

1. a) Prom kursuje pomiędzy przystaniami leżącymi naprzeciwko siebie po obu stronach rzeki o szerokości 40 m, która płynie z prędkością 3 m/s. Ile trwa przeprawa przez rzekę jeżeli na stojącej wodzie prędkość promu wynosi 5 m/s ?
b) Łódź napędzana silnikiem porusza się na stojącej wodzie z prędkością 4 m/s. Jaka jest prędkość łodzi gdy przepływa ona przez rzekę, której prąd ma prędkość 3 m/s, sterując cały czas prostopadłe do kierunku prądu? Jaka może być maksymalna prędkość łodzi płynącej po tej rzece ?
2. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} są wersorami osi tego układu. Znaleźć:
 - a) długość każdego wektora,
 - b) iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
 - c) kąt zawarty między nimi,
 - d) sumę i różnicę wektorów: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
3. Dane są wektory $\mathbf{A} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{B} = [-2, -1, 3]$. Obliczyć ich sumę $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, różnicę $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, iloczyny skalarne $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i $d = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ oraz wektorowe $\mathbf{W} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ i $\mathbf{V} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
4. Dane są wektory $\mathbf{A} = (3, y, z)$; $\mathbf{B} = (1, 3, -2)$ oraz $\mathbf{C} = (2, -4, 1)$.
 - a) Obliczyć y i z tak, by wektor \mathbf{A} był prostopadły do wektorów \mathbf{B} oraz \mathbf{C} .
 - b) Obliczyć jaki kąt tworzą wektory \mathbf{B} i \mathbf{C} ?
5. Wektor wodzący punktu jest określony wzorem: $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, obliczyć:
 - a) wektor prędkości w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
 - b) wektor przyspieszenia w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
 - c) kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości w chwili $t = 2$ s.
 - d) Jaki jest tor ruchu punktu? Jakim ruchem poruszają się rzuty punktu na osie układu współrzędnych OX, OY, OZ?
6. Siła $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ zaczepiona do pewnego ciała w punkcie P (4,2,1) powoduje jego obrót wokół punktu R (1, -1, 1).
 - a) Oblicz wektor ramienia działającej siły.
 - b) Oblicz jaki kąt tworzy wektor siły z ramieniem siły.
 - c) Oblicz wartość momentu siły działającej na ciało.
7. Wektor położenia ciała o masie $m = 2$ kg dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało: a) w ciągu trzech pierwszych sekund jego ruchu, b) w ciągu trzeciej sekundy jego ruchu.
8. Wykazać za pomocą odpowiednich obliczeń, że wektor: $\mathbf{r} = r \cos(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + r \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{j}$, gdzie r , ω , φ_0 są stałe, opisuje punkt poruszający się ruchem jednostajnym po okręgu.