



# Fale materii

Dr hab. Maciej Czapkiewicz  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[czapkiew@agh.edu.pl](mailto:czapkiew@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Fizyka>



# Fale i cząstki

- Światło to fala elektromagnetyczna, ale też strumień cząstek
- Energia fotonu:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_f = c \cdot p_f$$

- Pęd fotonu:

$$p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

- 1924, L. de Broglie, PhD – cząstki materialne też są falami?
- Długość fali materii:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

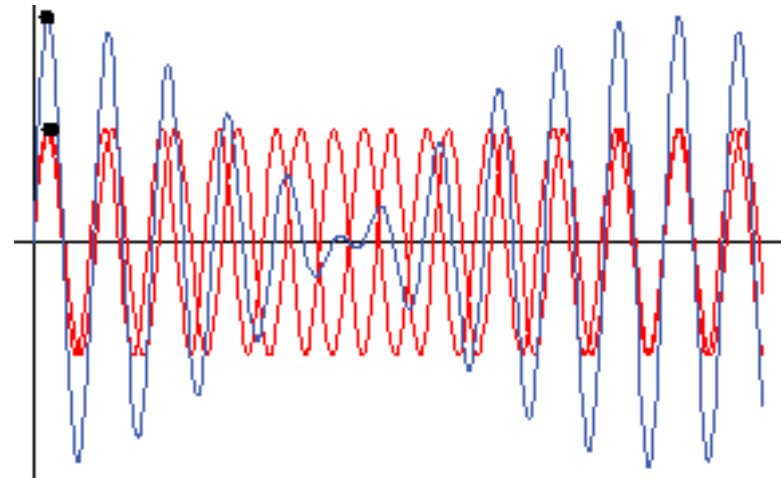
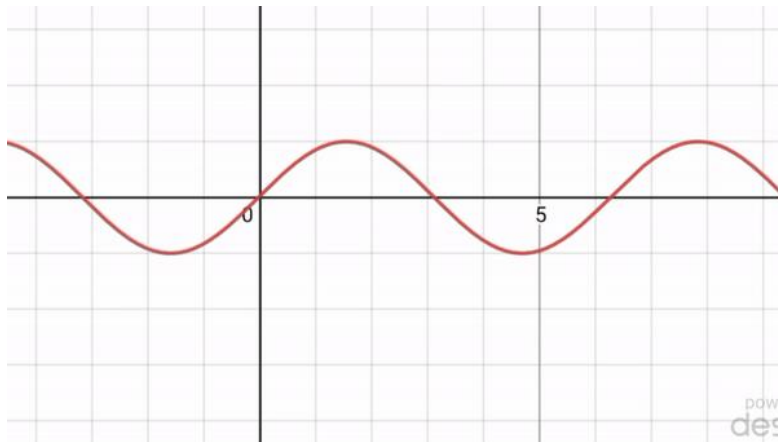
- Prędkość cząstki to prędkość grupowa paczki falowej



# Paczka falowa

- Złożenie wielu fal biegnących
- Przykład: dwie fale biegnące różniące się trochę częstotliwością

$$\Psi(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

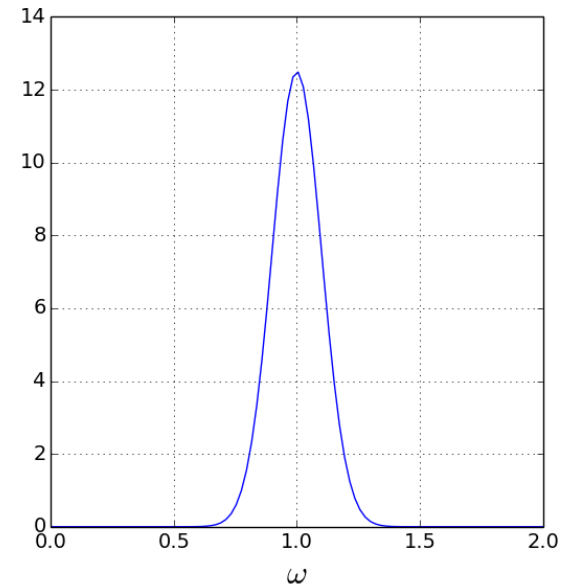
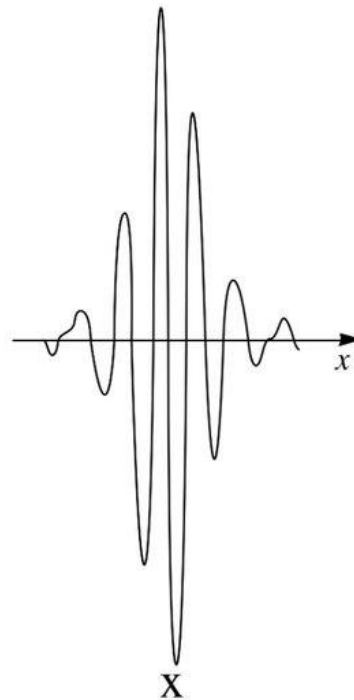
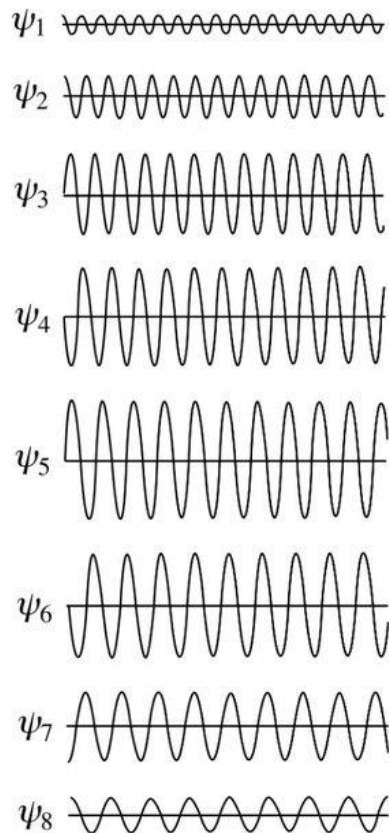


- Prędkość fal biegnących:  $v_p = \omega/k$
- jest inna niż prędkość obwiedni superpozycji (prędkość grupowa)

