



Czasoprzestrzeń

Dr hab. Maciej Czapkiewicz
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
czapkiew@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>

Względność i niezmienniczość



- Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym (inercjalne) są równoważne.
- Transformacja między tymi układami odniesienia jest liniowa
- Prawa fizyki nie zależą od układu odniesienia – we wszystkich inercjalnych układach odniesienia są jednakowe
- Prędkość światła w próżni nie zależy od układu odniesienia
- Nie istnieje bezwzględny układ odniesienia. Przestrzeń jest izotropowa.
- Względność jednoczesności – zdarzenia widziane przez danego obserwatora jako jednoczesne, nie muszą być jednoczesne dla innego obserwatora

Szczególna teoria względności



- A. Einstein: transformacja Lorentza zapewnia niezmienniczość prędkości światła
- Transformacji podlega zarówno współrzędne przestrzenne, jak i oś czasu – dlatego STW wygodnie opisać jako 4-wymiarową czasoprzestrzeń.



SOLVAY CONFERENCE 1927

colourized by postincolour.com

A. PICARD E. HENRIOT P. EHRENFEST Ed. HERSEN Th. DE DONDER E. SCHRÖDINGER E. VERSCHAFFELT W. PAULI W. HEISENBERG R.H. FOWLER L. BRILLOUIN
P. DEBYE M. KNUDSEN W.L. BRAGG H.A. KRAMERS P.A.M. DIRAC A.H. COMPTON L. de BROGLIE M. BORN N. BOHR
I. LANGMUIR M. PLANCK Mme CURIE H.A. LORENTZ A. EINSTEIN P. LANGEVIN Ch.E. GUYE C.T.R. WILSON O.W. RICHARDSON
Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL

Czterowektor czasoprzestrzeni

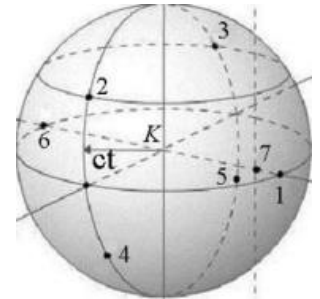


- Czas to dodatkowa współrzędna, ct to odległość jaką przebywa światło
- Położenie zdarzenia w czasoprzestrzeni określa 4-wymiarowy wektor:

$$\mathbf{X} = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{r})$$

- Długość takiego czterowektora:

$$|\mathbf{X}| = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$



- Co to jest wektor? Jest to element przestrzeni liniowej nad ciałem liczb, z określoną definicją działania wewnętrznego, zewnętrznego, oraz normą.
- Dla przestrzeni trójwymiarowej jest to krotka 3 liczb rzeczywistych, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy oraz długość wektora (pierwiastek z iloczynu skalarnego wektora przez samego siebie). Zawartość krotki (współrzędne wektora) określona jest przez bazę (np. wersory). Transformacja między układami bazowymi nie zmienia normy wektora.

