Wykład 18

Czasoprzestrzeń

Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka

Względność i niezmienniczość

- Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym (inercjalne) są równoważne.
- Transformacja między tymi układami odniesienia jest liniowa
- Prawa fizyki nie zależą od układu odniesienia – we wszystkich inercjalnych układach odniesienia są jednakowe
- Prędkość światła w próżni nie zależy od układu odniesienia
- Nie istnieje bezwzględny układ odniesienia. Przestrzeń jest izotropowa.
- Względność jednoczesności – zdarzenia widziane przez danego obserwatora jako jednoczesne, nie muszą być jednoczesne dla innego obserwatora

Szczególna teoria względności

- A. Einstein: transformacja Lorentza zapewnia niezmienniczość prędkości światła
- Transformacji podlega zarówno współrzędne przestrzenne, jak i oś czasu – dlatego STW wygodnie opisać jako 4-wymiarową czasoprzestrzeń.

Czterowektor czasoprzestrzeni

- Czas to dodatkowa współrzędna, *ct* to odległość jaką przebywa światło
- Położenie zdarzenia w czasoprzestrzeni określa 4-wymiarowy wektor:

$$\boldsymbol{X} = (ct, -x, -y, -z)$$

- Co to jest wektor? Jest to element przestrzeni liniowej nad ciałem liczb, z określoną definicją działania wewnętrznego, zewnętrznego, oraz normą.

- Dla przestrzeni trójwymiarowej jest to krotka 3 liczb rzeczywistych, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy oraz długość wektora (pierwiastek z iloczynu skalarnego wektora przez samego siebie). Zawartość krotki (współrzędne wektora) określona jest przez bazę. Transformacja między układami bazowymi nie zmienia normy wektora.

Własności czterowektorów

- Wektor kontrawariantny:

$$\boldsymbol{A}^{\alpha} = (a^0, a^1, a^2, a^3) = a^0\boldsymbol{e}_0 + a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3$$

- Wektor kowariantny otrzymujemy przez mnożenie wektora kontrawariantnego przez tensor metryczny (macierz Grama):

$$A_{\alpha} = \boldsymbol{g}_{\alpha\beta}\, A^{\beta}$$

- Wektor kontrawariantny otrzymujemy przez mnożenie wektor kowariantnego przez odwrotność tensora metrycznego

$$A^{\alpha} = \boldsymbol{g}^{\alpha\beta}\, A_{\beta}$$

- „Iloczyn skalarny”: mnożenie wektora kowariatnego przez kontrawariantny:

$$\boldsymbol{AB} = A_{\alpha}B^{\alpha} = \boldsymbol{g}_{\alpha\beta}B^{\alpha}A^{\beta} = \boldsymbol{g}^{\alpha\beta}A_{\alpha}B_{\beta}$$

- Kwadrat długości wektora:

$$|\boldsymbol{A}^2| = A_{\alpha}A^{\alpha}$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

- Greckie litery w indeksie, występujące dwa razy, oznaczają sumowanie po tym indeksie od 0 do 3. Łacińskie litery – sumowanie 1…3. Przykłady:
- iloczyn skalarny czterowektora:

$$A_\alpha B^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{3} a_\alpha b^\alpha = a_0 b^0 + a_1 b^1 + \cdots$$

- składowa α wektora kowariatnego:

$$\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}\, A^\beta = \sum_{\beta=0}^{3} \boldsymbol{g}_{\alpha\beta} A^\beta = \boldsymbol{g}_{\alpha 0} a^0 + \boldsymbol{g}_{\alpha 1} a^1 + \cdots$$

- iloczyn wektorowy **C**=**A**x**B** w 3D, pierwsza składowa:

$$C^1 = \delta^{1i} \in_{ijk} a^j b_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta^{1i} \in_{ijk} a^j b_k = 1a^2 b_3 - 1a^3 b_2$$

Czterowektory w przestrzeni Minkowskiego

- Wektor kontrawariantny:

$$X^{\alpha} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

- Tensor metryczny w płaskiej czasoprzestrzeni (bez OTW):

$$\boldsymbol{g}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Wektor kowariantny:

$$X_{\alpha} = \boldsymbol{g}^{\alpha\beta} X^{\beta} = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (ct, -x, -y, -z)$$