# Paczka falowa



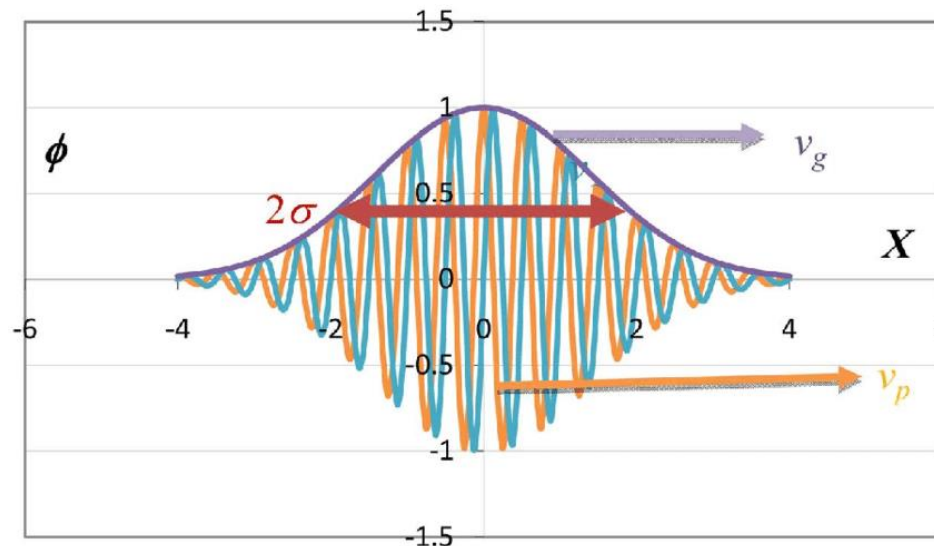
- Złożenie nieskończenie wielu fal biegnących daje zlokalizowaną paczkę falową
- Największe natężenie dla częstotliwości podstawowej





# Paczka falowa

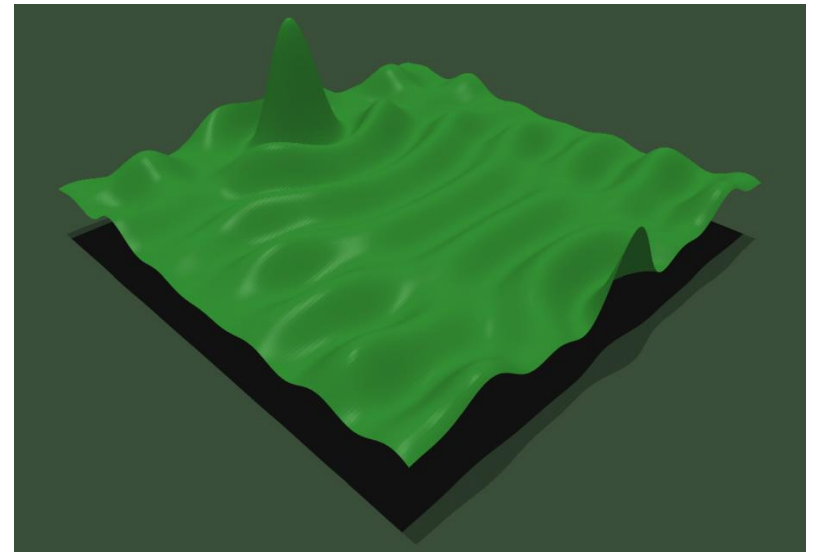
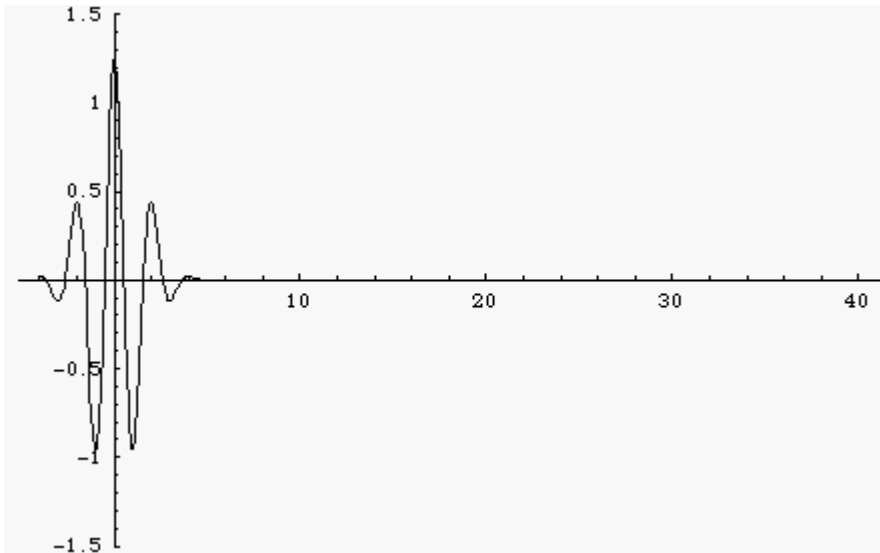
- Złożenie nieskończenie wielu fal biegnących daje zlokalizowaną paczkę falową
- Prędkość fazowa:  
prędkość fal biegnących  $v_p = \omega/k$
- Prędkość grupowa:  
prędkość obwiedni paczki falowej  
(energia, informacja)



# Dualizm korpuskularno-falowy



- Cząstka (foton, elektron itp.) to jednocześnie paczka falowa



- W przypadku fotonu jest to paczka fal E-M
- W przypadku fononu jest to paczka fal akustycznych
- 1. Jakiego rodzaju paczka fal reprezentuje cząstki materii?
- 2. Jeżeli faktycznie są to fale, to materia powinna wykazywać zjawiska falowe: dyfrakcja, interferencja...

# Długość fali Luisa de Broglie'a



- Sensowne długości fali materii tylko dla cząstek, a nie makroskopowych obiektów:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$h = 6.626 \dots 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

- Energia elektronu rozpędzanego w polu elektrycznym:

$$E_k = eU = \frac{p^2}{2m}$$

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

- Pęd tego elektronu i długość fali:

$$p = \sqrt{2meU} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

- przykładowo, dla 54 V, długość fali to 0.17 nm

# Dyfrakcja promieniowania na kryształach



- 1895, W Roentgen: promieniowanie X (Nobel 1901)



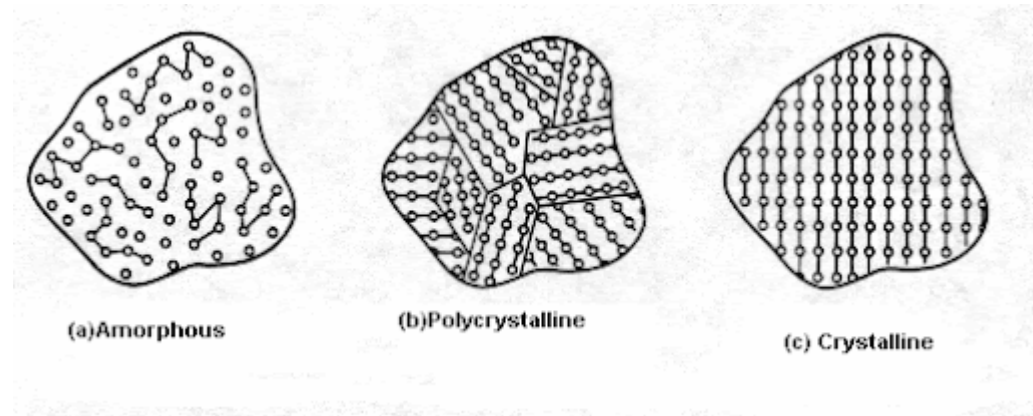
- Długość fali E-M promieni X: 10 pm do 10 nm
- Dyfraktometria roentgenowska: periodyczna sieć krystaliczna jako siatka dyfrakcyjna dla promieni X



