



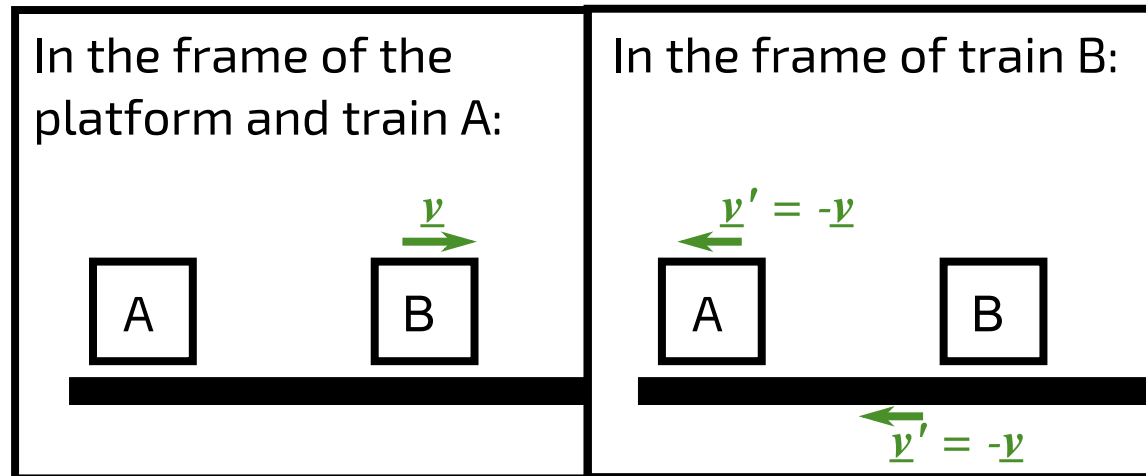
Względność ruchów

Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>

Ruch w inercjalnych układach odniesienia



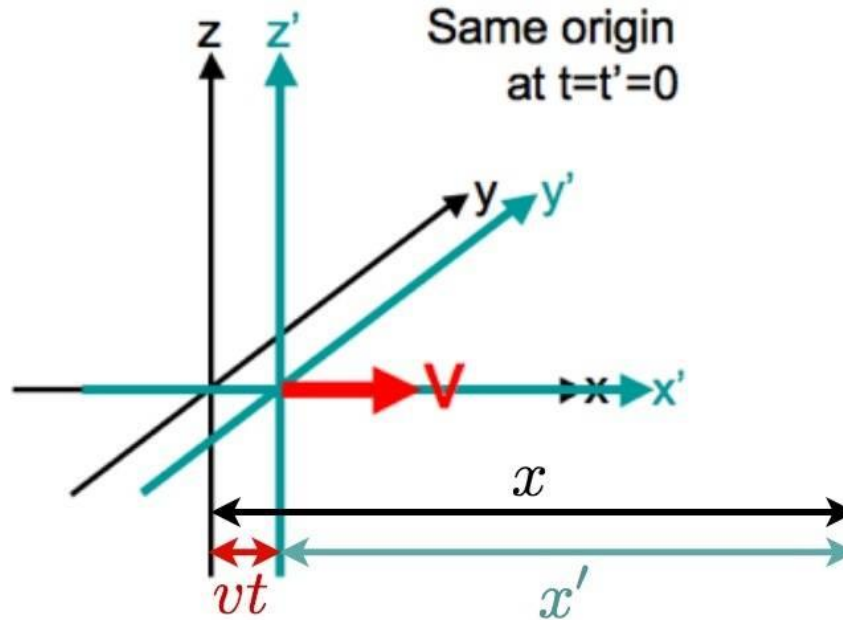
- Galileusz, 1632: obserwator wewnątrz obiektu poruszającego się prostoliniowo ze stałą prędkością, nie jest w stanie stwierdzić, czy obiekt się porusza, czy nie.
- Newton, 1687: prawa ruchu są niezmiennie dla dowolnego układu inercjalnego, czyli poruszającego się prostoliniowo ze stałą prędkością (bezwzględnie):
- „ruchy ciał zawartych w danym obszarze są względem siebie takie same, niezależnie od tego, czy obszar ten znajduje się w spoczynku, czy też w ruchu jednostajnym prostoliniowym”
- Nie istnieje bezwzględny układ odniesienia. Przestrzeń jest izotropowa.





Transformacja Galileusza

- Układ $X'Y'Z'$ porusza się względem układu XYZ (albo odwrotnie)



- Współrzędne w układzie primowanym widziane z układu XYZ , jeśli ruch wzdłuż osi X :

$$x = x' + Vt \quad y = y' \quad z = z'$$

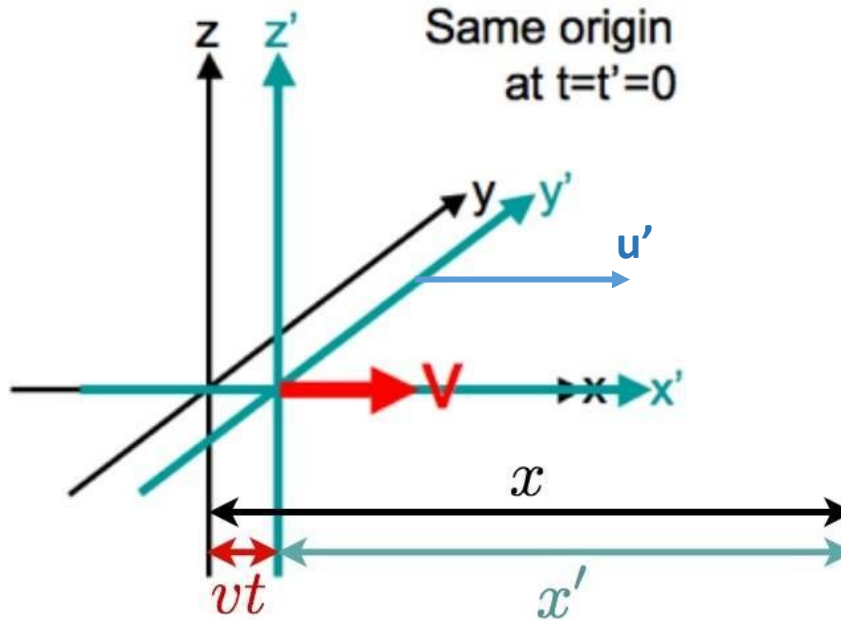
- Czas w obydwu układach biegnie tak samo

$$t = t'$$



Transformacja Galileusza

- Składanie prędkości:



- Ciało porusza się względem układu primowanego:
 $x' = u't$
- Położenie tego ciała względem układu nieprimowanego:
 $x = x' + Vt = ut + Vt$

Prędkość światła jest niezmiennikiem



- Składanie prędkości dla transformacji Galileusza:

$$\frac{dx}{dt} = V' + V$$

- ...ale z praw Maxwella wynika, że:

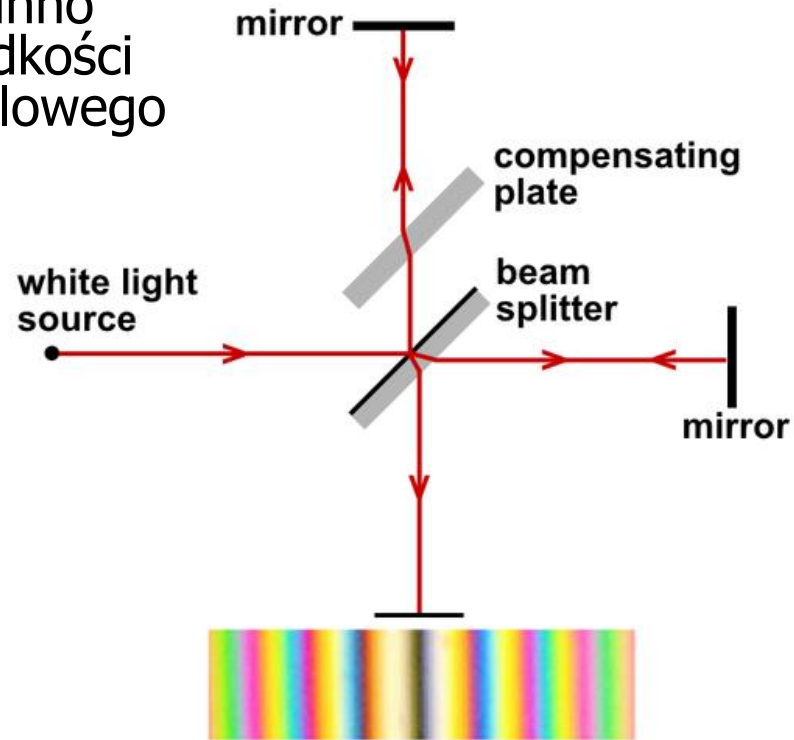
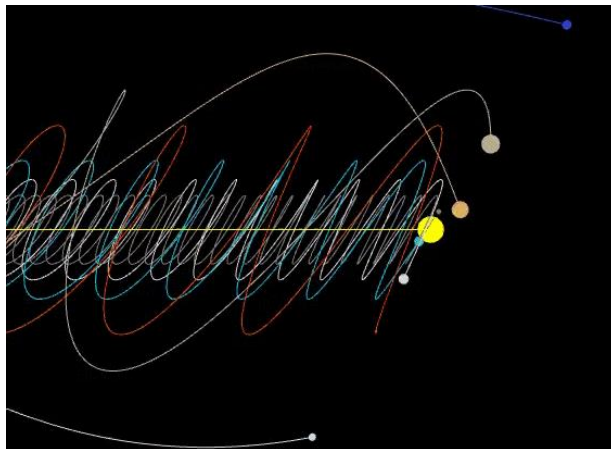
$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

- ...prędkość światła w próżni jest stała!
- Transformacja Galileusza dałaby inną wartość światła wysłanego w układzie poruszającym się...

Doświadczenie Michelsona-Morleya



- Czy fala elektromagnetyczna porusza się w jakimś ośrodku? Jeśli tak, to byłby to wyróżniony, nieruchomy układ, a skoro Ziemia porusza się 30 km/s, to powinno się dać zmierzyć różnicę prędkości światła w zależności od chwilowego kierunku ruchu Ziemi...

