# Wykład 17

# Względność ruchów

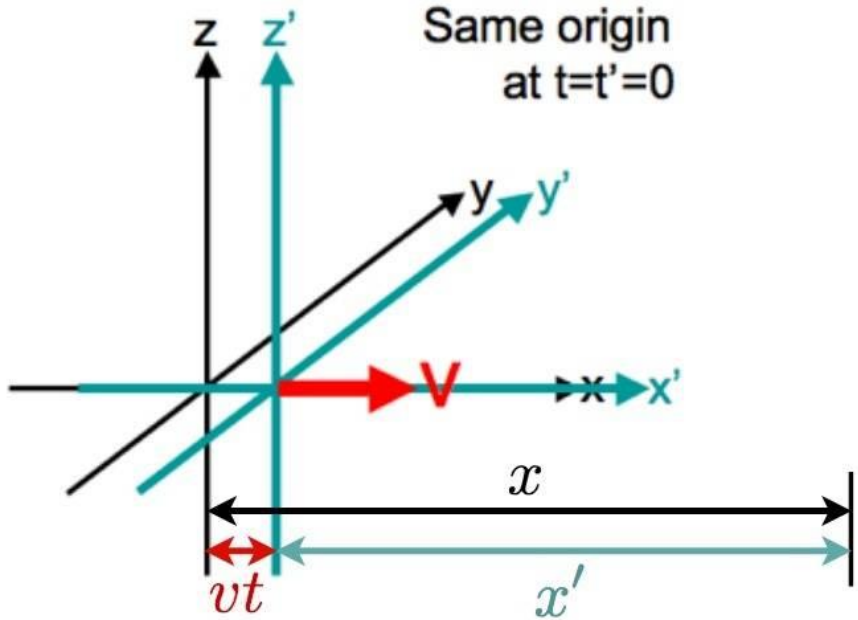
Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka

# Ruch w inercjalnych układach odniesienia

- Galileusz, 1632: obserwator wewnątrz obiektu poruszającego się prostoliniowo ze stałą prędkością, nie jest w stanie stwierdzić, czy obiekt się porusza, czy nie.
- Newton, 1687: prawa ruchu są niezmienne dla dowolnego układu inercjalnego, czyli poruszającego się prostoliniowo ze stała prędkością (bezwładnie):
- „ruchy ciał zawartych w danym obszarze są względem siebie takie same, niezależnie od tego, czy obszar ten znajduje się w spoczynku, czy też w ruchu jednostajnym prostoliniowym"
- Nie istnieje bezwzględny układ odniesienia. Przestrzeń jest izotropowa.

# Transformacja Galileusza

- Układ X′Y′Z′ porusza się względem układu XYZ (albo odwrotnie)




- Współrzędne w układzie primowanym widziane z układu XYZ, jeśli ruch wzdłuż osi X:

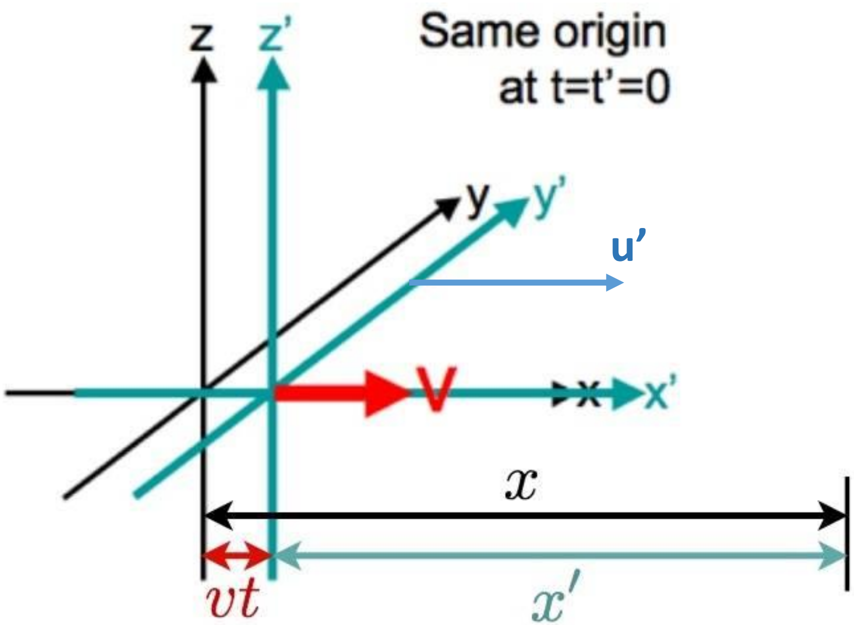
$$x = x' + Vt \qquad y = y' \qquad z = z'$$

- Czas w obydwu układach biegnie tak samo

$$t = t'$$

# Transformacja Galileusza

- Składanie prędkości:




- Ciało porusza się względem układu primowanego:

$$x' = u't$$

- Położenie tego ciała względem układu nieprimowanego:

$$x = x' + Vt = ut + Vt$$

# Prędkość światła jest niezmiennikiem

- Składanie prędkości dla transformacji Galileusza:

$$\frac{dx}{dt} = V' + V$$

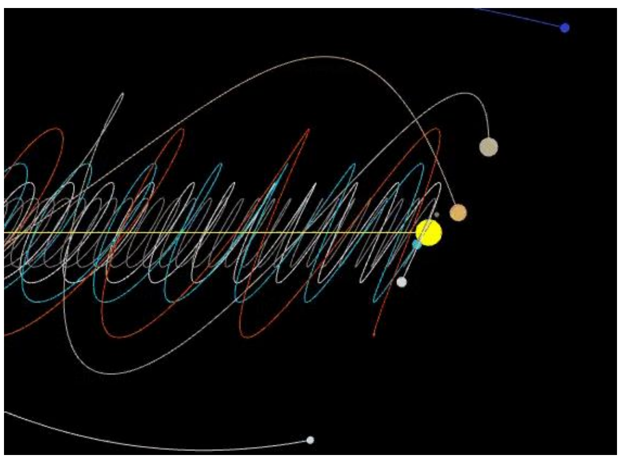
- …ale z praw Maxwella wynika, że:

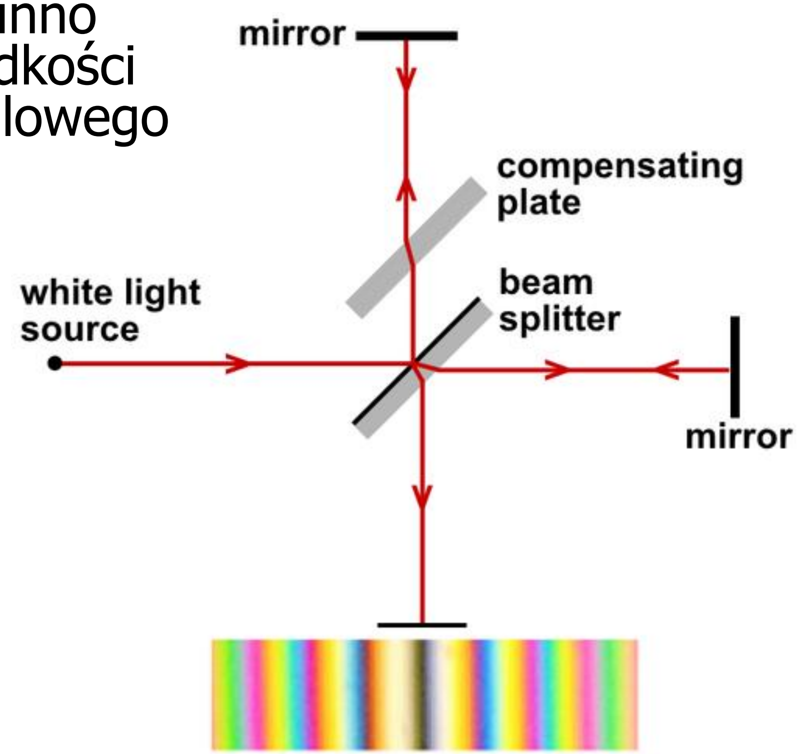
$$c = {}^{1}\!/_{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- …prędkość światła w próżni jest stała!
- Transformacja Galileusza dałaby inną wartość światła wysłanego w układzie poruszającym się…

# Doświadczenie Michelsona-Morleya

- Czy fala elektromagnetyczna porusza się w jakimś ośrodku? Jeśli tak, to byłby to wyróżniony, nieruchomy układ, a skoro Ziemia porusza się 30 km/s, to powinno się dać zmierzyć różnicę prędkości światła w zależności od chwilowego kierunku ruchu Ziemi…