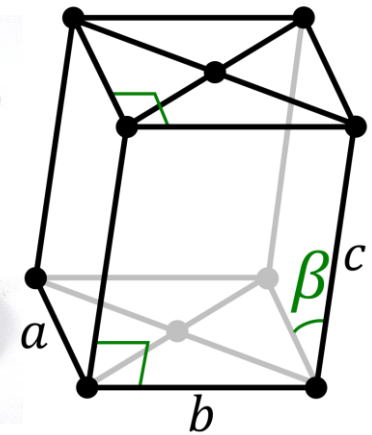
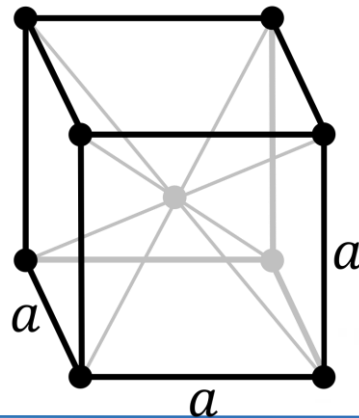
# Dyfrakcja promieniowania na kryształach



- Organizacja atomów w ciele stałym:
- amorficzne
- polikrystały
- monokrystały
- kwazikrystały



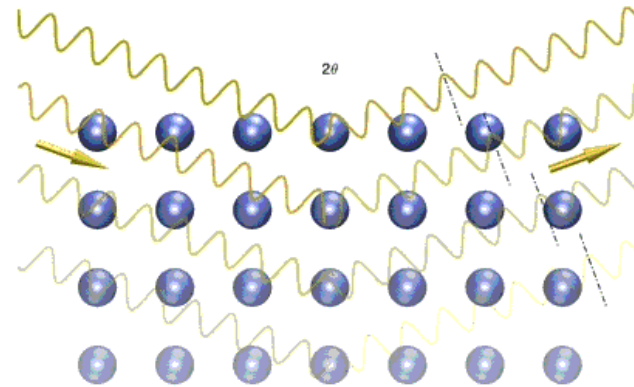
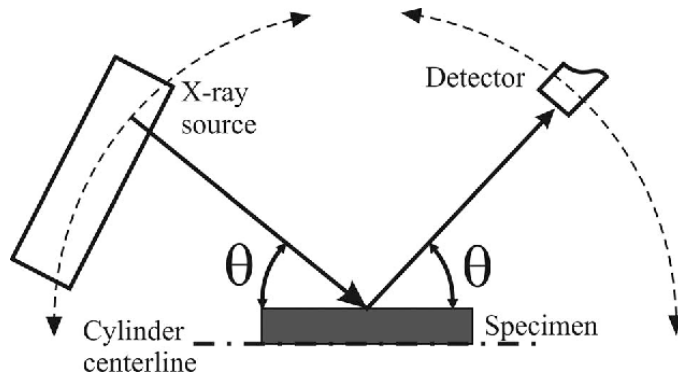
- Kryształ: uporządkowanie i symetria powtarzalnych komórek elementarnych. Własności i kształt kryształu wynikają z kształtu komórki elementarnej



# Dyfrakcja promieniowania na kryształach



- Interferencja promieniowania X na płaszczyznach krystalicznych

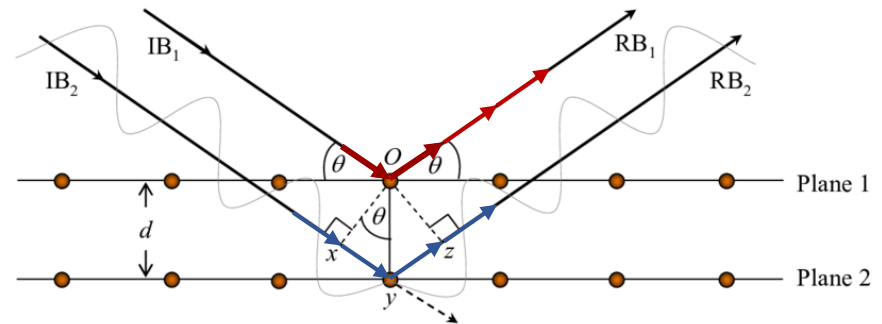


$$xy + yz = n\lambda$$

- Równanie Bragga:

$$2d\sin\theta = m\lambda$$

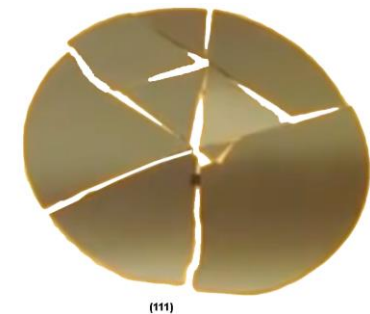
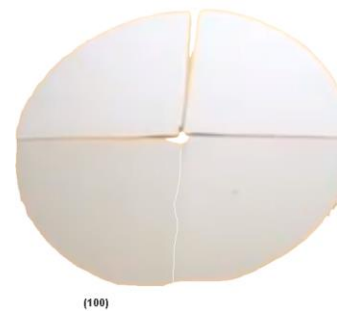
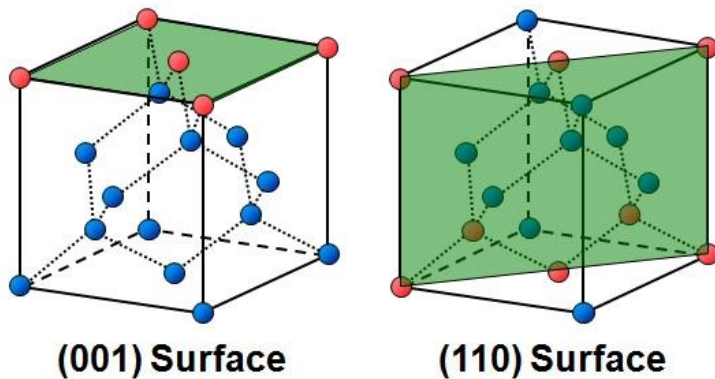
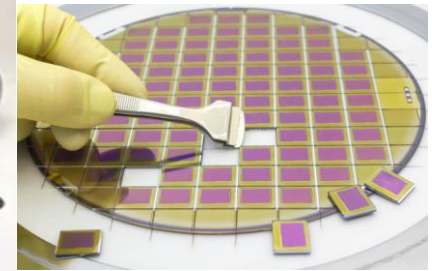
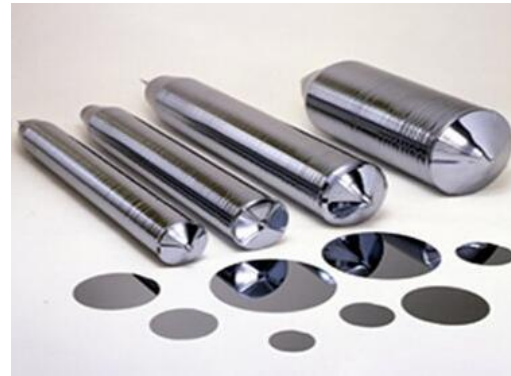
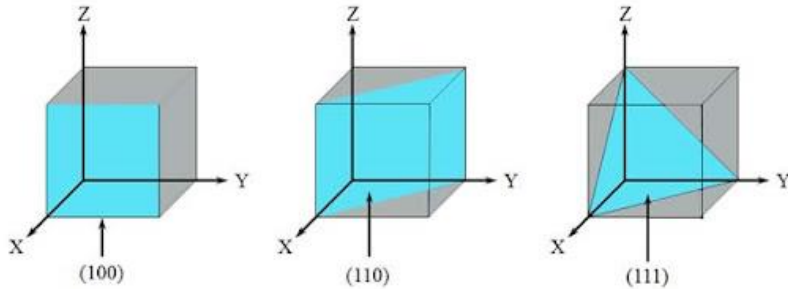
$$m = 1, 2, \dots$$