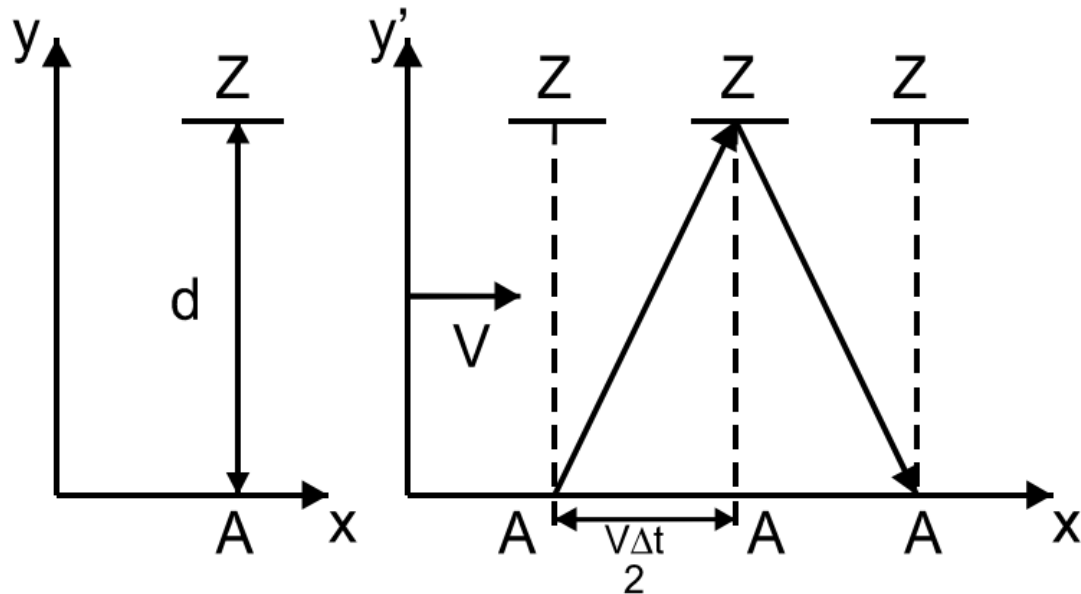


- 1887: otóż okazało się, że nie można. Nie widać było istotnej zmiany prążków interferencyjnych, ani dziennej, ani rocznej...

Prędkość światła jest niezmiennikiem



- W poruszającym się układzie odniesienia, światło pokonuje drogę $2d$ od źródła do zwierciadła.
- W spoczywającym układzie odniesienia światło, wg Galileusza/Newtona, ma dłuższą drogę do przebycia. Tymczasem doświadczenie Michelsona-Morleya nie wykazało żadnej różnicy.



- Wniosek: odległości i czas w układzie poruszającym się są jakaś inne niż spoczywającym.



Transformacja Lorentza

- Kulista fala elektromagnetyczna wysyłana w chwili $t=0$:

$$r = ct$$

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- W układzie primowanym

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

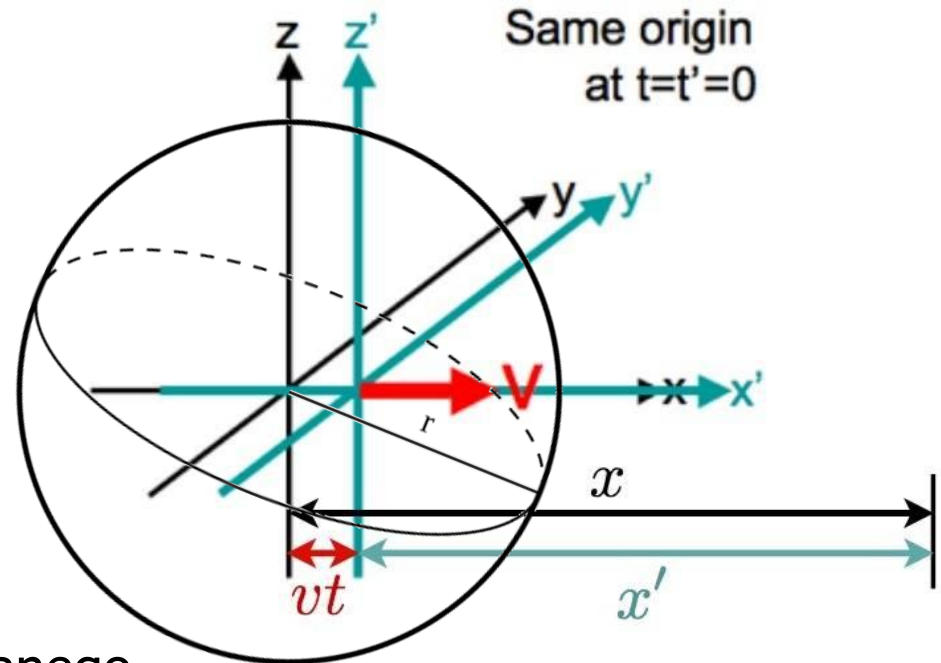
- Szukamy transformacji liniowej z $XYZt$ do $X'Y'Z't'$ wzdłuż osi X , której współczynniki zależą od prędkości układu primowanego

$$x' = \gamma(V)(x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(V)(t + b(V)x)$$





Transformacja Lorentza

- Współczynniki transformacji:

$$b(V) = -\frac{V}{c^2} = -\frac{\beta}{c} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad \gamma(V) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}$$

- Transformacja Lorentza:

$$x' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x - Vt) = \gamma(x - \beta ct)$$
$$t' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) = \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right)$$

Odwrotna transformacja Lorentza



- Układ XYZt widziany z poruszającego się układu primowanego:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x' + Vt') = \gamma(x' + \beta ct')$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) = \gamma \left(t' + \beta \frac{x'}{c} \right)$$

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}$$



Interwał czasoprzestrzenny

- Kwadrat odległości między zdarzeniami, czyli interwał czasoprzestrzenny, nie zależy od układu odniesienia.

$$|dS|^2 = c^2(t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 - (y_k - y_p)^2 - (z_k - z_p)^2$$

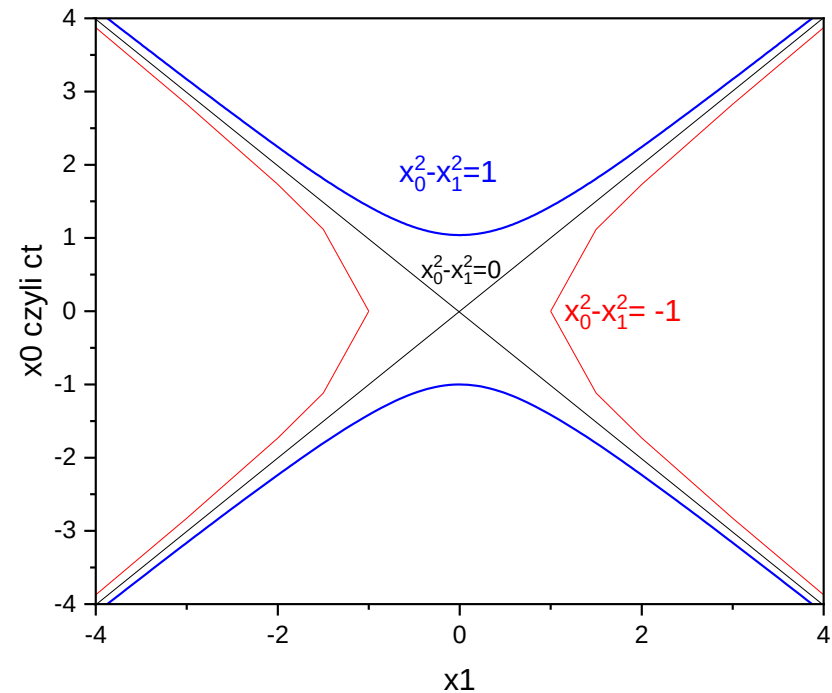
- Dla uproszczenia $y=0, z=0$, wtedy:

$$|dS|^2 = c^2(t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

- dla bardzo małego odstęp

$$|dS|^2 = dx_0^2 - dx_1^2$$

- ...a to jest równanie hiperboli, dzielącej czasoprzestrzeń zależnie od tego, czy interwał jest większy czy mniejszy od 0





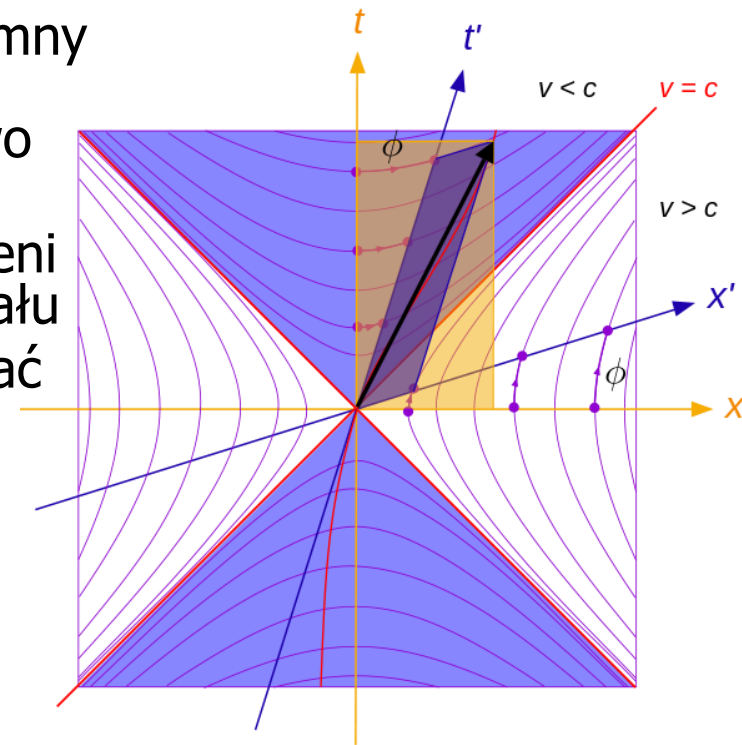
Interwał czasoprzestrzenny

- Interwał czasoprzestrzenny może być:
- Czasopodobny, $|dS|^2 > 0$
- Zerowy (światłny) $|dS|^2 = 0$
- Przestrzennopodobny $|dS|^2 < 0$
- Zdarzenia, dla których interwał jest ujemny (przestrzennopodobny) nie są powiązane przyczynowo-skutkowo
- Transformacja Lorentza powoduje, że położenie zdarzenia w czasoprzestrzeni zawsze znajduje się na hiperboli interwału
- Transformację Lorentza można też opisać jako obrót osi współrzędnych o kąt Φ

$$ct' = ct \cdot \cosh(\Phi) - x \cdot \sinh(\Phi)$$

$$x' = x \cdot \cosh(\Phi) - ct \cdot \sinh(\Phi)$$

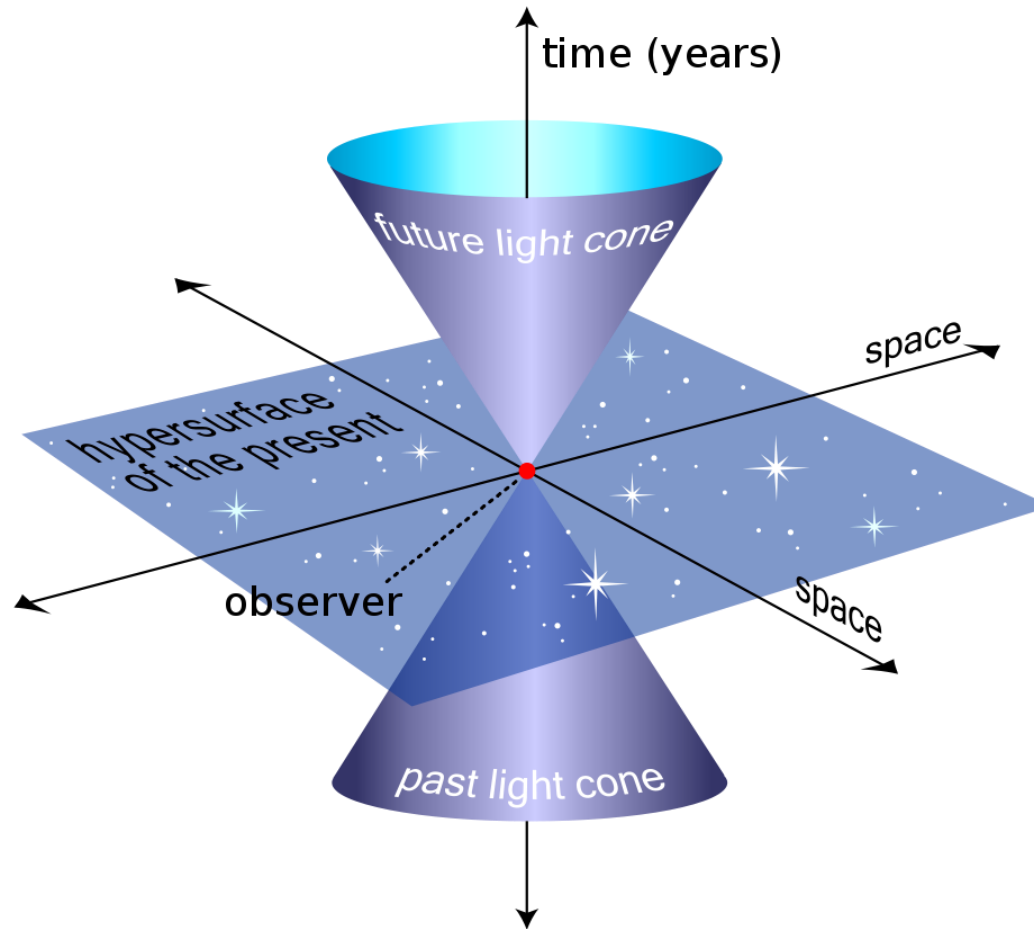
$$\Phi = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{c}\right) \quad \text{pospieszność}$$