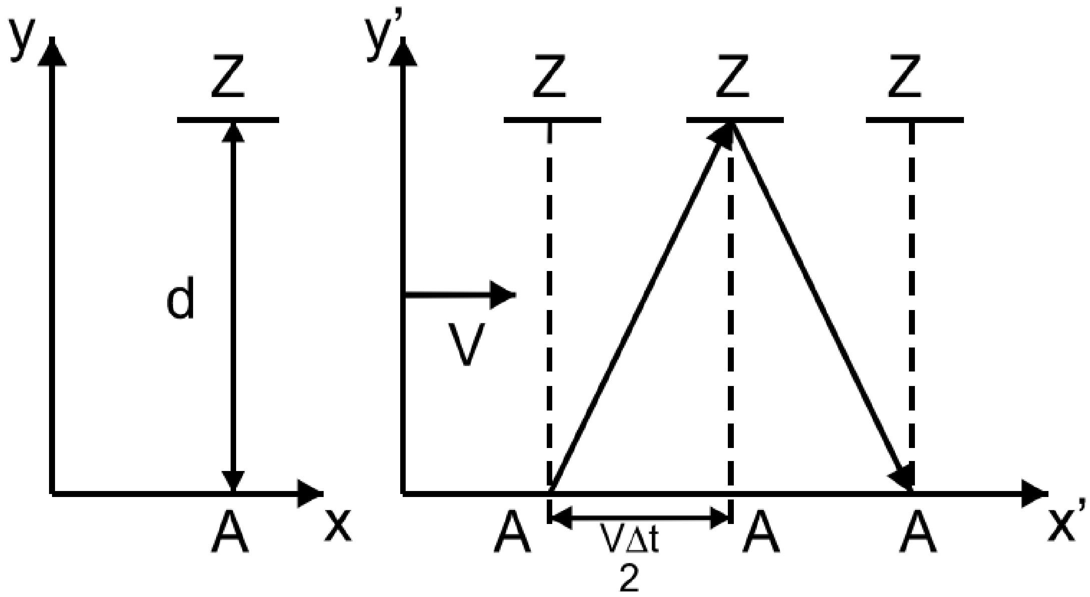





- 1887: otóż okazało się, że nie można. Nie widać było istotnej zmiany prążków interferencyjnych, ani dziennej, ani rocznej…

# Prędkość światła jest niezmiennikiem

- W poruszającym się układzie odniesienia, światło pokonuje drogę 2d od źródła do zwierciadła.
- W spoczywającym układzie odniesienia światło, wg Galileusza/Newtona, ma dłuższą drogę do przebycia. Tymczasem doświadczenie Michelsona-Morleya nie wykazało żadnej różnicy.




- Wniosek: odległości i czas w układzie poruszającym się są jakaś inne niż spoczywającym.

# Transformacja Lorentza

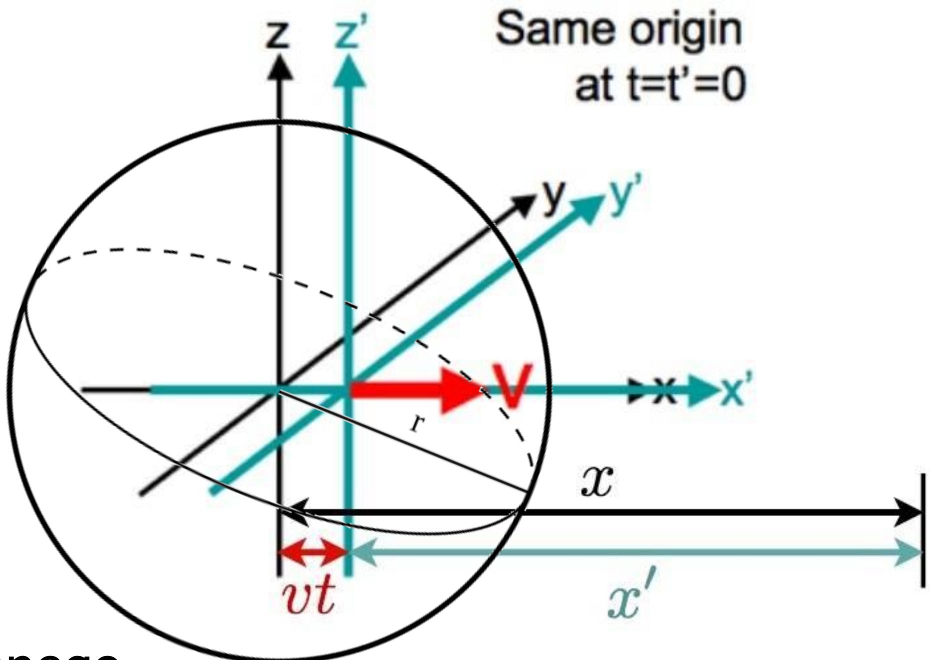
- Kulista fala elektromagnetyczna wysyłana w chwili t=0:

$$r = ct$$

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- W układzie primowanym

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$




- Szukamy transformacji
liniowej z XYZt do X′Y′Z′t′
wzdłuż osi X,
której współczynniki zależą
od prędkości układu primowanego

$$x' = \gamma(V)(x - Vt)$$

$$y' = z$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(V)(t + b(V)x)$$

# Transformacja Lorentza

- Współczynniki transformacji:

$$\mathrm{b}(V) = -\frac{V}{c^2} = -\frac{\beta}{c} \qquad \beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma(V) = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$$

- Transformacja Lorentza:

$$x' = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x - Vt) = \gamma(x - \beta ct)$$

$$t' = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right)$$

# Odwrotna transformacja Lorentza

- Układ XYZt widziany z poruszającego się układu primowanego:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x' + Vt') = \gamma(x' + \beta ct')$$