# Dyfrakcja promieniowania na kryształach



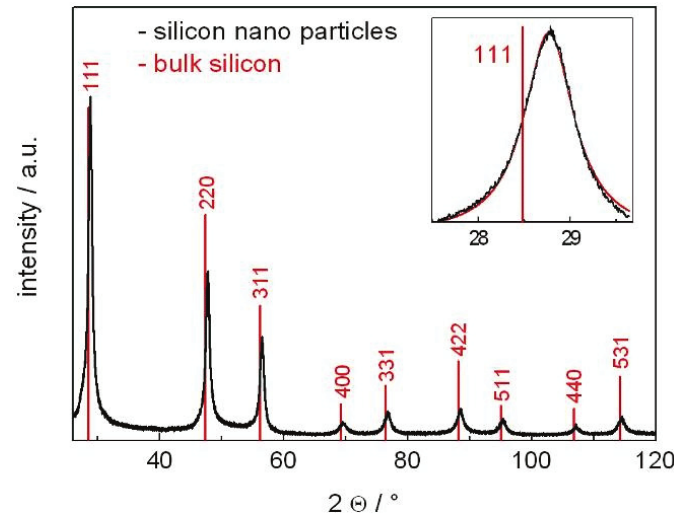
- Zadanie 1: krzem ma strukturę krystaliczną regularną ściennie centrowaną, bok sześcianu wynosi 0.543 nm. Jakie są odległości między płaszczyznami 100, 110 i 111 ?



# Dyfrakcja promieniowania na kryształach



- Zadanie2: poniżej pokazano dyfrakcję rentgenowską na monokryształe krzemu oraz na nanocząsteczkach krzemu.
1. Używając odległości międzypłaszczyznowych z zadania 1, obliczyć długość promieniowania X w tym eksperymencie.
  2. Dlaczego monokryształ krzemu ma ostre linie, a nanocząsteczki krzemu rozmyte?
  3. Ile wynosi stała sieciowa dla nanocząsteczek?

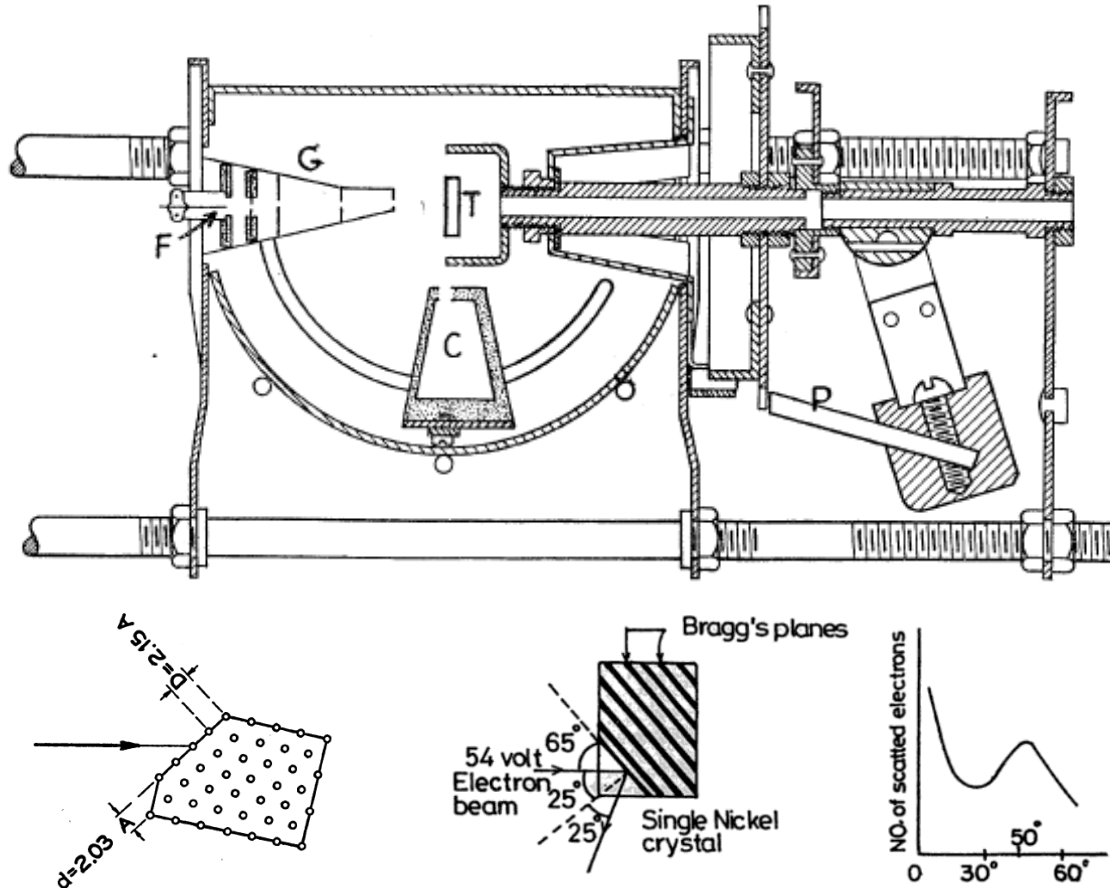


T. Husler et al., "Gas-Phase Synthesis of Highly-Specific Nanoparticles on the Pilot-Plant Scale", World Congress on Particle Technology (WCPT6), Nurnberg 2010

# Doświadczenie Davissona-Germera



- Elektrony to fale? To powinny się zachowywać jak fale...