Stożek świetlny



- Interwał zerowy $|ds|^2 = 0$

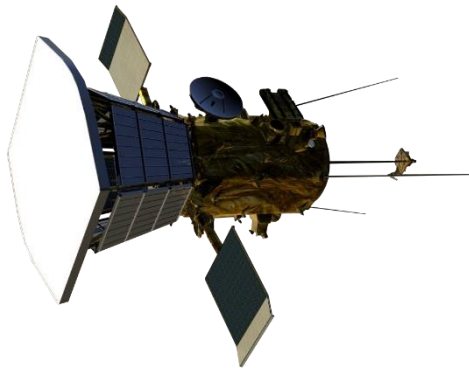


Kiedy transformacja Lorentza jest istotna?

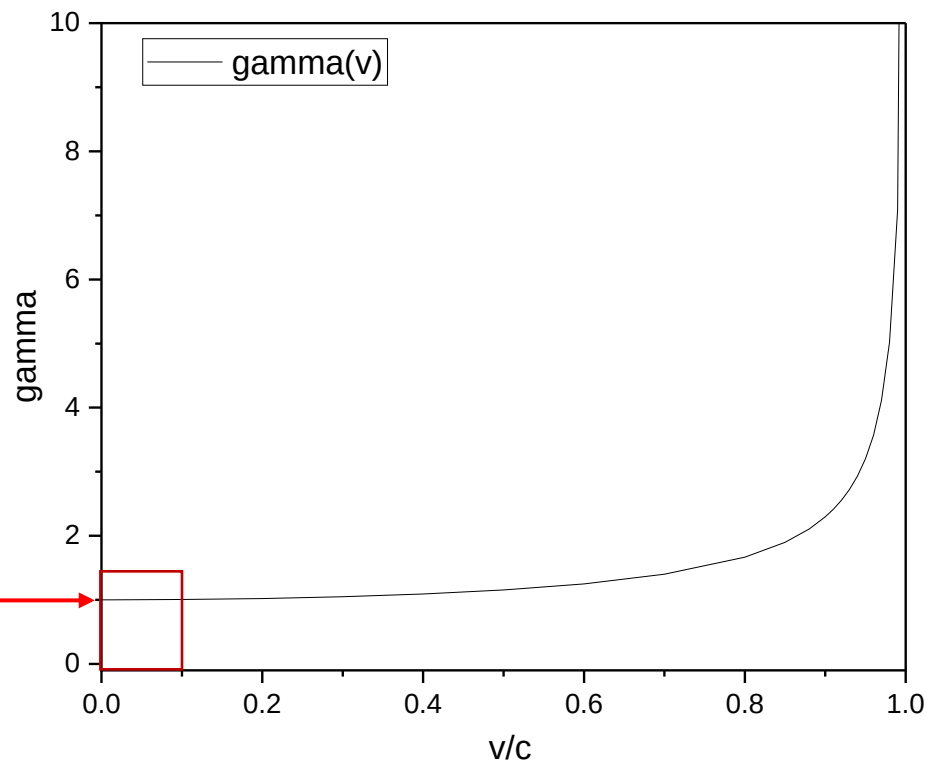
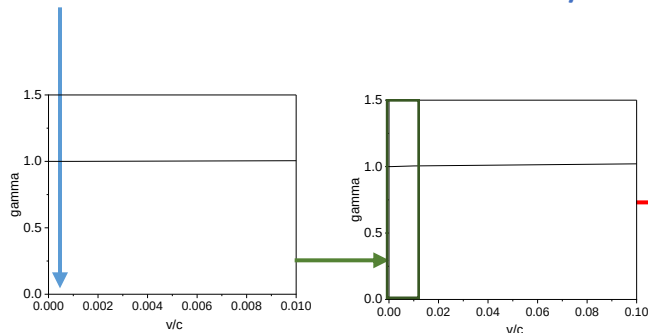


- Dla prędkości bliskich c
- Dla dokładnych pomiarów

$$\gamma(V) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Parker Solar Probe 200 km/s



Skrócenie długości



- Długość ramienia interferometru w poruszającym się laboratorium:

$$l' = x'_2 - x'_1$$

- Położenie początku i końca interferometru mierzone w nieruchomym układzie odniesienia:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x'_1 + Vt'_1) \quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x'_2 + Vt'_2)$$

- Przy założeniu jednoczesności pomiaru $t'_1 = t'_2$

$$l = x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x'_2 - x'_1) = \gamma l'$$