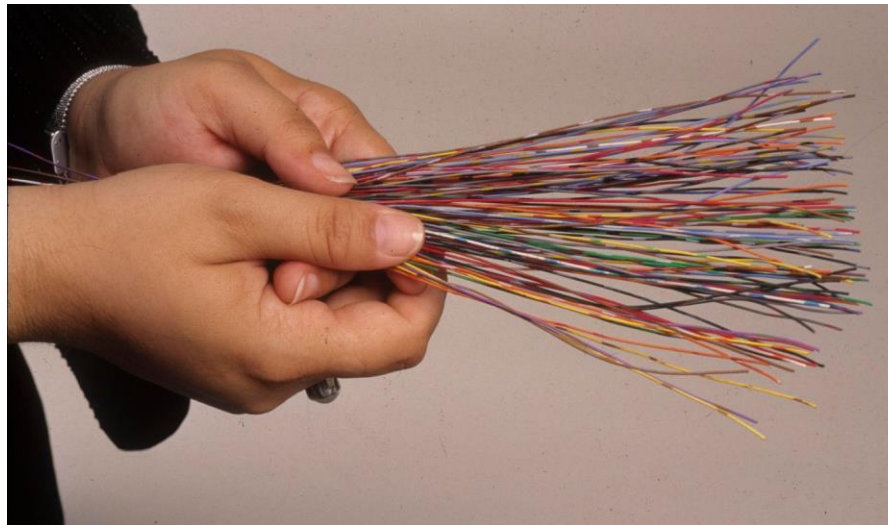


Uproszczenie

- Załóżmy, że **$c=1$**
- Wtedy czterowektor $X = (1t, -x, -y, -z) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$
- Nowy układ jednostek, np.
jednostka odległości to 1 stopa świetlna [lft] (~ 29.9792458 cm)
jednostka czasu to 1 nanosekunda [ns]

$$c = \frac{1 \text{ lft}}{1 \text{ ns}} = 1$$

Okolo 30cm – odległość jaką światło przebywa w ciągu 1 ns





Własności czterowektorów

➤ Wektor kowariantny: $A_\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

➤ Wektor kontrawariantny:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

➤ Wektor kowariantny otrzymujemy przez mnożenie wektora kontrawariantnego przez tensor metryczny (macierz Grama):

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$$

➤ Wektor kontrawariantny otrzymujemy przez mnożenie wektora kowariantnego przez odwrotność tensora metrycznego

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$$

➤ „Iloczyn skalarny”: mnożenie wektora kowariantnego przez kontrawariantny (lub odwrotnie):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha$$

➤ Norma (długość wektora): $|\mathbf{A}^2| = A_\alpha A^\alpha$



Konwencja sumacyjna Einsteina

- Greckie litery w indeksie, występujące dwa razy, oznaczają sumowanie po tym indeksie od 0 do 3. Łacińskie litery – sumowanie 1...3. Przykłady:
- iloczyn skalarny czterowektora:

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 a_{\alpha}b^{\alpha} = a_0b^0 + a_1b^1 + \dots$$

- składowa α -fowa wektora kowariantnego:

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} A^{\beta} = \sum_{\beta=0}^3 \mathbf{g}_{\alpha\beta} A^{\beta} = \mathbf{g}_{\alpha 0} a^0 + \mathbf{g}_{\alpha 1} a^1 + \dots$$

- iloczyn wektorowy $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ w 3D, pierwsza składowa:

$$C^1 = \delta^{1i} \epsilon_{ijk} a^j b_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta^{1i} \epsilon_{ijk} a^j b_k = 1a^2b_3 - 1a^3b_2$$

Czterowektory w przestrzeni Minkowskiego



- Wektor kontrawariantny:

$$X^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (1t, x, y, z)$$

- Tensor metryczny w płaskiej czasoprzestrzeni (bez OTW):

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Wektor kowariantny:

$$X_\alpha = g^{\alpha\beta} X^\beta = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (1t, -x, -y, -z)$$

- Kwadrat długości wektora

$$|\mathbf{X}|^2 = X_\alpha X^\alpha = (t)^2 - (x)^2 - (y)^2 - (z)^2$$



Transformacja Lorentza w R4

- Transformacje Lorentza $\mathcal{L}$ tworzą grupę:
- podgrupa obrotów
- podgrupa inwersji
- podgrupa pchnięcia (boost) czyli transformacja między układami inercyjnymi:

$$\Lambda_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & 1 + (\gamma - 1)v_x^2/v^2 & (\gamma - 1)v_1 v_2/v^2 & (\gamma - 1)v_1 v_3/v^2 \\ -\gamma v_2 & (\gamma - 1)v_2 v_1/v^2 & 1 + (\gamma - 1)v_y^2/v^2 & (\gamma - 1)v_2 v_3/v^2 \\ -\gamma v_3 & (\gamma - 1)v_3 v_1/v^2 & (\gamma - 1)v_3 v_2/v^2 & 1 + (\gamma - 1)v_z^2/v^2 \end{bmatrix}$$

$$X^{\alpha'} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} X^{\alpha}$$

- W szczególności, dla ruchu tylko wzdłuż osi x_1 :

$$\Lambda_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & 0 & 0 \\ -\gamma v_1 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - (v_1)^2}}$$