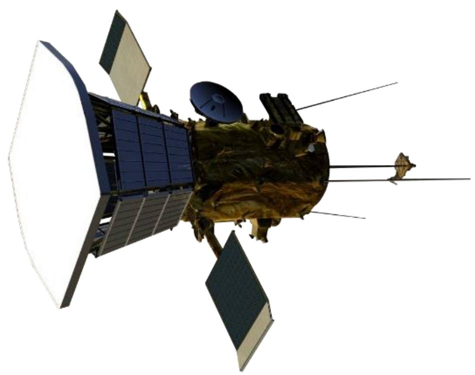
$$t = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right)$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$$

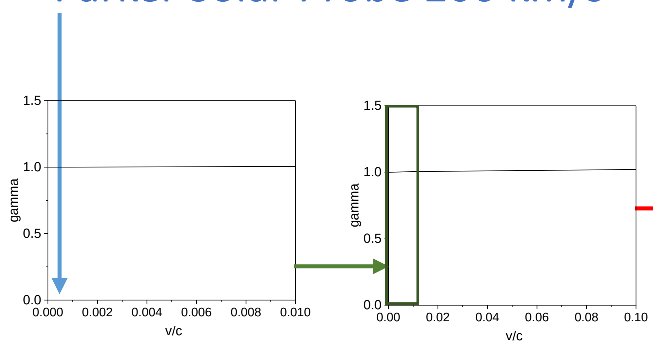
# Kiedy transformacja Lorentza jest istotna?

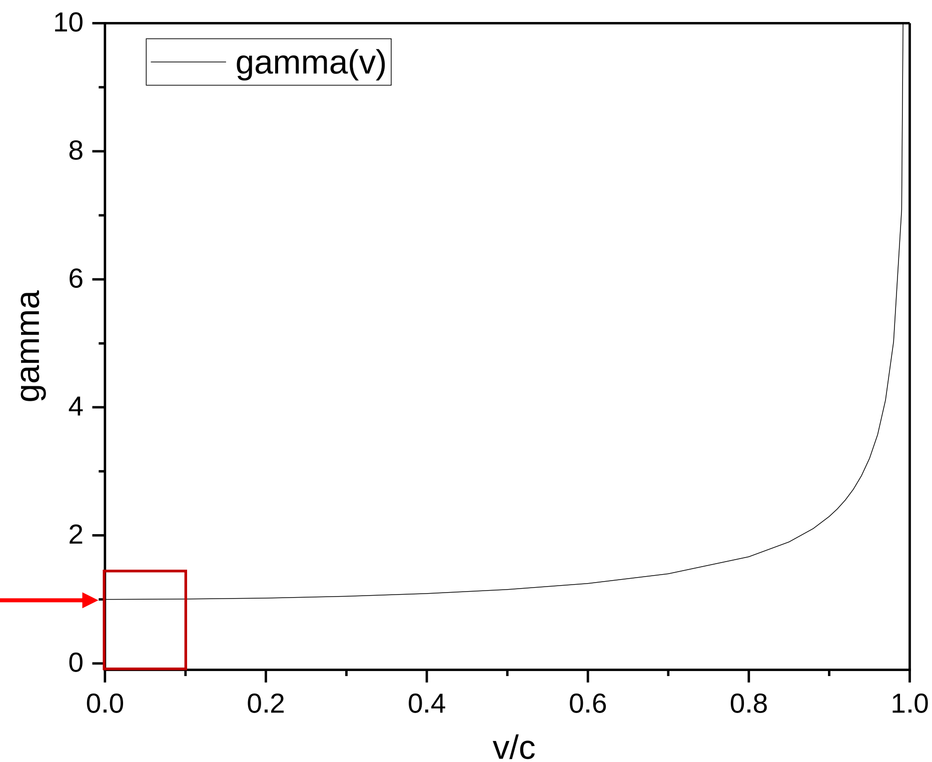
- Dla prędkości bliskich c
- Dla dokładnych pomiarów

$$\gamma(V) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Parker Solar Probe 200 km/s



# Skrócenie długości

- Długość ramienia interferometru w poruszającym się laboratorium:

$$l' = x'_2 - x'_1$$

- Położenie początku i końca interferometru mierzone w nieruchomym układzie odniesienia:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x_1' + Vt_1') \qquad x_2 = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x_2' + Vt_2')$$

- Przy założeniu jednoczesności pomiaru $t'_1 = t'_2$

$$l = x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x'_2 - x'_1) = \gamma l'$$

- czyli ramię poruszającego się interferometru jest krótsze $l' = \frac{1}{\gamma} l$

# Dylatacja czasu

- Nieruchomy obserwator patrzący na zegar w poruszającym się układzie primowanym widzi, że odmierza on czas wolniej.
- W poruszającym się układzie odmierzane są odcinki czasu:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

- W spoczywającym układzie odmierzane są odstępy czasu:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

- Ale odwrotna transformacja Lorentza daje: $t = \gamma \left( t' + \beta \frac{x'}{c} \right)$

