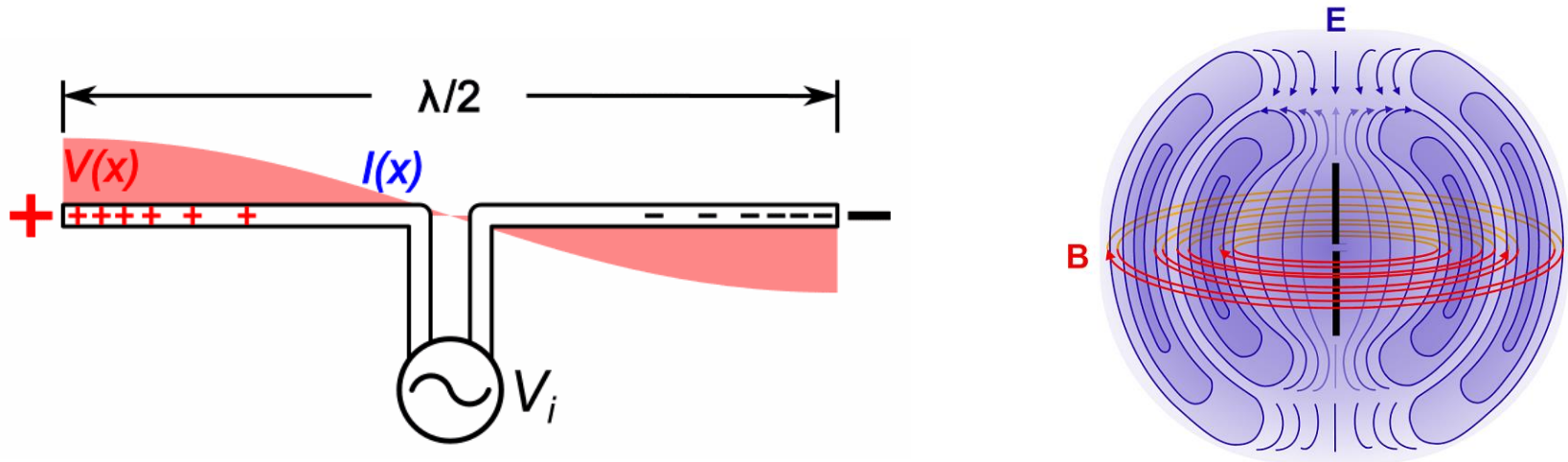
- W przewodniku kołowym o przekroju S i rezystywności właściwej ρ płynie prąd I . Oblicz wartości pola E i B a powierzchni tego przewodnika oraz wartość wektora Poyntinga w tym punkcie.



