

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Wartością estymatora punktowego jest jedna liczba, zależna od badanej próby. Znając wartość estymatora punktowego, nie mamy informacji o tym jaki błąd popełniamy przybliżając za jego pomocą prawdziwą wartość szacowanego parametru.

Zamiast obliczać pojedynczą wartość, można, na podstawie znajomości wartości estymatora i jego rozkładu, skonstruować przedział, w którym z dużym, zadany wcześniej, prawdopodobieństwem znajduje się nieznana wartość szacowanego parametru rozkładu.

Jest to tzw. przedział ufności.

Niech cecha X ma w populacji generalnej rozkład z nieznanym parametrem θ . Załóżmy, że na podstawie próby losowej $(X_1, \dots, X_n)$ pochodzącej z tej populacji możemy wyznaczyć dwie funkcje $\underline{\theta}$ i $\bar{\theta}$ takie, że dla każdego $(X_1, \dots, X_n)$ jest $\underline{\theta} < \bar{\theta}$ i dla, z góry przyjętego, prawdopodobieństwa $1 - \alpha$ zachodzi:

$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha$$

Przedział ufności dla wartości oczekiwanej w populacji normalnej ze znanym odchyleniem standardowym

Niech zmienna X ma w populacji rozkład $N(\mathbf{m}, \sigma)$, gdzie wartość oczekiwana $\mathbf{m}$ jest nieznana, natomiast znane jest odchylenie standardowe σ . Opierając się na próbie losowej $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ pobranej z populacji szukamy przedziału ufności dla $\mathbf{m}$ przyjmując współczynnik ufności $1 - \alpha$.

Estymatorem parametru $\mathbf{m}$ uzyskanym metodą największej wiarygodności jest średnia arytmetyczna $\bar{X}$ mająca rozkład $N(\mathbf{m}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Wówczas znormalizowana zmienna losowa $U = \frac{\bar{X} - \mathbf{m}}{\sigma} \sqrt{n}$ ma rozkład $N(0, 1)$.

Niech u_α będzie taką wartością by $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$

Wówczas otrzymujemy:

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Podstawiając w miejsce U wyrażenie $\frac{\bar{X} - \mathbf{m}}{\sigma} \sqrt{n}$ otrzymujemy równość:

$$P\left(-u_\alpha < \frac{\bar{X} - \mathbf{m}}{\sigma} \sqrt{n} < u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Po przekształceniu uzyskujemy:

$$P\left(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mathbf{m} < \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Oznacza to, że z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ nieznana wartość oczekiwana $\mathbf{m}$ znajduje się w przedziale

$$\left(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

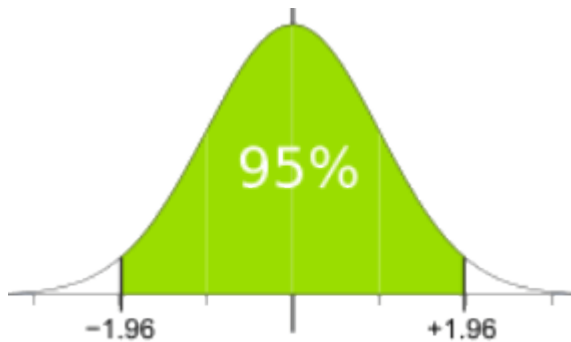
A dokładniej, z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ wyznaczony przedział ufności zawiera w sobie szacowaną wartość oczekiwaną.

Środkiem przedziału ufności jest średnia arytmetyczna, a jego szerokość równa

$$2u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

zależy od współczynnika ufności (u_α), rozkładu zmiennej X (σ) i liczebności próby n .

Przykład: $1 - \alpha = 0.95$



Do napełnienia dwukilowych puszek farbą olejną używa się automatu dozującego. Z doświadczenia wynika, że rozkład dozowanych ilości farby jest normalny z odchyleniem standardowym σ wynoszącym 1,1 dag. Po ustawieniu automatu dokonano 9 losowych pomiarów wagi zawartości puszek i otrzymano wyniki (w dag)

200,8; 199,0; 198,6; 197,8 200,2; 199,8; 200,5; 197,5: 198,8

Opierając się na powyższych danych wyznaczmy przedział ufności dla nieznanej średniej wagi farby dozowanej przez automat, przyjmując $1 - \alpha = 0,95$.