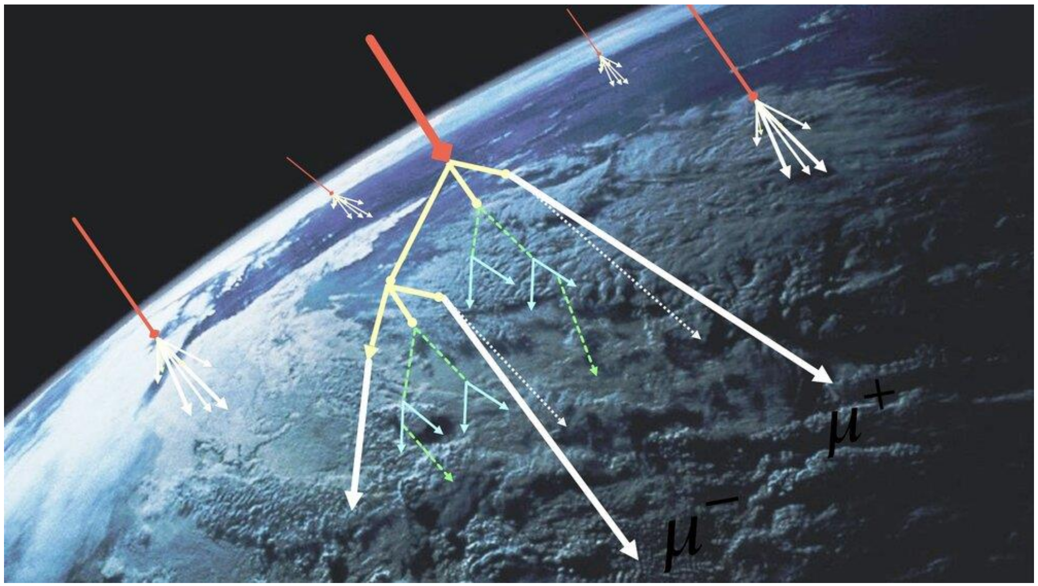
$$\Delta t = \gamma (t'_2 - t'_1) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t'$$

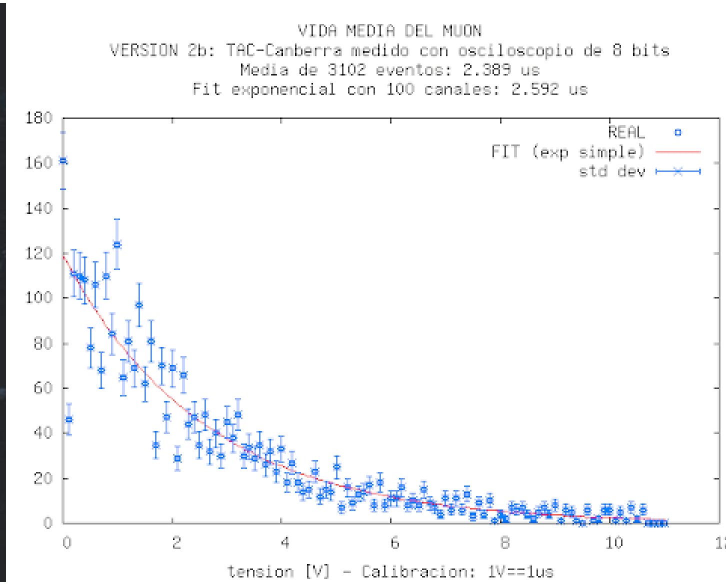
- czyli czas własny układu poruszającego się biegnie szybciej niż wynika to z punktu widzenia obserwatora spoczywającego!

$$\Delta t > \Delta t'$$

# Paradoks długowiecznego mionu

- Miony powstają w górnej warstwie atmosfery i docierają do powierzchni Ziemi, więc przebywają około 40 km.
- Średni czas życia mionu to kilka mikrosekund:




- Zadanie: dlaczego miony bez problemu przebywają 40km, jeśli wg laboratorium potrzebują co najmniej t=40/300000=134 mikrosekund?

# Kulista fala nie jest kulista

- Równanie fali kulistej w nieruchomym układzie odniesienia:

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Równanie fali kulistej w ruchomym układzie odniesienia:

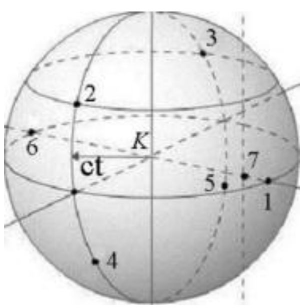
$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

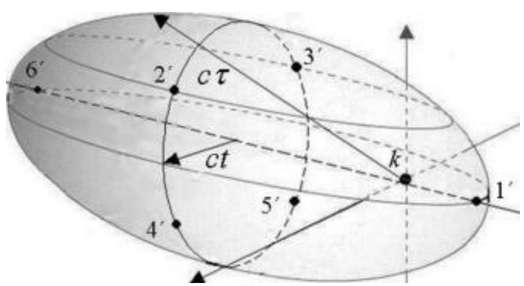
$$t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right)$$