C. J. Davisson and L. H. Germer, "Reflection of electrons by a crystal of Nickel", Bell Telephone Laboratories, NEW YORK CITY, Communicated March 10, 1928

# Doświadczenie Davissona-Germera



- Wniosek: faktycznie strumień elektronów zachowuje się jak fala, ulega **interferencji** na płaszczyznach sieciowych kryształu.
- Zadanie: korzystając z danych z doświadczenia Davissona-Germera (kąt  $\theta=65^\circ$ ,  $U=54$  V, stała sieci  $d=0.203$  nm) porównaj długość fali wynikającą z warunku Bragga z długością fali de'Broglie'a.
- Czy długości te zgadzają się?
- Jeżeli nie, to dlaczego?

(podpowieź w publikacji)

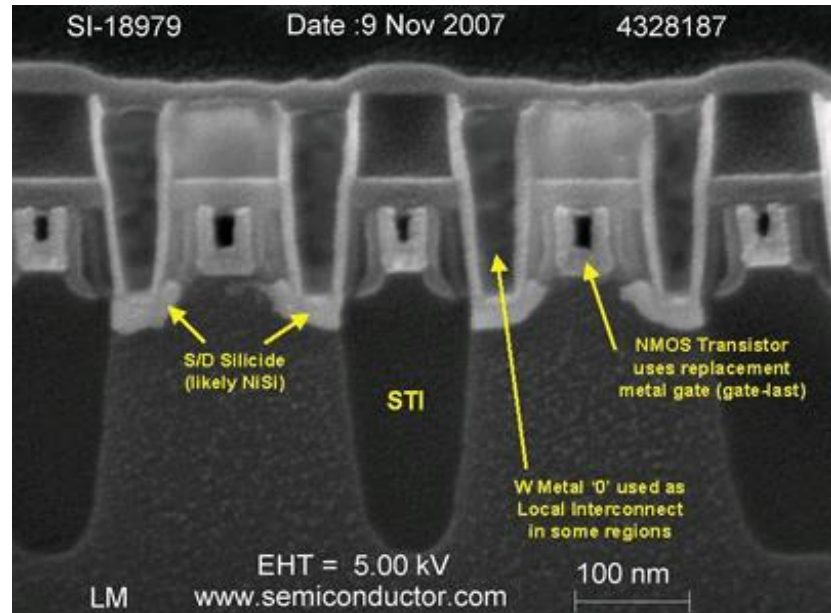
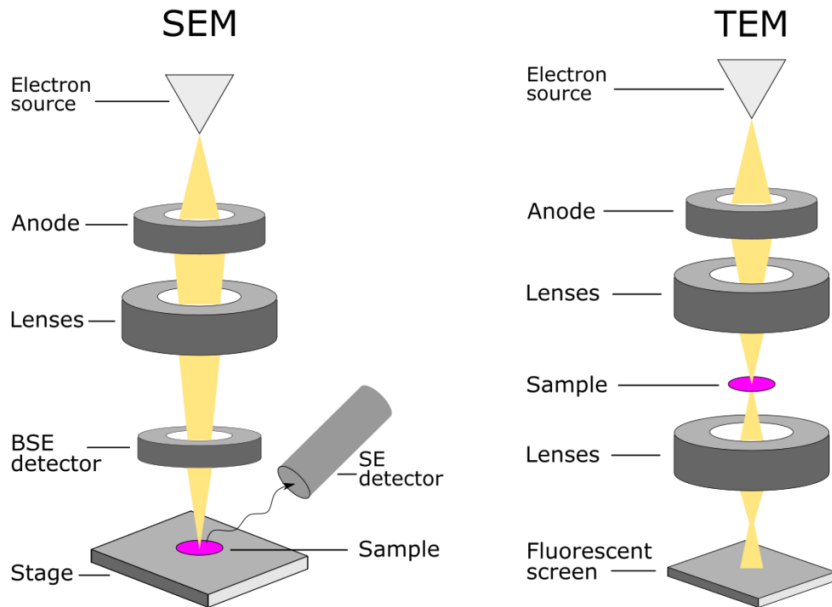
C. J. Davisson and L. H. Germer, "Reflection and refraction of Electrons by a crystal of Nickel", Bell Telephone Laboratories, NEW YORK CITY, Communicated April 23, 1928



# Mikroskop elektronowy



- Długość fali elektronu maleje z pierwiastkiem z napięcia przyspieszającego – brak problemów z dyfrakcją na małych elementach, w odróżnieniu od światła.



- Zadanie: jaka jest długość fali elektronu przyspieszonego napięciem 5 kV?

# Zasada nieoznaczoności



- Jeżeli długość fali elektronu maleje z pierwiastkiem z napięcia przyspieszającego – czy można, dysponując mikroskopem elektronowym o bardzo wysokim napięciu, obserwować bardzo małe struktury?



Say my name...



# Zasada nieoznaczoności Heisenberga



- Nie można, z dowolną dokładnością, określić jednocześnie położenia i pędu cząstki

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Alternatywnie: nie można, z dowolną dokładnością, określić jednocześnie czasu życia i energii cząstki

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\text{foton: } p = \frac{E}{c}$$

# Zasada nieoznaczoności Heisenberga



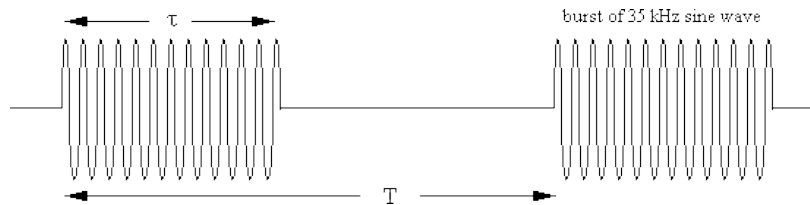
- Efekt obserwatora: pomiar zaburza prędkość/położenie
- Jak zobaczyć cząstkę, np. elektron? Trzeba go oświetlić...
- Aby zobaczyć dokładnie gdzie ten elektron jest, potrzebna mała długość fali – ale to oznacza dużą energię „światła”
- Im krótsza długość fali, tym mniejsze  $\Delta x$ , ale nie wiadomo, jaką prędkość będzie miał elektron po zderzeniu z fotonem.
- Im dłuższa długość fali, tym mniejsze zaburzenie  $\Delta p$  pędu elektronu, ale nie wiadomo, gdzie on jest.