Na podstawie próby obliczmy średnią $\bar{x} = \frac{1}{9}(200,8 + 199,0 + \dots + 198,8) \cong 199,2$

Dla $\alpha = 0,05$ odczytujemy z tablic standardowego rozkładu normalnego $u_{0,05} = 1,96$. Podstawiając te liczby do wzoru na przedział ufności otrzymujemy

$$199,2 - 1,96 \frac{1,1}{\sqrt{9}} < m < 199,2 + 1,96 \frac{1,1}{\sqrt{9}}$$

czyli

$$P(198,5 < m < 199,9) = 1 - \alpha$$

Nieznana średnia waga m z prawdopodobieństwem 95% leży gdzieś w przedziale (198,5; 199,9).

Przedział ufności dla wartości oczekiwanej w populacji normalnej z nieznanym odchyleniem standardowym

Niech zmienna X ma w populacji rozkład $N(\mathbf{m}, \sigma)$, gdzie zarówno wartość oczekiwana m jak i odchylenie standardowe σ są nieznane.

Należy skorzystać ze statystyki $t = \frac{\bar{X}-m}{s}\sqrt{n}$, która ma rozkład t-Studenta o $n - 1$ stopniach swobody, szukamy przedziału dla którego:

$$P(-t_{\alpha, n-1} < t < t_{\alpha, n-1}) = 1 - \alpha$$

Po podstawieniu statystyki t i przekształceniu otrzymujemy

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

gdzie S jest nieobciążonym estymatorem odchylenia standardowego obliczonym na podstawie próby, m jest wartością oczekiwaną która z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ zawiera się w powyższym przedziale ufności.

Przykład

Na 16 poletkach doświadczalnych zasadzono nową odmianę ziemniaków w celu oceny jej wydajności. W rezultacie otrzymano następujące charakterystyki plonów z ha z tej próby:

$$\bar{X} = 264 \text{ q}, s = 15 \text{ q}.$$

Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczmy przedział ufności dla nieznanego średniego plonu z ha nowej odmiany ziemniaków, przyjmując współczynnik ufności 0,90.

Doświadczenie wskazuje na to, że rozkład plonów z ha w naturalnych warunkach jest w przybliżeniu normalny. Ponieważ w interesującym nas rozkładzie odchylenie standardowe jest **nieznane**, przedział ufności dla średniej całej populacji wyznaczmy na podstawie wzoru

$$\bar{X} - u_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + u_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Statystyka t-Studenta ma w tym przypadku liczbę stopni swobody $\nu = 16 - 1 = 15$. Współczynnik ufności $1 - \alpha = 0,90$, czyli $\alpha = 0,10$. Z tablic rozkładu t-Studenta odczytujemy wartość $t = 1,75$. Podstawiając tę wartość i charakterystyki, obliczone na podstawie próby, do podanego wyżej wzoru, otrzymujemy przedział ufności:

$$264 - 1,753 \frac{15}{\sqrt{16}} < m < 264 + 1,753 \frac{15}{\sqrt{16}}$$

Czyli nieznana wartość oczekiwana z prawdopodobieństwem 90 % zawarta jest w tym przedziale:

$$P(257,43 < m < 270,57) = 0,90$$

Gdyby odchylenie standardowe było normalne, to konstrukcja przedziału ufności odbywała by się na podstawie rozkładu normalnego, a nie rozkładu t-Studenta, i wtedy przedział ufności wynosiłby

$$264 - 1,29 \frac{15}{\sqrt{16}} < m < 264 + 1,29 \frac{15}{\sqrt{16}} \text{ czyli } 259,16 < m < 268,83$$

czyli, jak widać, byłby węższy.

TESTY ISTOTNOŚCI

Hipoteza statystyczna:

Wnioskowanie statystyczne na temat parametrów danego rozkładu, np. jego wartości oczekiwanej lub wariancji, nazywamy **parametrycznym testem istotności**.

Stawiamy hipotezę H_0 , zakładającą że parametr rozkładu jest równy jakiejś założonej liczbie,

oraz hipotezę alternatywną H_1 , która zaprzecza hipotezie H_0 .