- Kwadrat długości wektora

$$|\boldsymbol{X}|^2 = X_{\alpha} X^{\alpha} = (ct)^2 - (x)^2 - (y)^2 - (z)^2$$

Transformacja Lorentza w R4

- Transformacje Lorentza $\mathcal{L}$ tworzą grupę:
- podgrupa obrotów
- podgrupa inwersji
- podgrupa pchnięcia (boost) czyli transformacja między układami inercjalnymi:

$$\mathbf{\Lambda}_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1/c & -\gamma v_2/c & -\gamma v_3/c \\ -\gamma v_1/c & 1+(\gamma-1)v_x^2/v^2 & (\gamma-1)v_1 v_2/v^2 & (\gamma-1)v_1 v_3/v^2 \\ -\gamma v_2/c & (\gamma-1)v_2 v_1/v^2 & 1+(\gamma-1)v_y^2/v^2 & (\gamma-1)v_2 v_3/v^2 \\ -\gamma v_3/c & (\gamma-1)v_3 v_1/v^2 & (\gamma-1)v_3 v_2/v^2 & 1+(\gamma-1)v_z^2/v^2 \end{bmatrix}$$

$$X^{\alpha'} = \mathbf{\Lambda}_{\alpha}^{\alpha'} X^{\alpha}$$

- W szczególności, dla ruchu tylko wzdłuż osi x_1:

$$\mathbf{\Lambda}_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1/c & 0 & 0 \\ -\gamma v_1/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odległość w przestrzeni Minkowskiego

- Współrzędne zdarzenia w danym układzie:

$$X^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z);\;\; X_\alpha = (ct, -x, -y, -z)$$

- Współrzędne w układzie poruszającym się wzdłuż x:

$$\mathrm{c}t' = x^{0'} = \mathbf{\Lambda}^{0'}_{\alpha}\, x^\alpha = \mathbf{\Lambda}^{0'}_{0}\, x^0 + \mathbf{\Lambda}^{0'}_{1} x^1 + 0 + 0 = \gamma \cdot ct - \gamma v_1/c \cdot x$$

$$x' = x^{1'} = \mathbf{\Lambda}^{1'}_{\alpha}\, x^\alpha = \mathbf{\Lambda}^{1'}_{0}\, x^0 + \mathbf{\Lambda}^{1'}_{1} x^1 + 0 + 0 = -\gamma v_1 t + \gamma \cdot x$$

$$y' = x^{2'} = 0 + 0 + \mathbf{\Lambda}^{1'}_{2} x^2 + 0 = 1 \cdot y \qquad z' = x^{3'} = 1 \cdot z$$

- Kwadrat długości czterowektora:

$$|\boldsymbol{X}|^2 = X_\alpha X^\alpha = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Kwadrat długości czterowektora w poruszającym się układzie:

$$|\boldsymbol{X}'|^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 =$$

$$= c^2 \left(\gamma t - \frac{\gamma v_1}{c^2} x\right)^2 - (-\gamma v_1 t + \gamma x)^2 - y^2 - z^2 = \cdots \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

Odległość między zdarzeniami

- Kwadrat długości czterowektora:

$$|\boldsymbol{X}|^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Kwadrat długości czterowektora w poruszającym się układzie:

$$|\boldsymbol{X}'|^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Długość czterowektora jest **niezmiennikiem** transformacji Lorentza!

- Mamy zdarzenia P oraz K, ich współrzędne w czasoprzestrzeni to

$$(ct_p, -x_p, -y_p, -z_p) \quad (ct_k, -x_k, -y_k, -z_k)$$

- Interwał czasoprzestrzenny między P i K:

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = c^2(t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 - (y_k - y_p)^2 - (z_k - z_p)^2$$

Interwał czasoprzestrzenny

- Kwadrat odległości między zdarzeniami, czyli interwał czasoprzestrzenny, nie zależy od układu odniesienia.