- czyli ramię poruszającego się interferometru jest krótsze $l' = \frac{1}{\gamma} l$



Dylatacja czasu

- Nieruchomy obserwator patrzący na zegar w poruszającym się układzie primowanym widzi, że odmierza on czas wolniej.
- W poruszającym się układzie odmierzone są odcinki czasu:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

- W spoczywającym układzie odmierzone są odstępy czasu:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

- Ale odwrotna transformacja Lorentza daje: $t = \gamma \left(t' + \beta \frac{x'}{c} \right)$

$$\Delta t = \gamma(t'_2 - t'_1) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t'$$

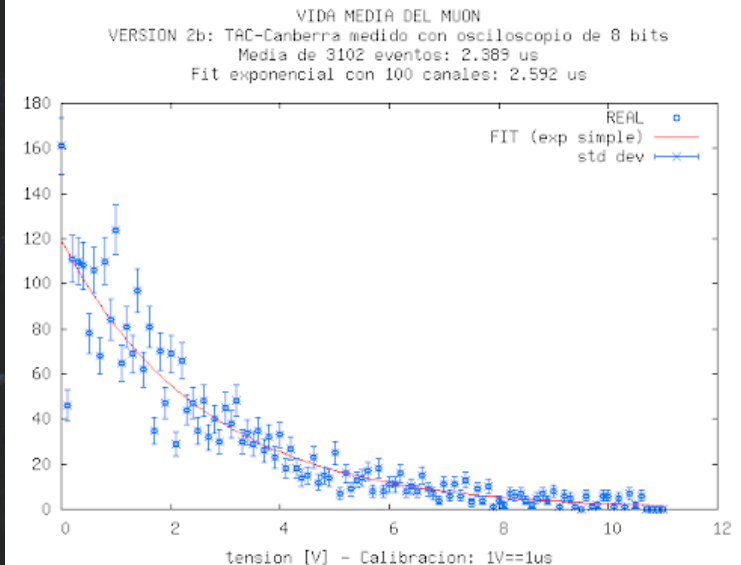
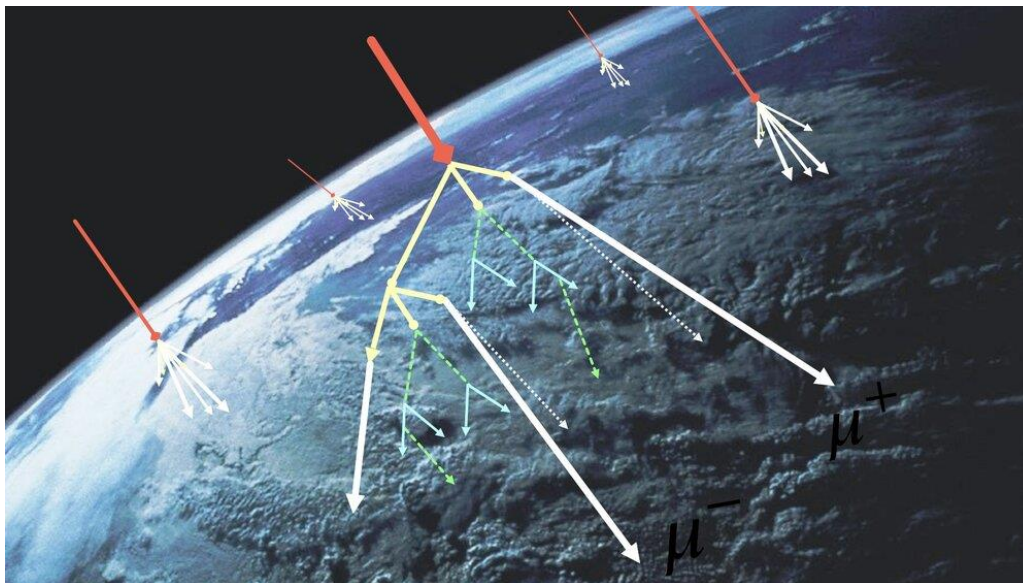
- czyli czas własny układu poruszającego się będzie szybciej niż wynika to z punktu widzenia obserwatora spoczywającego!

$$\Delta t > \Delta t'$$

Paradoks długowiecznego mionu

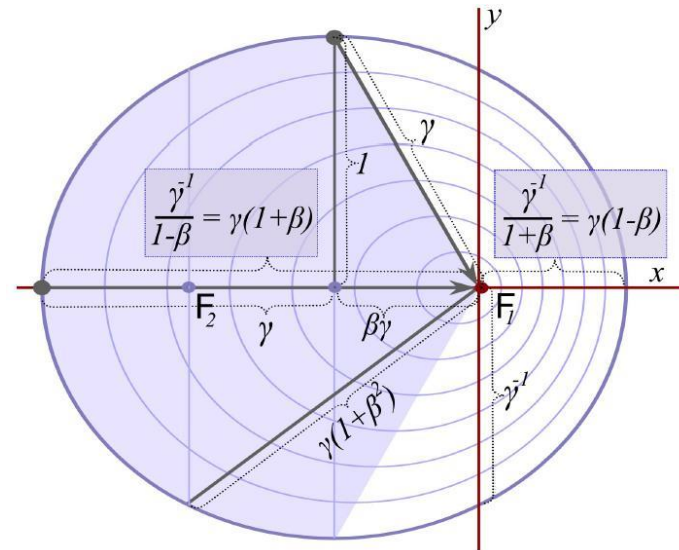


- Miony powstają w górnej warstwie atmosfery i docierają do powierzchni Ziemi, więc przebywają około 40 km.
- Średni czas życia mionu to kilka mikrosekund:



- Zadanie: dlaczego miony bez problemu przebywają 40km, jeśli wg laboratorium potrzebują co najmniej $t = 40/300000 = 134$ mikrosekund?