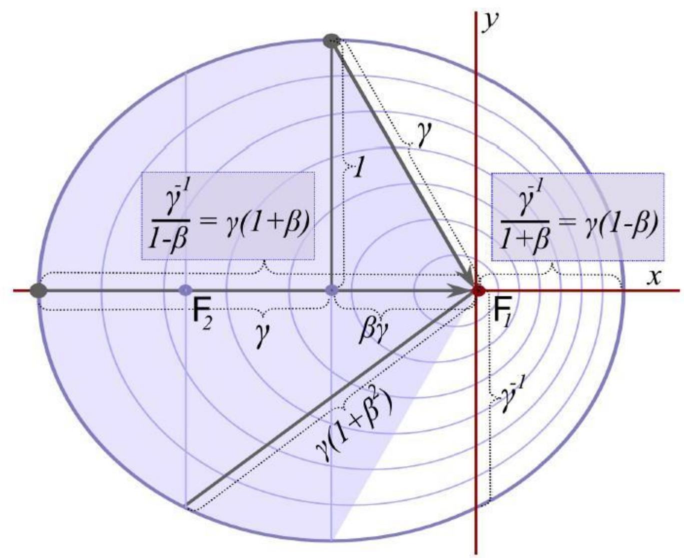
$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



# Składanie prędkości

- W układzie nieruchomym wektor prędkości obiektu:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

- W poruszającym się układzie prędkość tego samego obiektu:

$$u_x{}' = \frac{dx'}{dt'} \quad u_y{}' = \frac{dy'}{dt'} \quad u_z{}' = \frac{dz'}{dt'}$$

- Pochodna odwrotnych transformacji pomnożona przez *dt′*

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt') \quad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \gamma\left(dt' + {}^{\beta}/_{c}\, dx'\right)$$

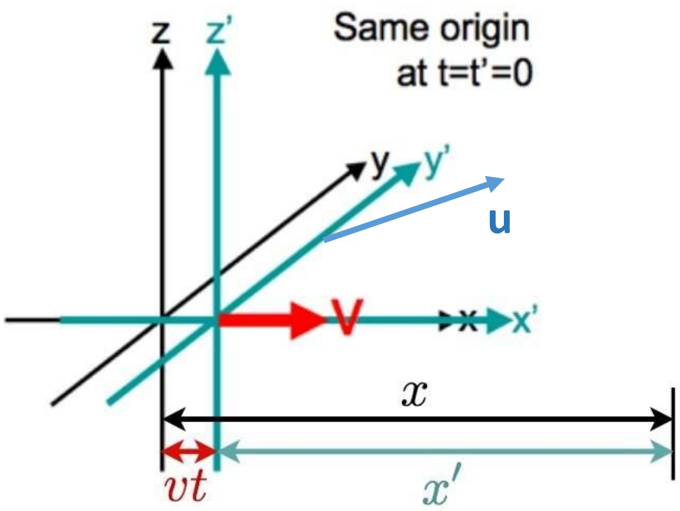
- Stąd prędkość obiektu w jednostkach układu primowanego

$$u_x = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + {}^{\beta}/_{c}\, dx'} \qquad u_y = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + {}^{\beta}/_{c} dx'\right)}, u_z = \dots$$

# Składanie prędkości

- Podstawiając w liczniku $dt' = dx'/u'_x$ a w mianowniku $dx' = u'_x dt'$:

$$u_x = \frac{dx' + \beta c dx'/u'_x}{dt'\left(1 + u'_x \beta/c\right)} \qquad \beta = \frac{V}{c}$$




- ostatecznie:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V/c^2}$$

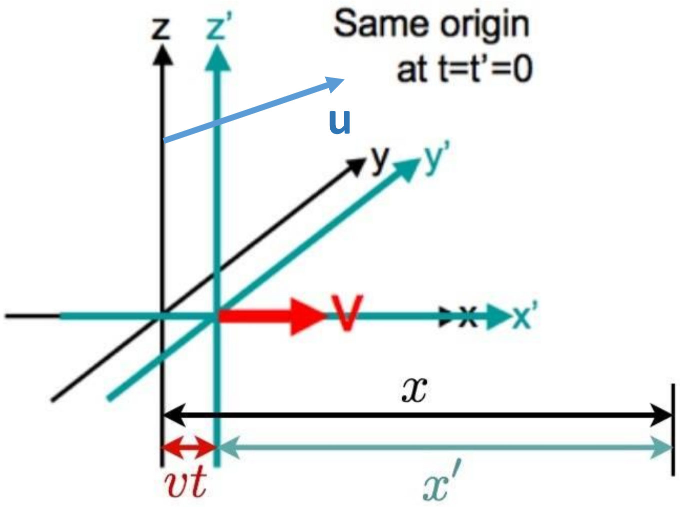
- i analogicznie

$$u_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u'_y}{1 + u'_x V/c^2} \qquad u_z = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u'_z}{1 + u'_x V/c^2}$$

# Odwrotne składanie prędkości

- Jaka jest w poruszającym się układzie prędkość $u'$ obiektu, który się porusza ze stała prędkością $u$ względem układu nieruchomego?