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = c^2(t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 - (y_k - y_p)^2 - (z_k - z_p)^2$$

- Dla uproszczenia y=0, z=0, wtedy:

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = c^2(t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

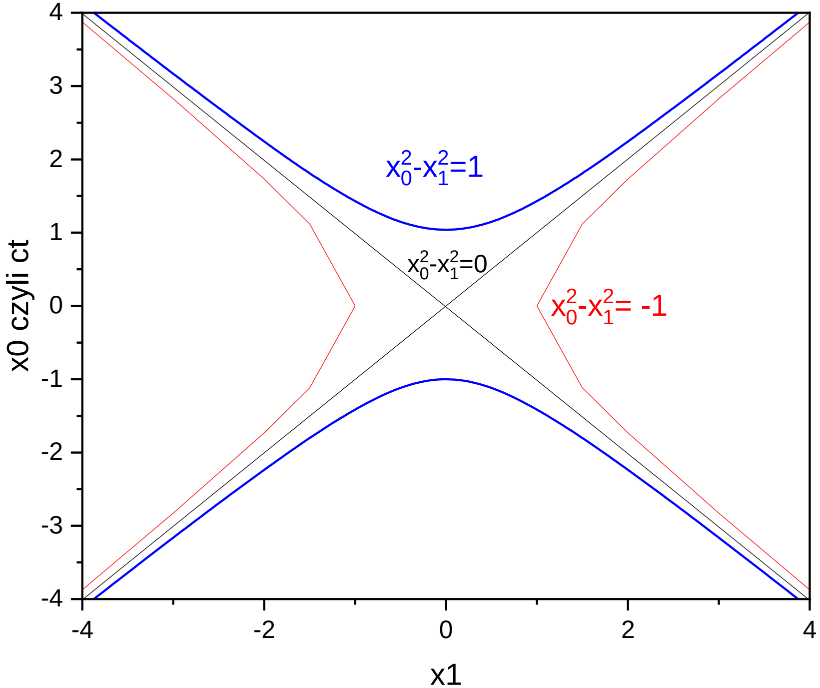
- albo w notacji czterowektorów

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = (x_{k0} - x_{p0})^2 - (x_{k1} - x_{p1})^2$$

- dla bardzo małego odstępu

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = dx_0{}^2 - dx_1{}^2$$

- ...a to jest równanie hiperboli:

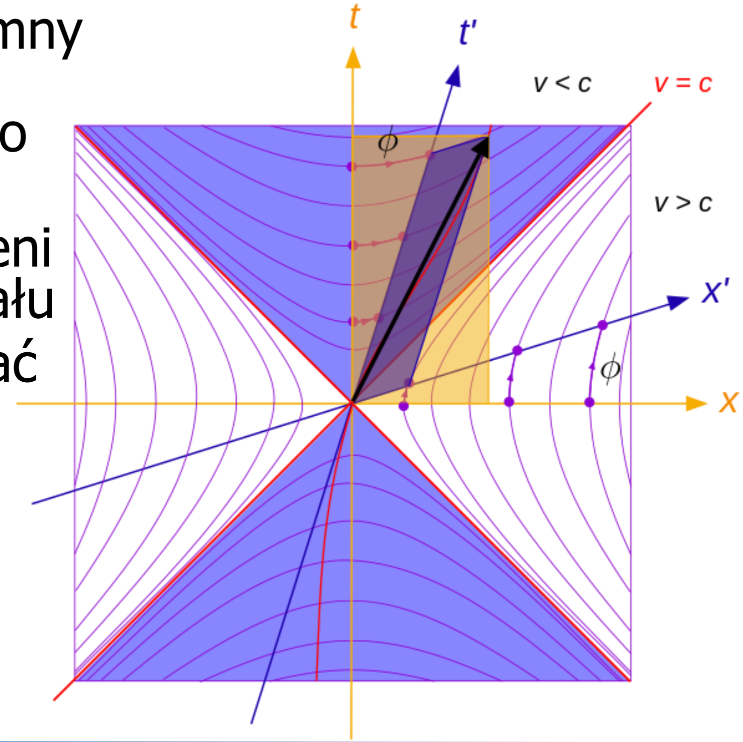


Interwał czasoprzestrzenny

- Interwał czasoprzestrzenny może być:

- Czasopodobny, $|\boldsymbol{dS}|^2 > 0$
- Zerowy (świetlny) $|\boldsymbol{dS}|^2 = 0$
- Przestrzennopodobny $|\boldsymbol{dS}|^2 < 0$

- Zdarzenia, dla których interwał jest ujemny (przestrzennopodobny) nie są powiązane przyczynowo-skutkowo
- Transformacja Lorentza powoduje, że położenie zdarzenia w czasoprzestrzeni zawsze znajduje się na hiperboli interwału
- Transformację Lorentza można też opisać jako obrót osi współrzędnych o kąt Φ



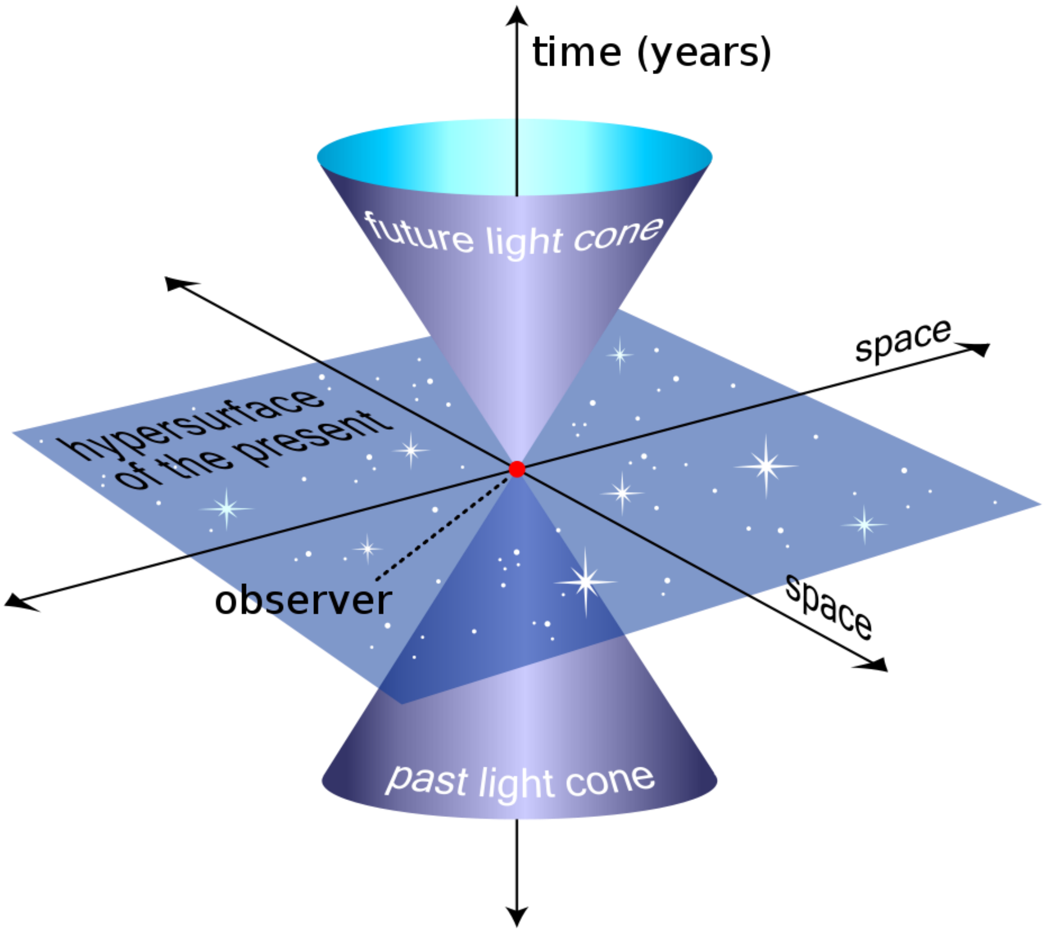
$$ct' = ct \cdot cosh(\Phi) - x \cdot sinh(\Phi)$$