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

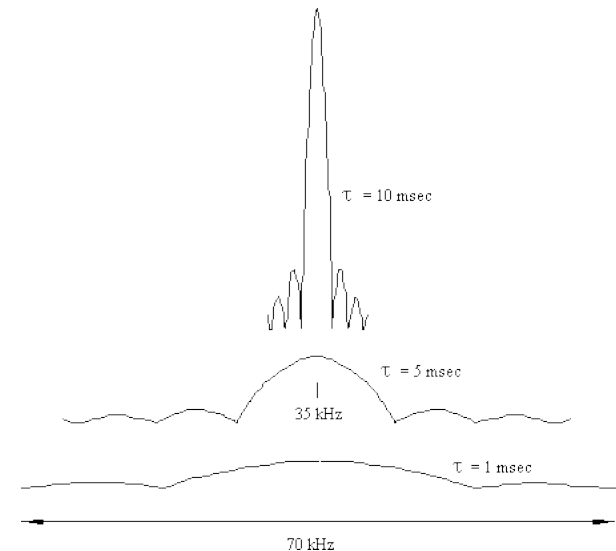
# Zasada nieoznaczoności



- Interpretacja sygnałowa: albo krótki czas, albo wąskie pasmo
- Energia zależy od częstotliwości:  $E = hf$
- Krótki impuls: małe  $\Delta t$ , ale duże pasmo  $\Delta f$  czyli też  $\Delta E$
- Długi impuls: długi czas  $\Delta t$ , ale wąskie pasmo częstotliwości/energii



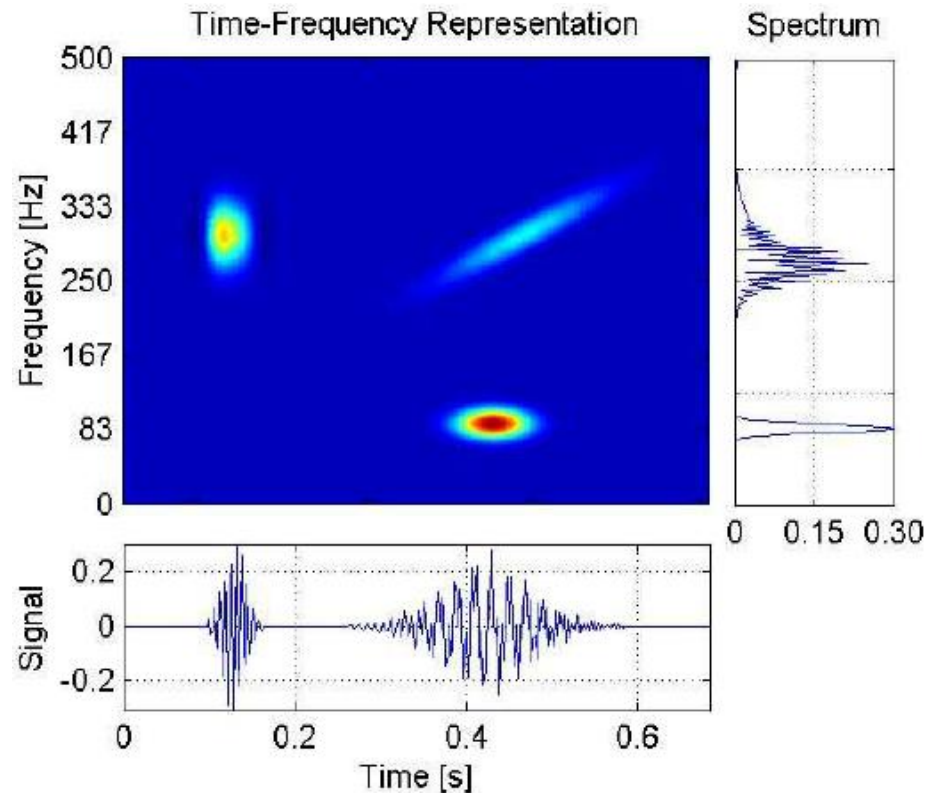
$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$



# Analiza czasowo-częstotliwościowa



- Analizator widma pokazuje amplitudę składowych częstotliwościowych sygnału.
- Krótki sygnał: szeroki zakres częstotliwości, i odwrotnie.



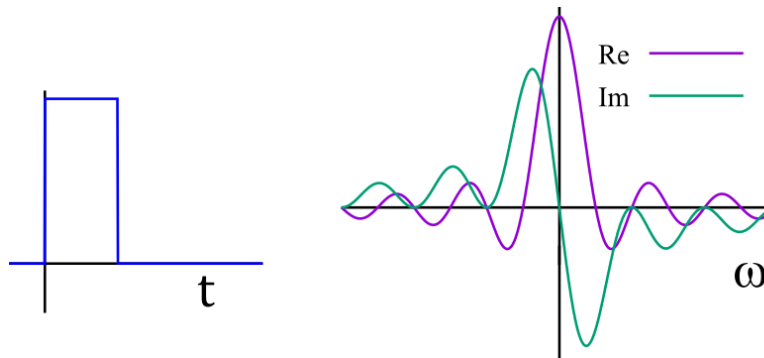


# Transformacja Fouriera

- Transformacja sygnału  $y(t)$  na widmo  $Y(\omega)$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{i\omega t} dt$$

- $Y(\omega)$  jest liczbą zespoloną, określa amplitudę danej składowej częstotliwości i fazę



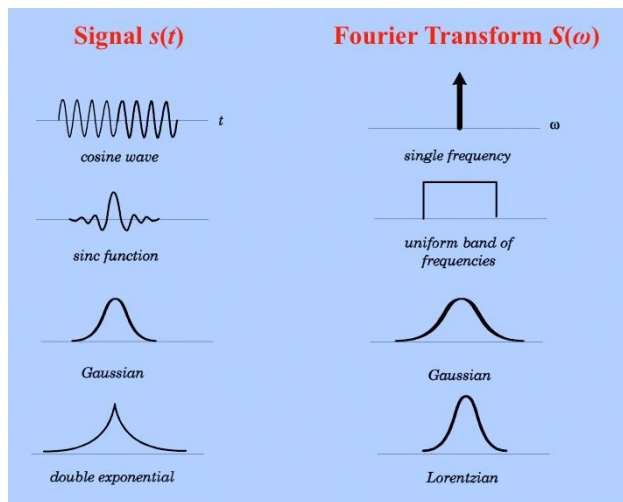
- Odwrotna transformacja Fouriera:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$



# Transformacja Fouriera

## ➤ Przykłady transformacji Fouriera:



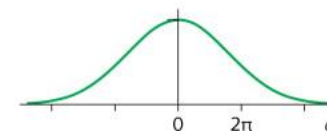
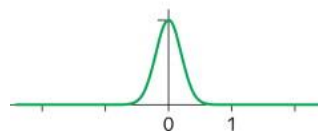
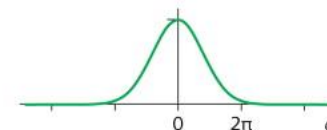
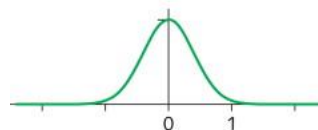
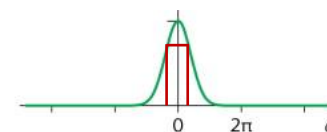
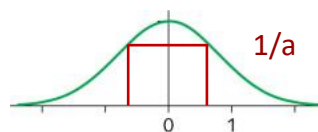
ile wynosi całka z  $\sin(\omega t) \cdot \sin(\Omega t) = \frac{1}{2} (\cos(\omega t - \Omega t) - \cos(\omega t + \Omega t))$  ?