Odległość w przestrzeni Minkowskiego



- Współrzędne zdarzenia w danym układzie:

$$X^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z); \quad X_\alpha = (t, -x, -y, -z)$$

- Współrzędne w układzie poruszającym się wzdłuż x:

$$t' = x^{0'} = \Lambda_{\alpha}^{0'} x^\alpha = \Lambda_0^{0'} x^0 + \Lambda_1^{0'} x^1 + 0 + 0 = \gamma \cdot t - \gamma v_1 \cdot x$$

$$x' = x^{1'} = \Lambda_{\alpha}^{1'} x^\alpha = \Lambda_0^{1'} x^0 + \Lambda_1^{1'} x^1 + 0 + 0 = -\gamma v_1 t + \gamma \cdot x$$

$$y' = x^{2'} = 0 + 0 + \Lambda_2^{1'} x^2 + 0 = 1 \cdot y \quad z' = x^{3'} = 1 \cdot z$$

- Kwadrat długości czterowektora:

$$|X|^2 = X_\alpha X^\alpha = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Kwadrat długości czterowektora w poruszającym się układzie:

$$\begin{aligned} |X'|^2 &= t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \\ &= (\gamma t - \gamma v_1 x)^2 - (-\gamma v_1 t + \gamma x)^2 - y^2 - z^2 = \dots \end{aligned} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1)^2}}$$

Odległość między zdarzeniami



- Kwadrat długości czterowektora:

$$|\mathbf{X}|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Kwadrat długości czterowektora w poruszającym się układzie:

$$|\mathbf{X}'|^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Długość czterowektora jest **niezmiennikiem** transformacji Lorentza!

- Mamy zdarzenia P oraz K, ich współrzędne w czasoprzestrzeni to

$$(t_p, -x_p, -y_p, -z_p) \quad (t_k, -x_k, -y_k, -z_k)$$

- Interwał czasoprzestrzenny między P i K:

$$|d\mathbf{S}|^2 = (t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 - (y_k - y_p)^2 - (z_k - z_p)^2$$



Interwał czasoprzestrzenny

- Kwadrat odległości między zdarzeniami, czyli interwał czasoprzestrzenny, nie zależy od układu odniesienia.

$$|dS|^2 = (t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 - (y_k - y_p)^2 - (z_k - z_p)^2$$

- Dla uproszczenia $y=0, z=0$, wtedy:

$$|dS|^2 = (t_k - t_p)^2 - (x_k - x_p)^2 = dt^2 - dx^2$$

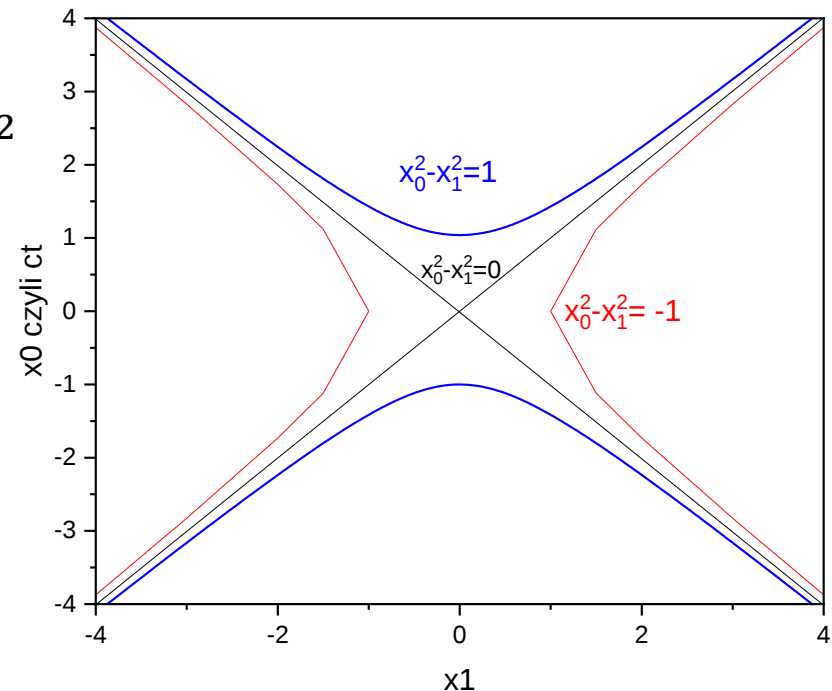
- albo w notacji czterowektorów

$$|dS|^2 = (x_{k0} - x_{p0})^2 - (x_{k1} - x_{p1})^2$$

- dla bardzo małego odstępu

$$|dS|^2 = dx_0^2 - dx_1^2$$

- ...a to jest równanie hiperboli:



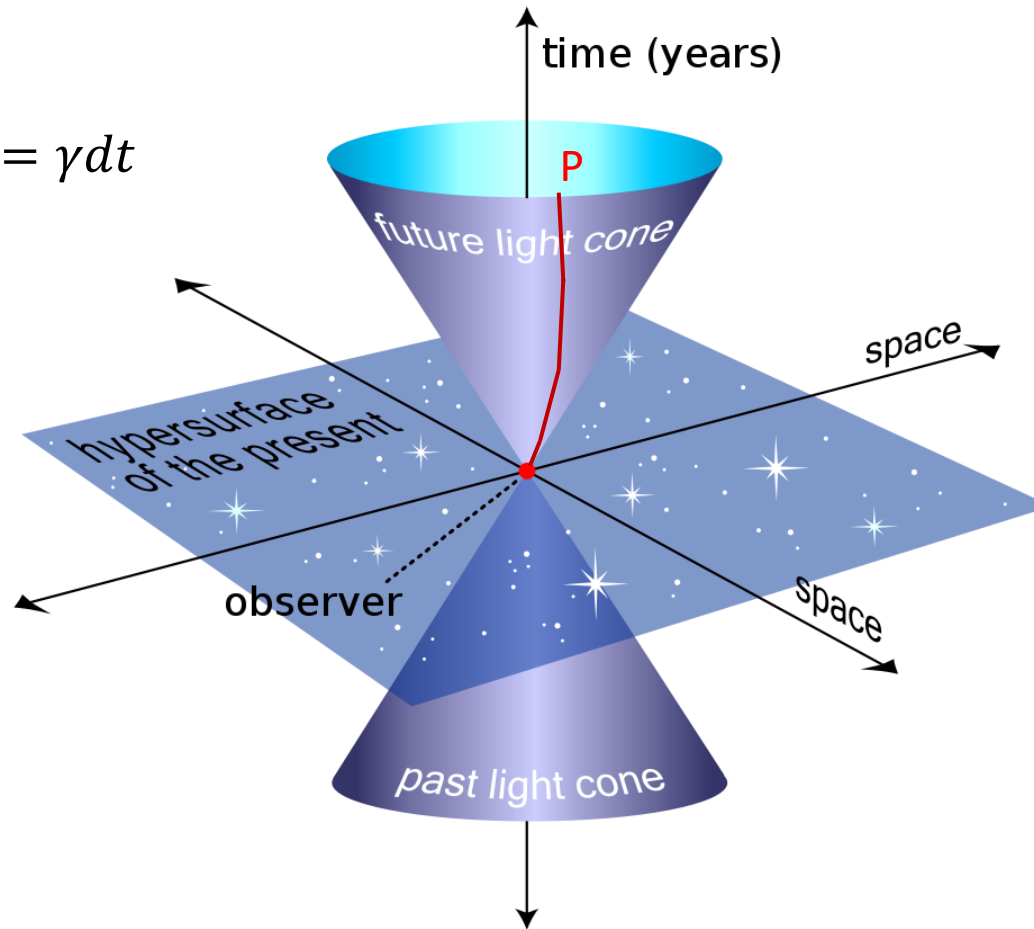
Czas własny



- Czas mierzony przez zegar związany z poruszającym się układem
- Jest niezmiennikiem relatywistycznym

$$|dS|^2 > 0$$

$$|dS|^2 = 1d\tau = \gamma dt$$



$$\tau = \int_P d\tau$$



Przydatne czterowektory, $c=1$

- Współrzędne zdarzenia, wektor kowariantny:

$$X_\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (1t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{r});$$