- $$Z' = Z$$



Składanie prędkości



- W układzie nieruchomym wektor prędkości obiektu:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

- W poruszającym się układzie prędkość tego samego obiektu:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} \quad u_y' = \frac{dy'}{dt'} \quad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

- Pochodna odwrotnych transformacji pomnożona przez dt'

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt') \quad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \gamma(dt' + \beta/c dx')$$

- Stąd prędkość obiektu w jednostkach układu primowanego

$$u_x = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + \beta/c dx'} \quad u_y = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \beta/c dx')}, \quad u_z = \dots$$

Składanie prędkości



- Podstawiając w liczniku $dt' = dx' / u'_x$ a w mianowniku $dx' = u'_x dt'$:

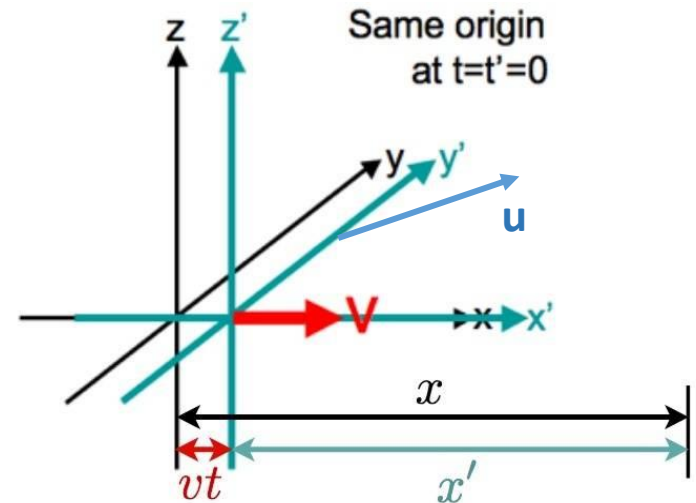
$$u_x = \frac{dx' + \beta c dx' / u'_x}{dt' (1 + u'_x \beta / c)} \quad \beta = \frac{V}{c}$$

- ostatecznie:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V / c^2}$$

- i analogicznie

$$u_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u'_y}{1 + u'_x V / c^2} \quad u_z = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u'_z}{1 + u'_x V / c^2}$$



Odwrotne składanie prędkości

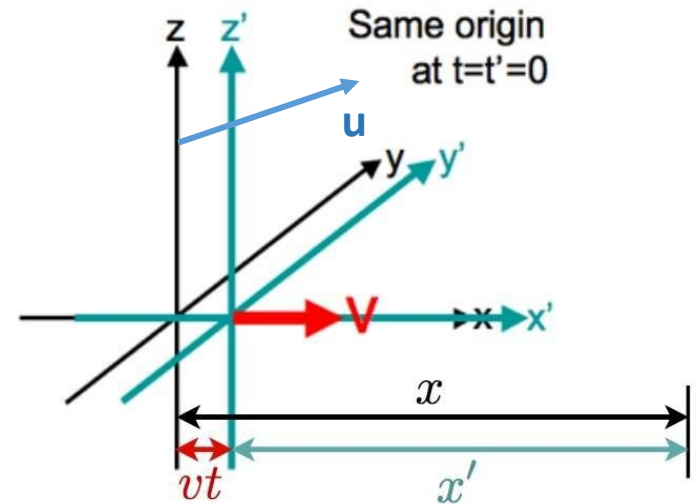


- Jaka jest w poruszającym się układzie prędkość u' obiektu, który się porusza ze stałą prędkością u względem układu nieruchomego?

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x V / c^2}$$

$$u'_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u_y}{1 - u_x V / c^2}$$

$$u'_z = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{u_z}{1 - u_x V / c^2}$$



Składanie prędkości - przykłady



- Przykład: prędkość protonów w LHC protony wynosi $0.999999991c$ – jaka jest prędkość jednego protonu względem drugiego, jeśli pędzą one naprzeciwko siebie? W/g Galileusza prawie $2c$...

- W/g transformacji Lorentza:

$$u_x = \frac{0.999999991c + 0.999999991c}{1 + 0.999999991^2 c^2 / c^2} = \frac{1.999999982}{1.99999999} = 0.9999999914c$$

- Przykład 2: ile wynosi prędkość impulsu światła mierzona w rakiecie poruszającej się z połową prędkości światła?

$$u_x = \frac{c + 0.5c}{1 + c \cdot 0.5c / c^2} = \frac{1.5c}{1.5} = c$$



Przyspieszenie

- Jakie jest przyspieszenie a obiektu, który się porusza z przyspieszeniem a' względem innego poruszającego się układu inercjalnego? Wg Galileusza to samo. Wg Lorentza:

$$a_x = a'_x \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + u'_x V / c^2} \right)^3$$
$$a_y = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u'_x V / c^2\right)^2} \left(a'_y - \frac{u'_y V / c^2}{1 + u'_y V / c^2} a'_x \right)$$
$$a_z = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u'_x V / c^2\right)^2} \left(a'_z - \frac{u'_z V / c^2}{1 + u'_z V / c^2} a'_x \right)$$

- Składowe a_y a_z zerowe tylko, gdy ruch dokładnie wzdłuż x'



Pęd, siła, energia

- Pęd relatywistyczny (założmy ruch wzdłuż OX, $u = u_x$):

$$p_x = p = mu \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} = \gamma mu$$

- Siła:

$$F_x = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma mu$$

- Energia kinetyczna potrzebna do rozpędzenia do prędkości v

$$E_k = \int_0^S F \cdot dx = \int_0^S \frac{dp}{dt} dx = \int_0^v u \cdot dp = \int_0^v u \cdot d \left(\frac{mu}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} \right)$$



Energia, masa

- Energia kinetyczna:

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^v u \cdot d \left(\frac{mu}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right) = u \cdot \left(\frac{mu}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right) - \int_0^v \left(\frac{mu}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right) du = \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} - \left(-mc^2 \sqrt{(1-u^2/c^2)} \right) \Big|_0^v = \frac{mc^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} - mc^2 \end{aligned}$$

- Tak więc relatywistyczna energia kinetyczna

$$E_k = (\gamma - 1) mc^2$$

- Energia całkowita to energia spoczynkowa + kinetyczna:

$$E = mc^2 + E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = \gamma mc^2$$

- gdzie m to masa spoczynkowa

Energia spoczynkowa



- Całkowita energia relatywistyczna:

$$E = mc^2 + E_k$$

- Dla ciała w spoczynku:

- Równoważnik masy i energii:

- Kreacja (energia zamienia się w masę)



- Anihilacja (masa zamienia się w energię)

- defekt masy: $m_{4\text{He}} = 4,00150\text{u}$, $2m_p + 2m_n = 4,03186\text{u}$



Pęd, masa, energia

- Pęd:
$$p = m \cdot v \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \gamma m \cdot v$$
- Masa relatywistyczna $m_R = \gamma m$
- Masa relatywistyczna gwałtownie rośnie przy $v \rightarrow c$
- Energia relatywistyczna: $E = \gamma m c^2$
- Kwadrat pędu $p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ stąd $v^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}$ $\gamma^2 = 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}$
- Kwadrat energii – **związek energii i pędu:**

$$E^2 = m^2 c^4 \gamma^2 = m^2 c^4 \left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}\right) = m^2 c^4 + p^2 c^2$$



- Związek energii i pędu jest niezmiennikiem relatywistycznym

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

- Dla cząstek bez masy spoczynkowej

$$E_f = p \cdot c$$

- Zadanie: udowodnić, że kinetyczna energia relatywistyczna

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

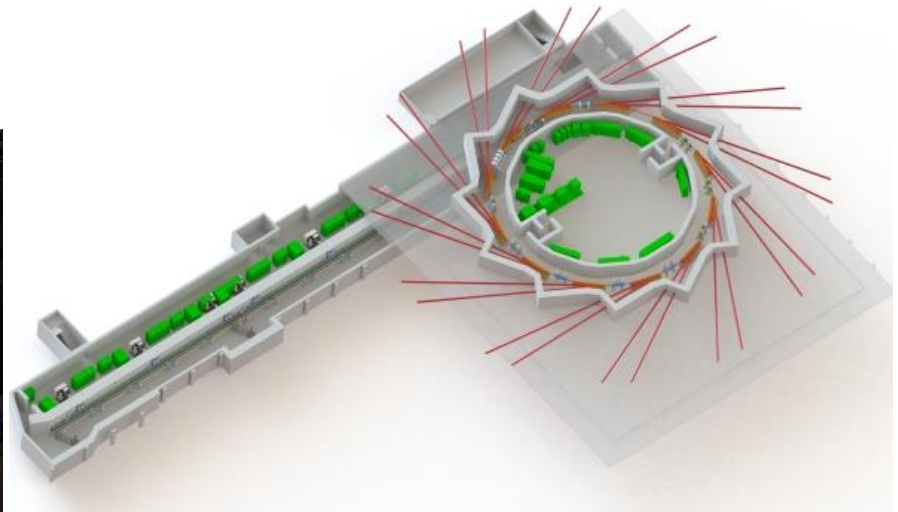
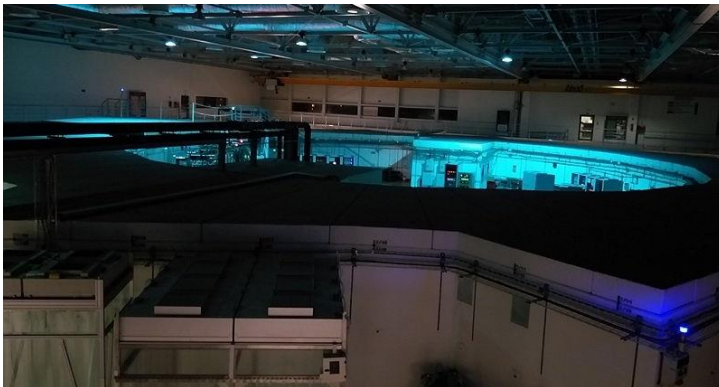
sprowadza się do klasycznego wzoru $E_K = mv^2/2$
dla v bliskich 0.

Wskazówka: rozwinąć w szereg Maclaurina

Energia cząstki relatywistycznej



- Nie da się rozpędzić cząstki masowej do prędkości światła – nieskończona masa/energia. Zwiększanie energii, np. polem elektrycznym, prowadzi do zwiększania masy relatywistycznej.
- Zadanie: w krakowskim synchrotronie Solaris elektrony są rozpędzane przez akcelerator liniowy do energii 550 MeV, a następnie w pierścieniu akumulacyjnym do energii 1.5 GeV. Jaką prędkość mają te elektrony w jednym i drugim akceleratorze oraz jaki jest stosunek ich masy relatywistycznej do masy spoczynkowej?





Podsumowanie

- Prędkość światła w próżni jest zawsze stała, niezależnie od układu odniesienia, w którym się to mierzy
- Transformacja Lorentza zachowuje stałą prędkość światła
- Czas nie jest absolutny dla wszystkich układów odniesienia, dlatego zamiast przestrzeni XYZ lepiej rozpatrywać czasoprzestrzeń XYZt.
- Masa relatywistyczna rośnie z prędkością dla $v \rightarrow c$
- Z prędkością światła mogą się poruszać tylko cząstki bezmasowe
- Dla cząstek masowych przyspieszanych do prędkości bliskich c , wkład w dalszy przyrost energii kinetycznej ma przyrost jej masy, a nie prędkości, która asymptotycznie zmierza do c