$$x' = x \cdot cosh(\Phi) - ct \cdot sinh(\Phi)$$

$$\Phi = artanh\left(\frac{v}{c}\right)$$ pospieszność

Stożek świetlny

- Interwał zerowy $|\boldsymbol{dS}|^2 = 0$

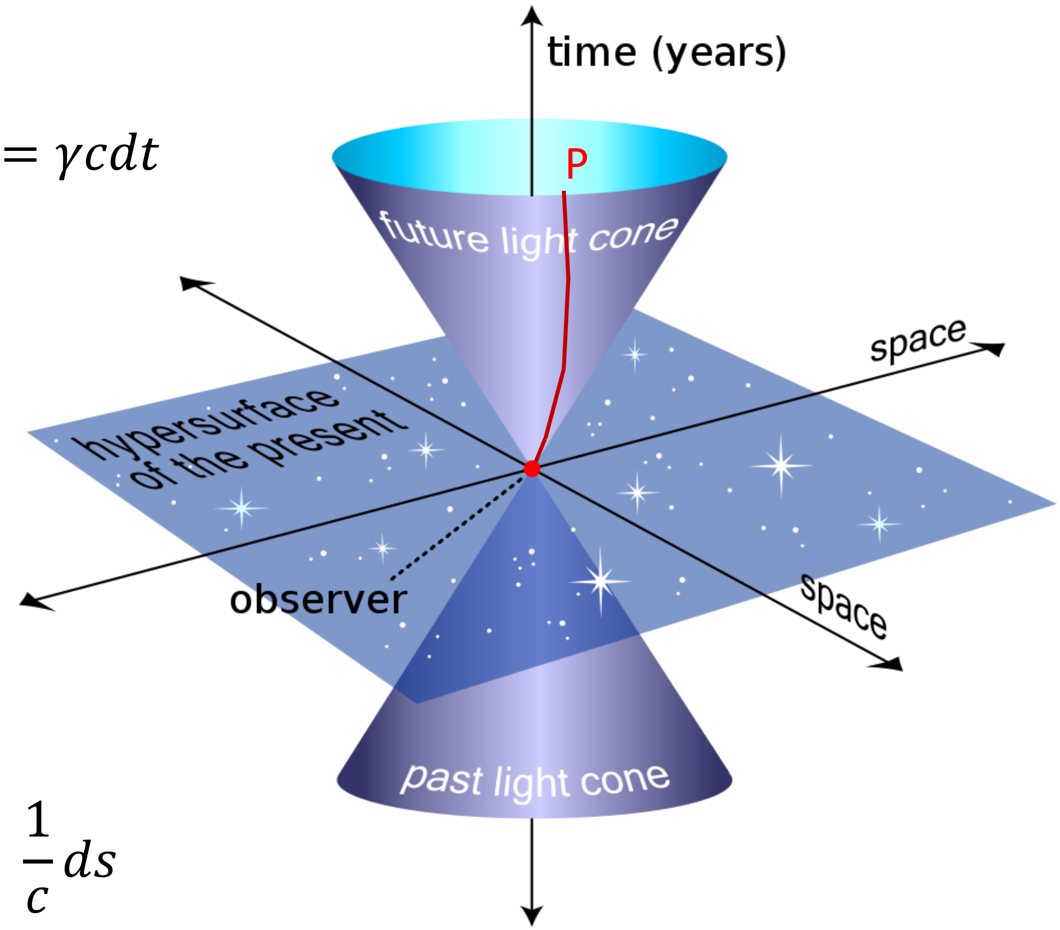


Czas własny

- Czas mierzony przez zegar związany z poruszającym się układem
- Jest niezmiennikiem relatywistycznym

$$|\boldsymbol{dS}|^2 > 0$$

$$|\boldsymbol{dS}|^2 = cd\tau = \gamma cdt$$



$$\tau = \int_{\boldsymbol{P}} d\tau = \int_{\boldsymbol{P}} \frac{1}{c} ds$$

Przydatne czterowektory

- Współrzędne zdarzenia, wektor kowariantny:

$$X_\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z);$$

- Czterowektor prędkości:

$$u_\alpha = (u_0, u_1, u_2, u_3) = \gamma\left(c, -v_x, -v_y, -v_z\right)$$

- Czterowektor energopędu:

$$p_\alpha = \left(E/c, -p_x, -p_y, -p_z\right) = m \quad u_\alpha$$

- Czterowektor operatora gradientu:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right)$$