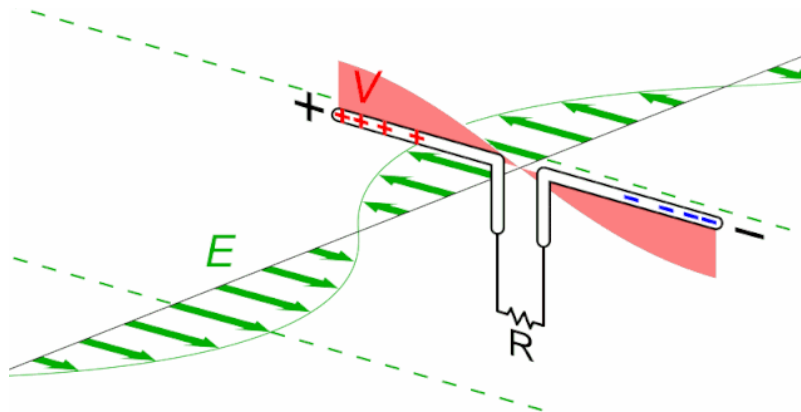


Jak generować i odbierać fale E-M

- Obwód LC+wzmacniacz+antena: nadajnik fal radiowych



- Antena+obwód LC+wzmacniacz: odbiornik fal radiowych





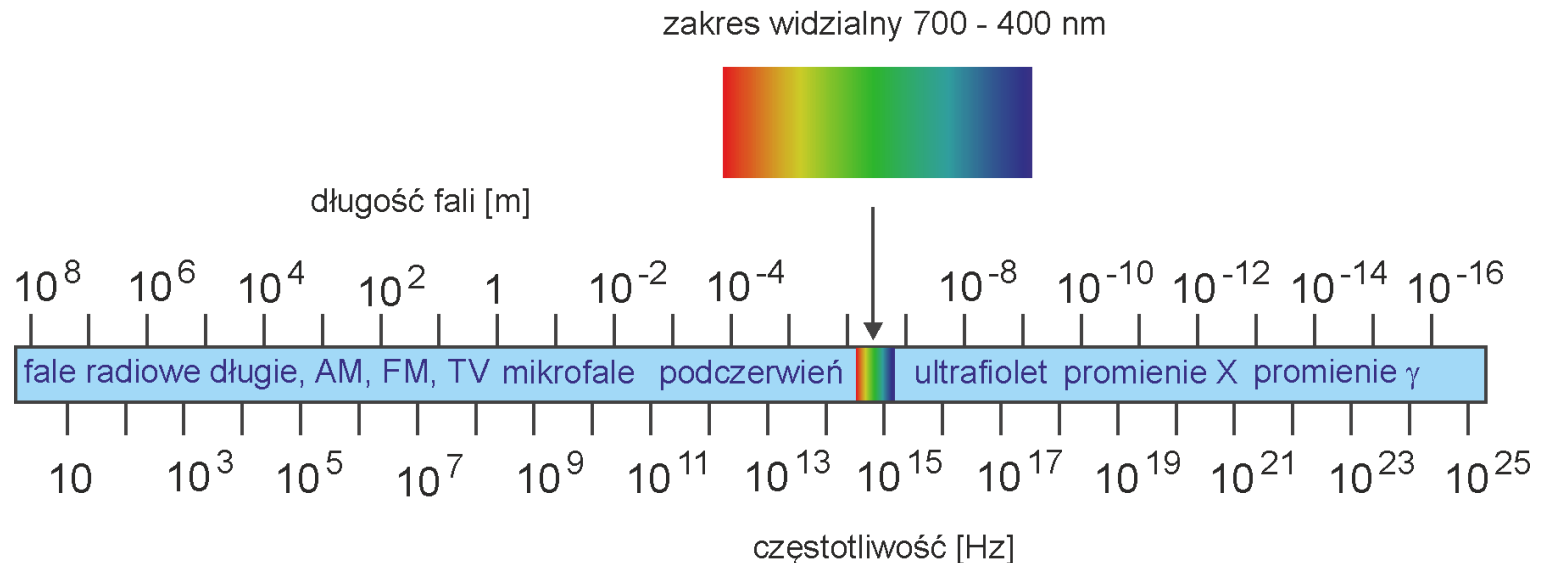
Jak generować i odbierać fale E-M

- Równanie fali płaskiej:

$$E(t) = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right)$$

- W próżni $\omega/k = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = c$ $\lambda = c/f$

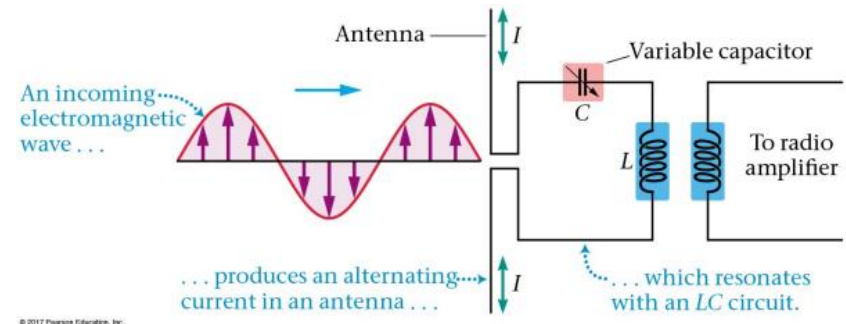
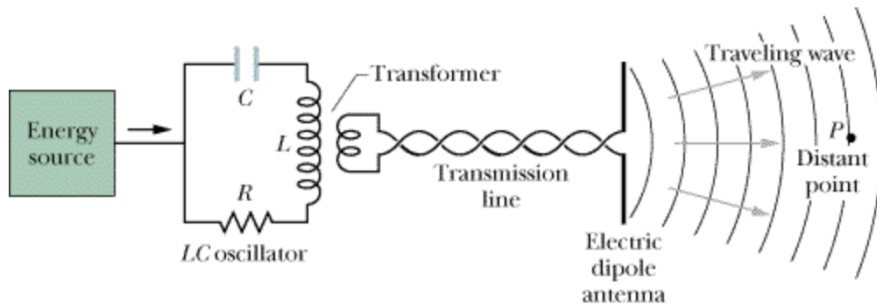
- Fale E-M mogą mieć bardzo różne długości i częstotliwości:



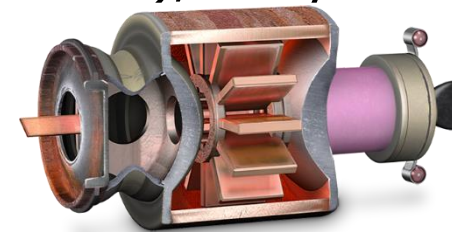
Jak generować i odbierać fale E-M o danej f



- Fale radiowe: obwód LC o elementach skupionych+antena



- Mikrofale: wnęki rezonansowe (klistron, magnetron), diody z ujemną rezystancją, masery



- Podczerwień, światło widzialne, ultrafiolet: lasery, diody LED/fotodiody

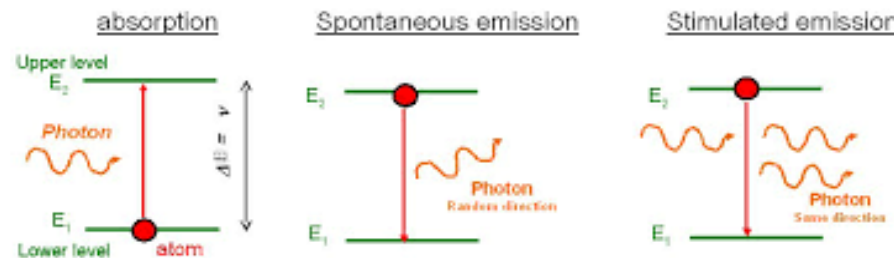
- Promieniowanie X: synchrotron, XFEL



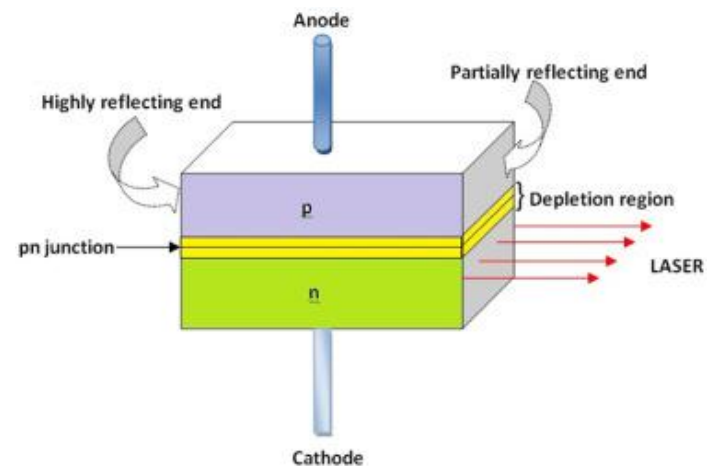
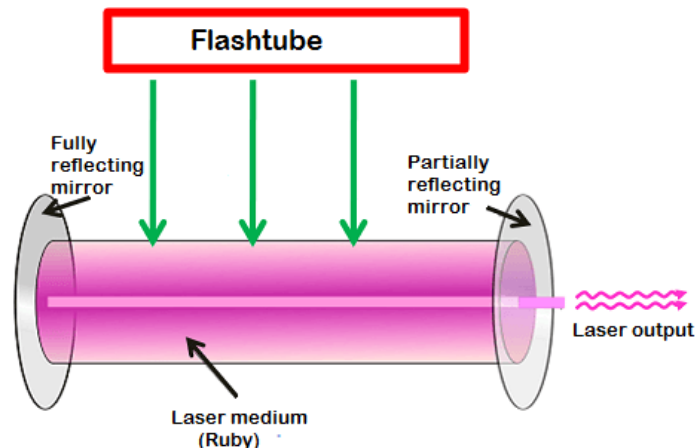
Laser – stabilny generator światła



- Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
- Elektrony wzbudzone na wyższy poziom energetyczny po pewnym czasie spontanicznie wypromieniowują energię świetlną. Poprzez układ luster, wielokrotnie odbijające się światło wymusza skoordynowaną emisję spójnej fali.



- Lasery gazowe, na ciele stałym, roztworze barwnika, złączu p-n.





Podsumowanie

- Prawa Maxwella opisują indukowanie wiru pola magnetycznego przez zmianę pola elektrycznego i na odwrót
- Z praw Maxwella wynika równanie falowe, którego rozwiązaniem jest równanie fali elektromagnetycznej.
- Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, a iloczyn wektorowy pola elektrycznego i magnetycznego definiuje moc niesioną przez tą falę.
- Prędkość każdej fali elektromagnetycznej w próżni wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- Prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku, np. szkłe, jest mniejsza niż w próżni.
- Obiekty generujące fale elektromagnetyczne o danej długości powinny mieć rozmiary porównywalne z długością fali, np. antena, wnęka klistronu, cząsteczka, atom, jądro atomowe...