## ➤ Sygnał w dziedzinie czasu opisany funkcją Gaussa:

$$y(t) = e^{-at^2}$$

## ➤ Transformata Fouriera z Gaussa:

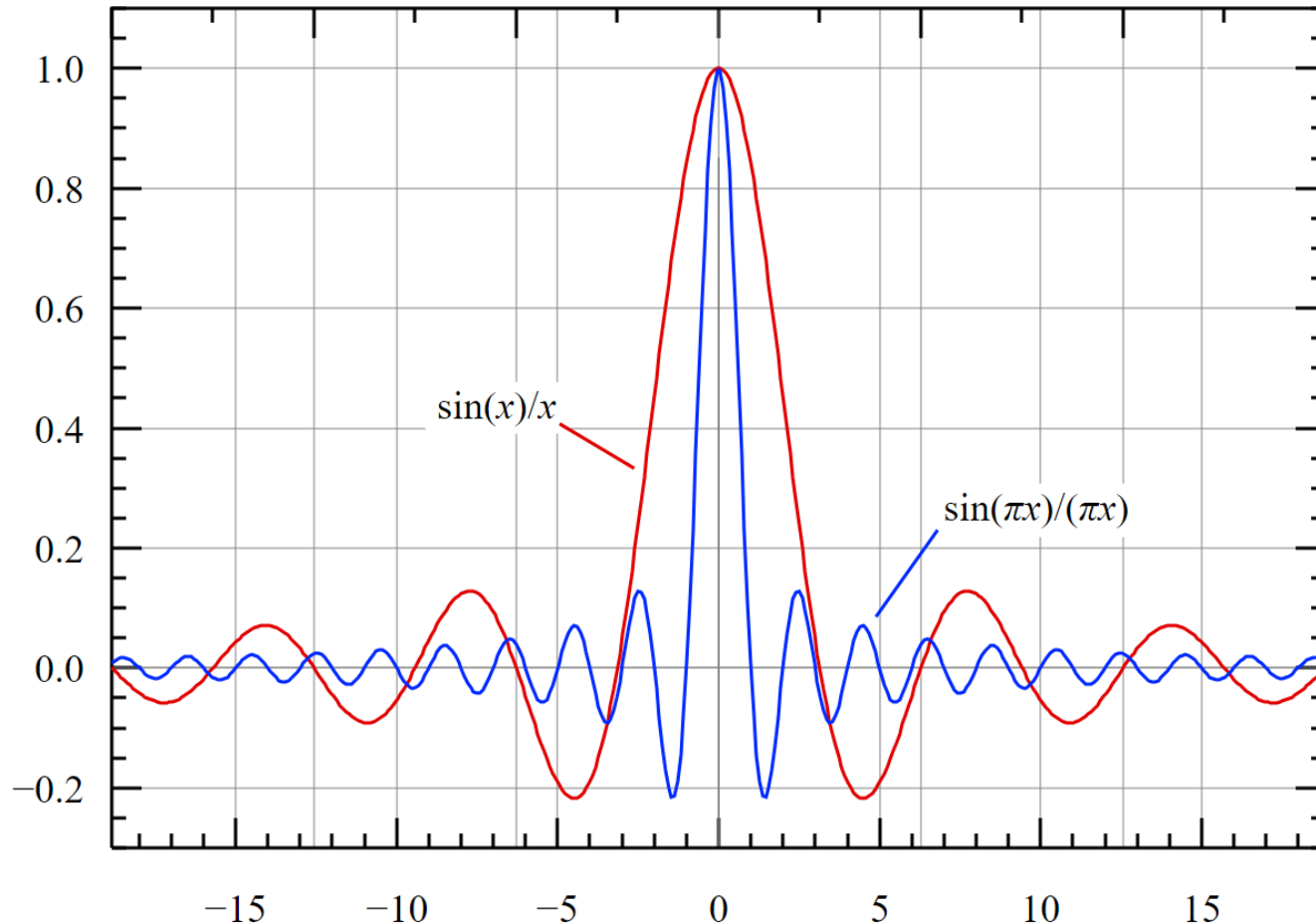
$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$





# Transformacja Fouriera

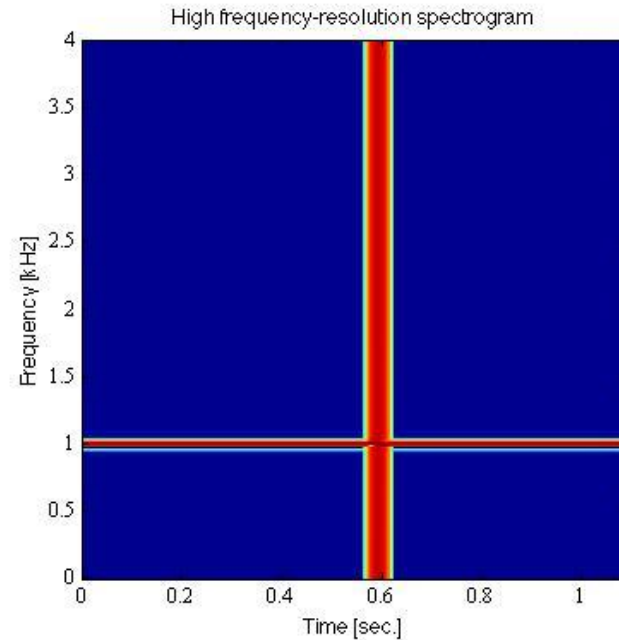
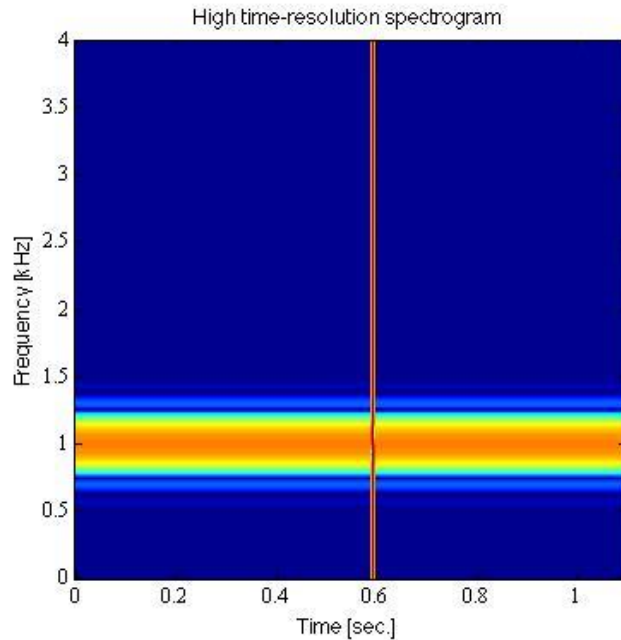
- Zadanie: policz transformację Fouriera funkcji  $\text{sinc}(at)$  i zbadaj, jak zmienia się ta funkcja i jej transformata dla różnych  $a$