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/_{c^2}}$$




$$u'_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u_y}{1 - u_x V/_{c^2}}$$

$$u'_z = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u_z}{1 - u_z V/_{c^2}}$$

# Składanie prędkości - przykłady

- Przykład: prędkość protonów w LHC protony wynosi 0.99999991c – jaka jest prędkość jednego protonu względem drugiego, jeśli pędzą one naprzeciwko siebie? W/g Galileusza prawie 2c…

- W/g transformacji Lorentza:

$$u_x = \frac{0.99999991c + 0.99999991c}{1 + 0.99999991^2 c^2 / c^2} = \frac{1.99999982}{1.99999999} = 0.999999914\mathrm{c}$$

- Przykład 2: ile wynosi prędkość impulsu światła mierzona w rakiecie poruszającej się z połową prędkości światła?

$$u_x = \frac{c + 0.5c}{1 + c \cdot 0.5c / c^2} = \frac{1.5c}{1.5} = c$$

# Przyspieszenie

- Jakie jest przyspieszenie *a* obiektu, który się porusza z przyspieszeniem *a′* względem innego poruszającego się układu inercjalnego? Wg Galileusza to samo. Wg Lorentza:

$$a_x = a_x{}'\left(\frac{\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}{1+u'_x{}^{V}/_{c^2}}\right)^3$$

$$a_y = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1+u'_x{}^{V}/_{c^2}\right)^2}\left(a'_y - \frac{u'_y{}^{V}/_{c^2}}{1+u'_y{}^{V}/_{c^2}}a'_x\right)$$

$$a_z = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1+u'_x{}^{V}/_{c^2}\right)^2}\left(a'_z - \frac{u'_z{}^{V}/_{c^2}}{1+u'_z{}^{V}/_{c^2}}a'_x\right)$$

- Składowe $a_y$ $a_z$ zerowe tylko, gdy ruch dokładnie wzdłuż x′

# Pęd, siła, energia

- Pęd relatywistyczny (załóżmy ruch wzdłuż OX, $u=u_x$):

$$p_x = p = mu\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} = \gamma mu$$

- Siła:

$$F_x = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma mu$$

- Energia kinetyczna potrzebna do rozpędzenia do prędkości $v$

$$E_k = \int_0^S F\cdot dx = \int_0^S \frac{dp}{dt}dx = \int_0^v u\cdot dp = \int_0^v u\cdot d\left(\frac{mu}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}}\right)$$

# Energia, masa

- Energia kinetyczna:

$$E_k = \int_0^v u \cdot d\left(\frac{mu}{\sqrt{\left(1 - {u^2}/{c^2}\right)}}\right) = u \cdot \left(\frac{mu}{\sqrt{\left(1 - {u^2}/{c^2}\right)}}\right) - \int_0^v \left(\frac{mu}{\sqrt{\left(1 - {u^2}/{c^2}\right)}}\right) du =$$

$$= \frac{mu^2}{\sqrt{\left(1 - {u^2}/{c^2}\right)}} - \left(-mc^2\sqrt{\left(1 - {u^2}/{c^2}\right)}\right)\Bigg|_0^v = \frac{mc^2}{\sqrt{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)}} - mc^2$$

- Tak więc relatywistyczna energia kinetyczna

$$E_k = (\gamma - 1)\, mc^2$$

- Energia całkowita to energia spoczynkowa + kinetyczna:

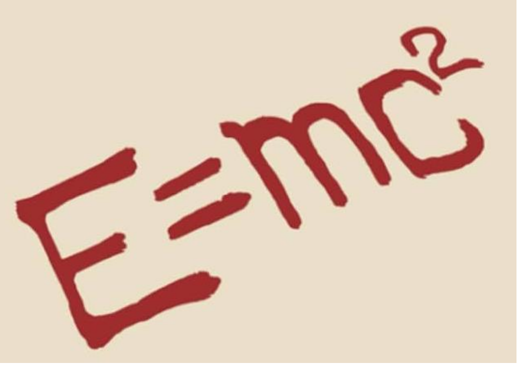
$$E = mc^2 + E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)}} = \gamma mc^2$$