- …a przy okazji, skalarny operator d'Alamberta

$$\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$$

Czterowektor siły

- Tzw. siła Minkowskiego, oraz czterowektor przyspieszenia:

$$F_\alpha = \frac{\partial p_\alpha}{\partial \tau} \qquad a_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau}$$

- Siła $\boldsymbol{f}$ w rozumieniu Newtona (nie jest niezmienniczym czterowektorem)

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma m \boldsymbol{u})$$

- Prawo Newtona dla stałej masy spoczynkowej:

$$F_\alpha = m a_\alpha = \left(\gamma \frac{\boldsymbol{f u}}{c}, \gamma \boldsymbol{f}\right) = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}\right)$$

- Moc:

$$\boldsymbol{f u} = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma m c^2) = \frac{dE}{dt}$$

Uproszczenie

- Załóżmy, że **c=1**

- Nowy układ jednostek, np.
- jednostka odległości to 1 stopa świetlna [lft] (~29.9792458 cm)
- Jednostka czasu to 1 nanosekunda [ns]

$$c = \frac{1\,lft}{1\,ns}$$

Admirał Grace Hopper demonstruje, jaką drogę przebiegnie informacja w ciągu 1 ns

Czterowektory, c=1

- Współrzędne zdarzenia

$$X_\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\boldsymbol{r})$$

- Czterowektor prędkości:

$$u_\alpha = (u_0, u_1, u_2, u_3) = \gamma(1, -\boldsymbol{v})$$

- Czterowektor energopędu:

$$p_\alpha = \left(E, -p_x, -p_y, -p_z\right) = (E, -\boldsymbol{p})$$

- Czterowektor gęstości prądu:

$$j_\alpha = \left(\varrho, -j_x, -j_y, -j_z\right) = (\varrho, -\boldsymbol{j})$$

- Czteropotencjał:

$$A_\alpha = (\varphi, A_1, A_2, A_3) = (\varphi, \boldsymbol{A})$$

- Skalarna czterodywergencja: $\partial_\alpha A_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{4} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha}$

Zasada zachowania ładunku

- Czterodywergencja gęstości prądu

$$\partial_\alpha j_\alpha = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla j}$$

- Wypływ prądu na jednostkę objętości jest równy szybkości malenia gęstości ładunku:

$$\boldsymbol{\nabla j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

- Czterodywergencja gęstości prądu jest równa zero, i jest to **niezmiennik relatywistyczny**

$$\partial_\alpha j_\alpha = 0$$

Czteropotencjał pola elektromagnetycznego

- Indukcja pola magnetycznego

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

- Prawo Faradaya:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{A} \right) = 0$$

- Pole elektryczne:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{A}$$

- Prawo Gaussa

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Czteropotencjał pola elektromagnetycznego

- Prawo Ampera:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)$$

$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ale c=1

więc $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$

- tożsamość

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A}$$

- Warunek cechowania (warunek Lorentza):

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0$$

- niezmiennik:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla A} = 0$$

Prawa Maxwella

- Dalambercjan czteropotencjału pola elektromagnetycznego, po uwzględnieniu warunku cechowania Lorentza, jest proporcjonalny do czterogęstości prądu:

$$\Box A_\alpha = \frac{j_\alpha}{\varepsilon_0}$$

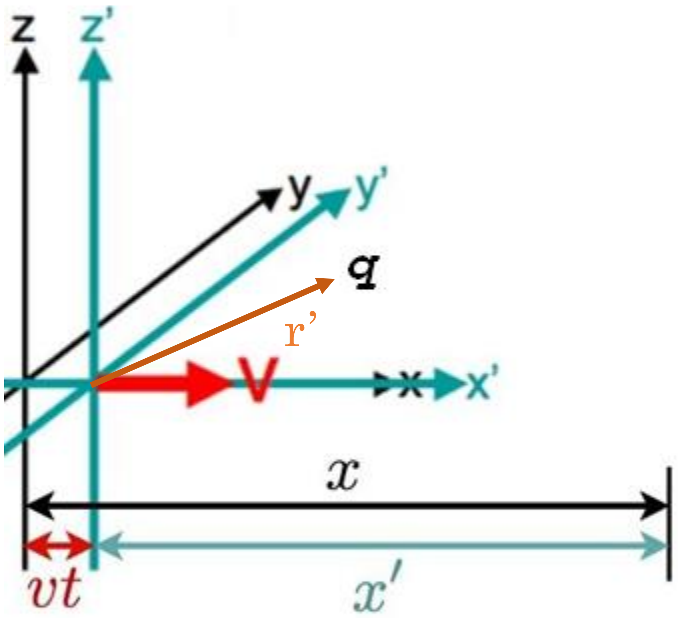
- Czterodywergencja gęstości prądu jest równa zero:

$$\partial_\alpha j_\alpha = 0$$

Science is elegant!

Czteropotencjał poruszającego się ładunku

- Ładunek q porusza się wzdłuż osi OX



- Transformacja Lorentza:

$$A'_\alpha = \left(\gamma(\varphi - vA_x), \gamma(A_x - v\varphi), A_y, A_z\right)$$

- odwrotna transformacja Lorentza:

$$A_\alpha = \left(\gamma(\varphi' + vA'_x), \gamma(A'_x + v\varphi'), A_y, A_z\right)$$

- W układzie primowanym potencjał skalarny:

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- W układzie spoczywającym potencjał jest inny:

$$\varphi = \gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\gamma(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}$$

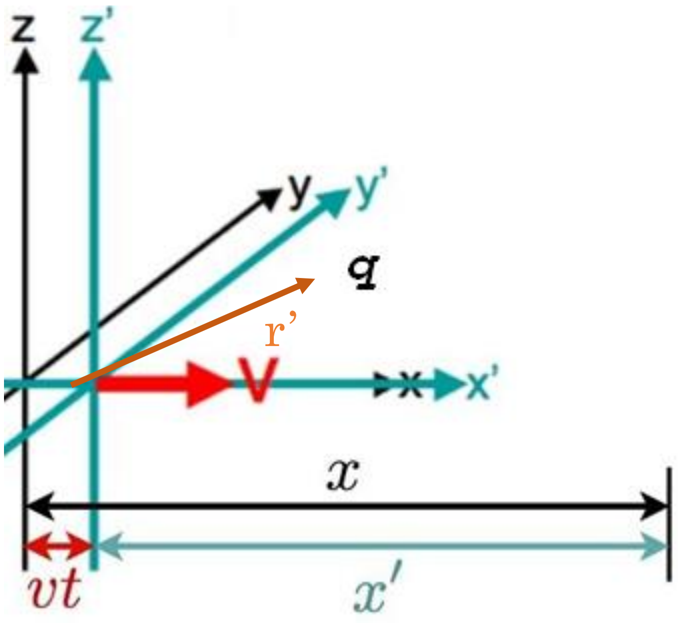
Czteropotencjał poruszającego się ładunku

- Ładunek *q* porusza się wzdłuż osi OX

- W układzie' związanym z poruszającym się ładunkiem nie ma pola magnetycznego, więc:

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = 0$$

stąd $\boldsymbol{A}' = 0$



- W układzie spoczywającym część przestrzenna czteropotencjału:

$$A_x = \gamma(0 + v\varphi') = v\varphi'$$

$$A_y = 0$$

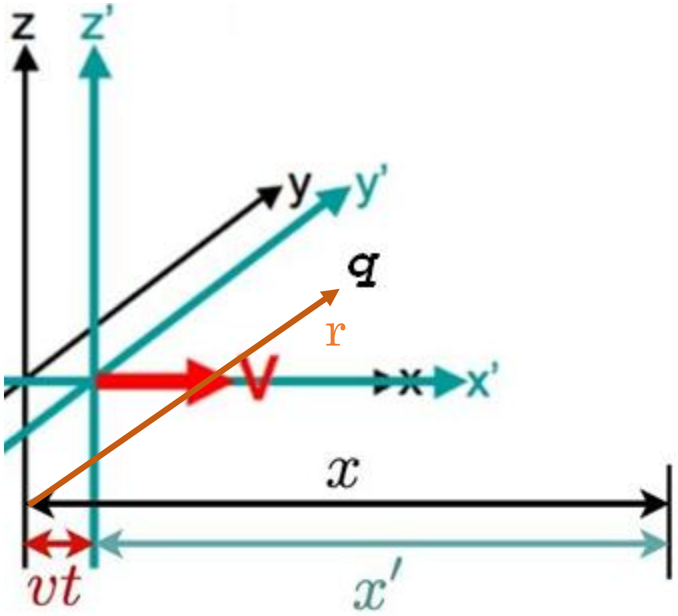
$$A_z = 0$$

- czyli jest niezerowa składowa **A**
- Teraz można policzyć pole **E** i **B**:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Czteropotencjał nieruchomego ładunku



- Ładunek *q* się nie porusza, ale ruchem jednostajnym wzdłuż osi X porusza się obserwator.
- Zadanie do przemyślenia:
  jakie składowe czterowektora A zmierzy obserwator w układzie primowanym?
- Zadanie: przez różniczkowanie składowych czteropotencjału sprawdzić, jakie są składowe pola ***E*** i ***B*** poruszającego się ładunku, oraz jaki jest związek między nimi

Siła i tensor pola elektromagnetycznego

- Długość czterowektora prędkości jest stała:

$u^\alpha u_\alpha = 1$ (dla c=1)

więc $\frac{\partial}{\partial \tau} u^\alpha u_\alpha = 0$

- Siła (przy założeniu stałej masy)

$F^\alpha = ma^\alpha = m \frac{\partial}{\partial \tau} u^\alpha$

- Załóżmy, że siła zależy od 4-prędkości, ładunku i tensora drugiego rzędu:

$$F^\alpha = q \mathcal{F}_\alpha^\beta u_\beta$$

- ale po wymnożeniu obu stron przez 4-prędkość, z uwagi na $F^\alpha u_\alpha = 0$ wynika, że tensor $\mathcal{F}$ musi być antysymetryczny, z wyzerowanymi elementami diagonalnymi

Tensor pola elektromagnetycznego

- Tensor pola elektromagnetycznego, tzw. Tensor Faradaya, to różniczka zewnętrzna czterowektora *A*:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

- Składowymi tensora pola elektromagnetycznego są pola elektryczne i magnetyczne, przykładowo:

$$\mathcal{F}_{01} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_1 \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

$$\mathcal{F}_{12} = -\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Tensor pola elektromagnetycznego

- Składowymi tensora pola elektromagnetycznego są pola elektryczne i magnetyczne

- Tensor pola elektromagnetycznego (c=1, forma kowariantna)

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_3 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Forma kontrawariantna różni się znakiem składowych *E*

- Wyznacznik tensora pola jest niezmiennikiem:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 2B^2 - 2E^2$$

Prawa Maxwella w postaci tensorowej

- Różniczka tensora pola elektromagnetycznego jest proporcjonana do czterowektora gęstości prądu

$$\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} = {j^\beta}/{\varepsilon_0}$$

- Dla próżni:

$$\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$

Transformacje tensora pola

- Wystarczy przemnożyć tensor pola przez macierze transformacji Lorentza:

$$\mathcal{F}^{\alpha'\beta'} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha}^{\alpha'} \boldsymbol{\Lambda}_{\beta}^{\beta'} \mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

- Przykładowo dla układu poruszającego się wzdłuż osi OX, c=1

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & 0 & 0 \\ -\gamma v_1 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Jeżeli takątransformacją podziałamy na pole elektryczne, np. jednorodne z tylko składową E_y to w tensorze primowanym $E_y' = \gamma E_y$ ale ponadto powstanie niezerowa składowa $B_z' = -\gamma v E_y$

Podsumowanie

- Prawa mechaniki relatywistycznej wygodnie jest opisać za pomocą czterowektorów
- Długość czterowektora jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
- Pole elektromagnetyczne można opisać za pomocą czterowektora potencjału lub za pomocą tensora Faradaya
- Składowe pola magnetycznego pojawiają się na wskutek ruchu względem układu odniesienia.