- Czterowektor prędkości:

$$u_\alpha = \frac{\partial X_\alpha}{\partial s} = (u_0, u_1, u_2, u_3) = \gamma(1, -v_x, -v_y, -v_z)$$

- Długość wektora czteroprędkości wynosi 1.
- Dla cząstki spoczywającej wektor jest równoległy do osi czasu
 $u_\alpha = (1, 0, 0, 0)$

- Czterowektor energopędu (nie dla fotonów):

$$p_\alpha = m\gamma(1, \mathbf{v}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z) = m u_\alpha$$

- Długość czterowektora energopędu jest stała i proporcjonalna do kwadratu masy spoczynkowej



Czterowektor siły

- Tzw. siła Minkowskiego, oraz czterowektor przyspieszenia:

$$F_{\alpha} = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial \tau} \qquad a_{\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \tau}$$

- Siła $\mathbf{f}$ w rozumieniu Newtona (nie jest niezmienniczym czterowektorem)

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma m \mathbf{u})$$

- Prawo Newtona dla stałej masy spoczynkowej:

$$F_{\alpha} = m a_{\alpha} = \left(\gamma \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{1}, \gamma \mathbf{f} \right) = \left(\frac{\gamma}{1} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right)$$

- Moc:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma m) = \frac{dE}{dt}$$



Przydatne czterowektory, c.d.

- Czterowektor gęstości prądu:

$$j_\alpha = (\varrho, -j_x, -j_y, -j_z) = (\varrho, -\mathbf{j})$$

- Czteropotencjał:

$$A_\alpha = (\varphi, A_1, A_2, A_3) = (\varphi, \mathbf{A})$$

- Czterowektor operatora gradientu:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

- Skalarna czterodivergencja:

$$\partial_\alpha A_\alpha = \sum_{\alpha=0}^4 \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

- ...a przy okazji, skalarny operator d'Alemberta

$$\square = \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$



- Czterodywergencja gęstości prądu

$$\partial_{\alpha} j_{\alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}$$

- Wypływ prądu na jednostkę objętości jest równy szybkości malenia gęstości ładunku:

$$\nabla \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Czterodywergencja gęstości prądu jest równa zero, i jest to **niezmiennik relatywistyczny**

$$\partial_{\alpha} j_{\alpha} = 0$$

Czteropotencjał pola elektromagnetycznego



- Indukcja pola magnetycznego

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Prawo Faradaya:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0$$

- Pole elektryczne:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$$

- Prawo Gaussa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Czteropotencjał pola elektromagnetycznego



- Prawo Ampera:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \text{ ale } c=1 \\ \text{więc } \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

- tożsamość

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

- Warunek cechowania (warunek Lorentza):

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0$$

- niezmiennik:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$



- D'Alambertjan czteropotencjału pola elektromagnetycznego, po uwzględnieniu warunku cechowania Lorentza, jest proporcjonalny do czterogęstości prądu:

$$\square A_{\alpha} = \frac{j_{\alpha}}{\varepsilon_0}$$

- Czterodivergencja gęstości prądu jest równa zero:

$$\partial_{\alpha} j_{\alpha} = 0$$

Science is elegant!