# Analiza czasowo-częstotliwościowa



- Analizator widma STFT liczy transformację tylko ze skończonego okienka czasowego.
- Albo krótki czas okienka, albo precyzja pomiaru częstotliwości - zasada nieoznaczoności!
- Przykład: analiza czystego sygnału sinusoidalnego oraz impulsu





# Zasada nieoznaczoności w fizyce



- Przykład: rozmycie linii widmowych
- Energia elektronu na danej powłoce jest skwantowana. Ale czas przebywania wzbudzonego elektronu jest krótki, rzędu 1...10 ns

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} = 1 \text{ GHz}$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \Delta f = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$



# Funkcje falowe materii

- Cząstka to paczka falowa. Składowa tej paczki to fala biegnąca:

$$\Psi(x, t) = \sin(kx - \omega t)$$

- lub ogólniej, z uwzględnieniem dowolnej fazy:

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

- Wektor falowy jest proporcjonalny do pędu:  $p = \frac{h}{\lambda}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

- Częstość kołowa jest proporcjonalna do energii:  $E = hf$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}$$



# Funkcje falowe materii

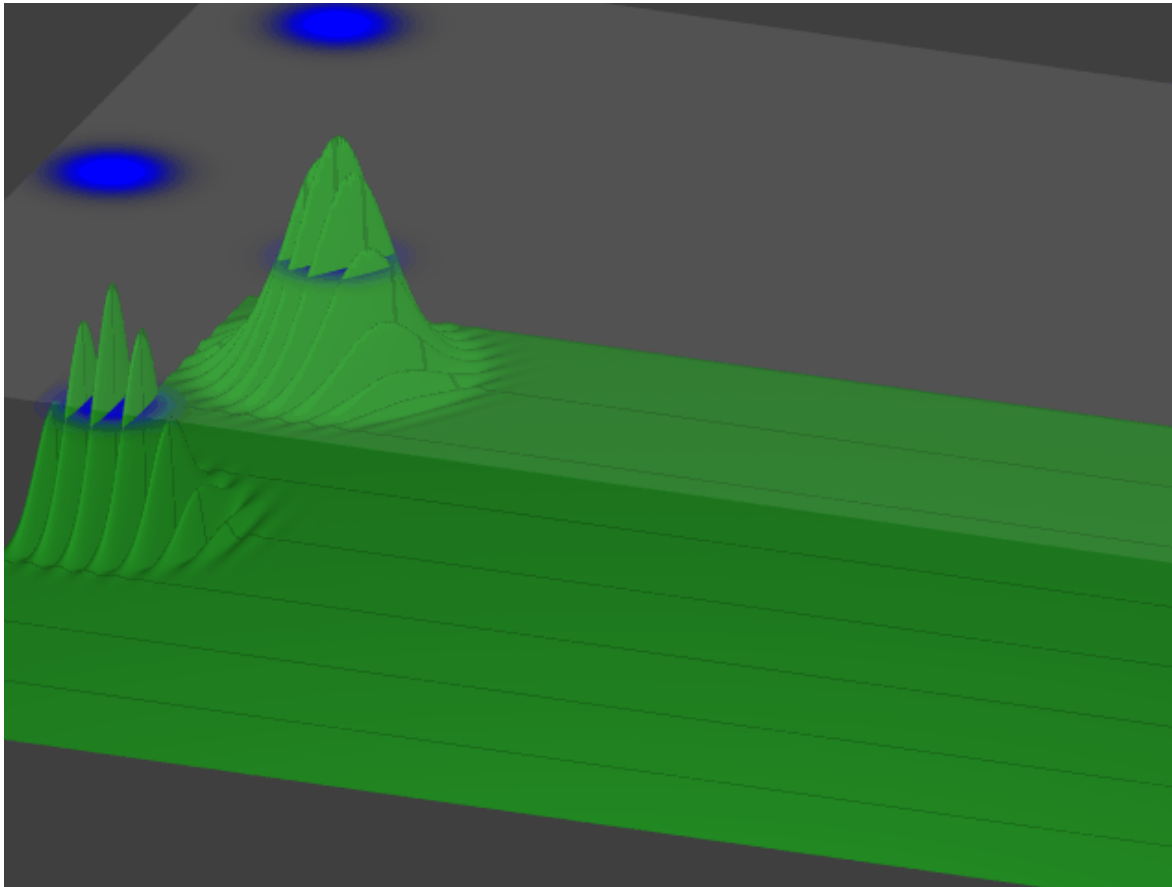
---

- Cząstka to paczka falowa. Ale czym są funkcje falowe materii?
- Funkcje falowe opisują stan kwantowy cząstki bądź układu cząstek.
- Funkcje falowe są niemierzalne, ale kwadrat modułu funkcji falowej opisuje gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu.
- Normalizacja funkcji falowej:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$
- Pozostaje jeszcze znaleźć równanie falowe dla tych fal...

# Funkcje falowe materii



- Strumień elektronów ulega dyfrakcji i interferencji. Ale czy pojedyncze elektrony mogą ze sobą interferować?



# Wystąpili:



- Louis Victor Pierre Raymond, 7th Duc de Broglie, William Lawrence Bragg, Werner Heisenberg



SOLVAY CONFERENCE 1927

colourized by pastincolour.com

A. PICARD	E. HENRIOT	P. EHRENFEST	Ed. HERSEN	Th. DE DONDER	E. SCHRÖDINGER	E. VERSCHAFFELT	W. PAULI	W. HEISENBERG	R.H FOWLER	L. BRILLOUIN
P. DEBYE	M. KNUDSEN	W.L. BRAGG	H.A. KRAMERS	P.A.M. DIRAC	A.H. COMPTON	L. de BROGLIE	M. BORN	N. BOHR		
L. LANGMUIR	M. PLANCK	Mme CURIE	H.A. LORENTZ	A. EINSTEIN	P. LANGEVIN	Ch.E. GUYE	C.T.R. WILSON	O.W. RICHARDSON		

Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL



# Podsumowanie

- Fala elektromagnetyczna to również strumień cząstek - fotonów
- Cząstki materii (elektrony, protony itp.) to paczki falowe
- Z dualizmu korpuskularno-falowego wynika zasada nieoznaczoności
- Kwadrat modułu funkcji falowej określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danym miejscu

*Do you know how fast you were going?*



*No, I don't know how fast I was going,  
But I know where I am.*

*You were going exactly 17km/hr over  
the speed limit.*



*Oh great! Now I'm completely lost!*