

PRAWDOPODOBIESTWO

Aksjomaty prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem P nazywamy funkcję liczbową określoną na podzbiorach przestrzeni Ω spełniającą następujące warunki:

1. Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. $P(\Omega) = 1$

3. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są parami rozłączne, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Twierdzenia o prawdopodobieństwie

1. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0, tzn.,

$$P(\emptyset) = 0$$

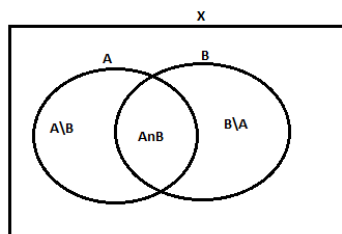
2. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A jest równe różnicy jedności i prawdopodobieństwa zdarzenia A , tzn. dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

3. Prawdopodobieństwo jest funkcją niemalejącą, tzn. dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$,

4. Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami losowymi, przy czym $P(A) > 0$.

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B pod warunkiem zajścia zdarzenia A jest równe

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Jeżeli dodatkowo prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia B jest dodatnie, to

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli $B_1, B_2, \dots, B_n$ takie, że

$P(B_i) > 0$ dla $i = 1, \dots, n$

tworzą podział przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω , to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Reguła Bayesa

Jeżeli $B_1, B_2, \dots, B_n$ tworzą podział przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω , to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o niezerowym prawdopodobieństwie:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Również:

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B).$$