Czteropotencjał poruszającego się ładunku



- Ładunek q porusza się wzdłuż osi OX

- Transformacja Lorentza:

$$A'_\alpha = (\gamma(\varphi - vA_x), \gamma(A_x - v\varphi), A_y, A_z)$$

- odwrotna transformacja Lorentza:

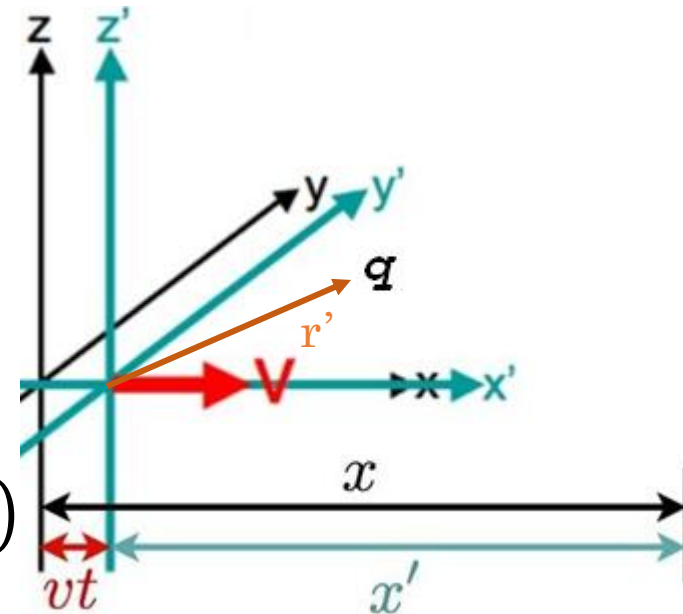
$$A_\alpha = (\gamma(\varphi' + vA'_x), \gamma(A'_x + v\varphi'), A_y, A_z)$$

- W układzie primowanym potencjał skalarny:

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- W układzie spoczywającym potencjał jest inny:

$$\varphi = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}$$



Czteropotencjał poruszającego się ładunku



- Ładunek q porusza się wzdłuż osi OX
- W układzie' związanym z poruszającym się ładunkiem nie ma pola magnetycznego, więc:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = 0$$

$$\text{stąd } \mathbf{A}' = 0$$

- W układzie spoczywającym część przestrzenna czteropotencjału:

$$A_x = \gamma(0 + v\varphi') = v\varphi'$$

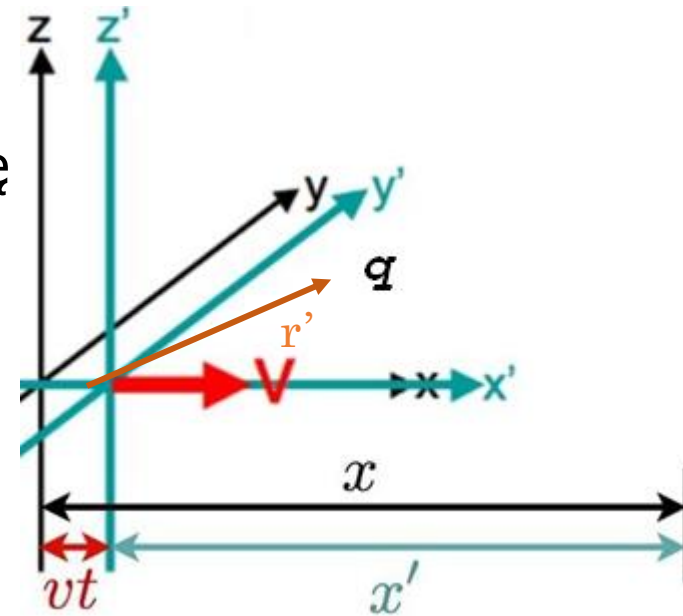
$$A_y = 0$$

$$A_z = 0$$

- czyli jest niezerowa składowa $\mathbf{A}$
- Teraz można policzyć pole $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$$