- gdzie *m* to masa spoczynkowa

# Energia spoczynkowa

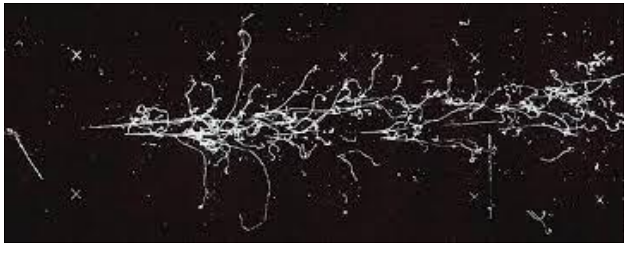
- Całkowita energia relatywistyczna:

$$E = mc^2 + E_k$$




- Dla ciała w spoczynku:

- Równoważnik masy i energii:



- Kreacja (energia zamienia się w masę)
- Anihilacja (masa zamienia się w energię)
- defekt masy: $m_{4He}$ = 4,00150u, $2m_p+2m_n$=4,03186u

# Pęd, masa, energia

- Pęd: $p = m \cdot v \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \gamma m \cdot v$
- Masa relatywistyczna $m_R = \gamma m$
- Masa relatywistyczna gwałtownie rośnie przy $v \to c$
- Energia relatywistyczna: $E = \gamma\, mc^2$
- Kwadrat pędu $p^2 = \dfrac{m^2 v^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ stąd $v^2 = \dfrac{p^2}{m^2 + \dfrac{p^2}{c^2}}$ $\gamma^2 = 1 + \dfrac{p^2}{m^2 c^2}$
- Kwadrat energii – **związek energii i pędu**:

$$E^2 = m^2 c^4 \gamma^2 = m^2 c^4 \left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}\right) = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

# Pęd, energia

- Związek energii i pędu jest niezmiennikiem relatywistycznym

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

- Dla cząstek bez masy spoczynkowej

$$E_f = p\ c$$

- Zadanie: udowodnić, że kinetyczna energia relatywistyczna

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)}} - mc^2$$

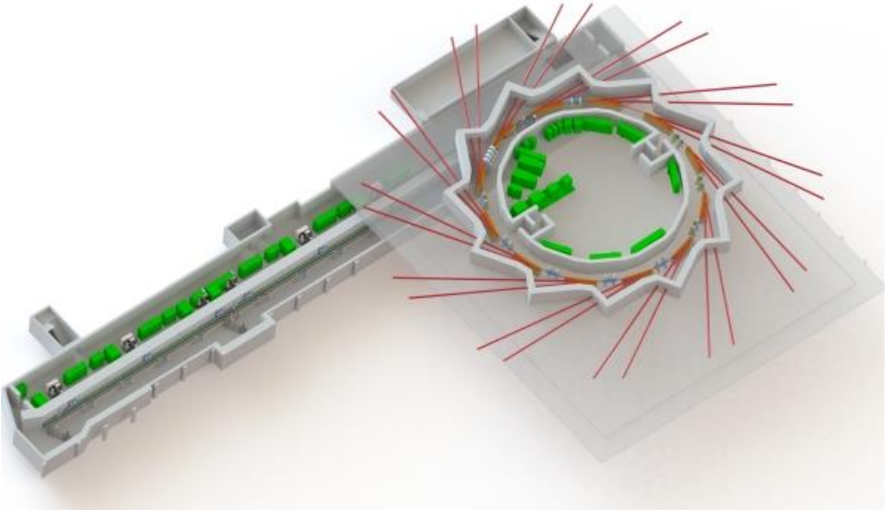
sprowadza się do klasycznego wzoru $E_K = mv^2/2$ dla $v$ bliskich 0.

Wskazówka: rozwinąć w szereg Maclaurina

# Energia cząstki relatywistycznej

- Nie da się rozpędzić cząstki masowej do prędkości światła – nieskończona masa/energia. Zwiększanie energii, np. polem elektrycznym, prowadzi do zwiększania masy relatywistycznej.

- Zadanie: w krakowskim synchrotronie Solaris elektrony są rozpędzane przez akcelerator liniowy do energii 550 MeV, a następnie w pierścieniu akumulacyjnym do energii 1.5 GeV. Jaką prędkość mają te elektrony w jednym i drugim akceleratorze oraz jaki jest stosunek ich masy relatywistycznej do masy spoczynkowej?



# Podsumowanie

- Prędkość światła w próżni jest zawsze stała, niezależnie od układu odniesienia, w którym się to mierzy
- Transformacja Lorentza zachowuje stałą prędkość światła
- Czas nie jest absolutny dla wszystkich układów odniesienia, dlatego zamiast przestrzeni XYZ lepiej rozpatrywać czasoprzestrzeń XYZt.
- Masa relatywistyczna rośnie z prędkością dla $v \to c$
- Z prędkością światła mogą się poruszać tylko cząstki bezmasowe
- Dla cząstek masowych przyspieszanych do prędkości bliskich c, wkład w dalszy przyrost energii kinetycznej ma przyrost jej masy, a nie prędkości, która asymptotycznie zmierza do c