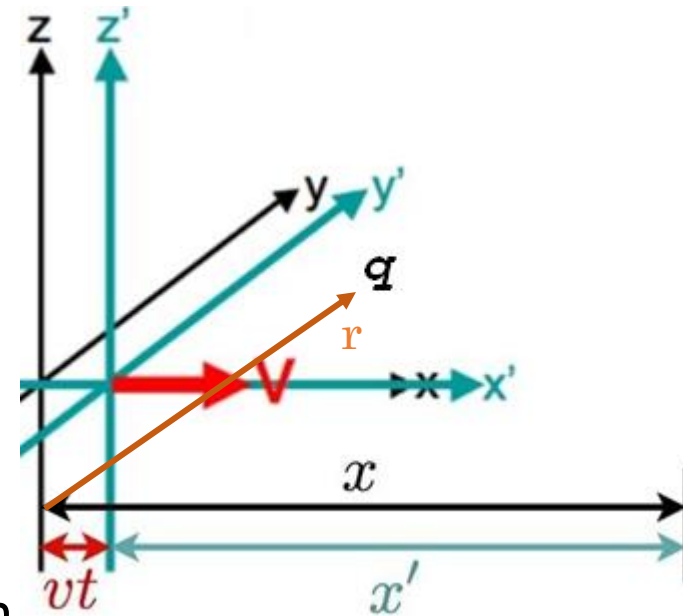
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$



Czteropotencjał nieruchomego ładunku



- Ładunek q się nie porusza, ale ruchem jednostajnym wzdłuż osi X porusza się obserwator.
- Zadanie do przemyślenia: jakie składowe czterowektora A zmierzy obserwator w układzie primowanym?
- Zadanie: przez różniczkowanie składowych czteropotencjału sprawdzić, jakie są składowe pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ poruszającego się ładunku, oraz jaki jest związek między nimi



Siła i tensor pola elektromagnetycznego



- Długość czterowektora prędkości jest stała:

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \quad (\text{dla } c=1)$$

$$\text{więc } \frac{\partial}{\partial \tau} u^\alpha u_\alpha = 0$$

- Siła (przy założeniu stałej masy)

$$F^\alpha = m a^\alpha = m \frac{\partial}{\partial \tau} u^\alpha$$

- Załóżmy, że siła zależy od 4-prędkości, ładunku i tensora drugiego rzędu:

$$F^\alpha = q \mathcal{F}_\alpha^\beta u_\beta$$

- ale po wymnożeniu obu stron przez 4-prędkość, z uwagi na $F^\alpha u_\alpha = 0$ wynika, że tensor $\mathcal{F}$ musi być antysymetryczny, z wyzerowanymi elementami diagonalnymi



Tensor pola elektromagnetycznego

- Tensor pola elektromagnetycznego, tzw. Tensor Faradaya, to różniczka zewnętrzna czterowektora A :

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$$

- Składowymi tensora pola elektromagnetycznego są pola elektryczne i magnetyczne, przykładowo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{01} &= -\frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_1 & \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \\ \mathcal{F}_{12} &= -\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

Tensor pola elektromagnetycznego



- Składowymi tensora pola elektromagnetycznego są pola elektryczne i magnetyczne
- Tensor pola elektromagnetycznego ($c=1$, forma kowariantna)

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Forma kontrawariantna różni się znakiem składowych E
- Wyznacznik tensora pola jest niezmiennikiem:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 2B^2 - 2E^2$$



- Różniczka tensora pola elektromagnetycznego jest proporcjonalna do czterowektora gęstości prądu

$$\partial_{\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = j^{\beta} / \varepsilon_0$$

- Dla próżni:

$$\partial_{\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$



Transformacje tensora pola

- Wystarczy przemnożyć tensor pola przez macierze transformacji Lorentza:

$$\mathcal{F}^{\alpha'\beta'} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'} \mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

- Przykładowo dla układu poruszającego się wzdłuż osi OX, $c=1$

$$\Lambda_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & 0 & 0 \\ -\gamma v_1 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Jeżeli taką transformacją podziałamy na pole elektryczne, np. jednorodne z tylko składową E_y to w tensorze primowanym $E_y' = \gamma E_y$ ale ponadto powstanie niezerowa składowa $B_z' = -\gamma v E_y$

Podsumowanie



- Prawa mechaniki relatywistycznej wygodnie jest opisać za pomocą czterowektorów
- Długość czterowektora jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
- Pole elektromagnetyczne można opisać za pomocą czterowektora potencjału lub za pomocą tensora Faradaya
- Składowe pola magnetycznego pojawiają się na skutek ruchu względem układu odniesienia.