Test istotności polega na przyjęciu hipotezy H_1 (czyli **odrzucaeniu** hipotezy H_0), jeśli statystyka wynikającego z obliczonego z próby parametru znajduje się **powyżej** przedziału krytycznego. W przeciwnym wypadku stwierdza się brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu polegającego na odrzuceniu hipotezy H_0 , podczas gdy była ona prawdziwa, wynosi α i nazywa się **poziomem istotności**.

W praktyce często używa się testu istotności do wnioskowania o istotnej statystycznie równości średniej i założonej jej wartości (test istotności jednej średniej) lub do porównywania dwóch średnich.

Test istotności dla jednej średniej

1. Nieznana średnia, ale znane odchylenie standardowe.

Niech zmienna X ma w populacji rozkład $N(\mathbf{m}, \sigma)$, gdzie nie jest znana wartość oczekiwana m , ale znane jest odchylenie standardowe σ .

Na podstawie n -elementowej próby chcemy wnioskować, że $m = m_0$, gdzie m_0 to jakaś, arbitralnie założona liczba. Jest to hipoteza H_0 .

Alternatywna hipoteza H_1 oznacza, że m jest różny od m_0 , czyli albo istotnie mniejszy, albo większy niż m_0 .

Należy obliczyć estymator $\bar{X}$ z próbki, a następnie obliczyć statystykę:

$$u = \left| \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \right|$$

Następnie sprawdzamy w tablicach rozkładu normalnego, ile wynosi Z_α dla poziomu istotności α .

Jeśli $u < u_\alpha$ to nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

2. Nieznana średnia i nie znane odchylenie standardowe.

Niech zmienna X ma w populacji rozkład $N(\mathbf{m}, \sigma)$, gdzie zarówno wartość oczekiwana m jak i odchylenie standardowe σ są nieznane.

Na podstawie n -elementowej próby chcemy wnioskować, że $m = m_0$.

Należy obliczyć estymatory $\bar{X}$ oraz s z próbki, a następnie obliczyć statystykę, w tym przypadku używając rozkładu t-Studenta:

$$t = \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right|$$

Po znalezieniu wartości $t_{\alpha, n-1}$ w tablicach rozkładu t-Studenta porównujemy, jeśli $t < t_{\alpha, n-1}$ to nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .

Przykład 1.

Na paczce zapalek napisane jest „ok. 38 sztuk” – jest to przeciętna ilość, ponieważ zapalki są pakowane maszynowo, nikt ich nie liczy. Czy rzeczywiście średnia wartość jest równa 38?

Sprawdzono losowo wybrane 20 pudełek, średnia wynosiła 36.25 sztuk, odchylenie standardowe z próby 1.32.

Czy producent oszukuje, ustawiając maszynę aby pakowała trochę mniej? A może maszyna jest zepsuta?

Zalóżmy hipotezę zerową – producent jest uczciwy, maszyna sprawna, a ta średnia 36.25 sztuk to przypadek. Sprawdźmy to na poziomie istotności 0.05.

Obliczamy statystykę t-Studenta:

$$t = \left| \frac{36.25 - 38}{1.32} \sqrt{20} \right| = 5.929$$

Wartość krytyczna wynosi

$$t_{19,0.05} = 2.093$$

Na tej podstawie możemy odrzucić hipotezę zerową. Deklarowana średnia ilość 38 sztuk nie jest zgodna z prawdą. Po spojrzeniu w tablice rozkładu t-Studenta widać, że wniosek nadal jest słuszny dla $\alpha = 0.01$, a nawet $\alpha = 0.001$. Z prawdopodobieństwem 99.999% możemy wnioskować, że z jakichś przyczyn zaniżona jest ilość zapalek w paczkach.

Przykład 2.

Fabryka produkuje kondensatory ceramiczne o pojemności znamionowej 4.7 nF, z założoną tolerancją taką, że odchylenie standardowe wynosi 5% wartości nominalnej.

Zmierzono próbkę 10 kondensatorów i otrzymano średnią wartość 4.83 nF. Czy maszyna produkująca kondensatory jest rozkalibrowana, czy też to przypadkowy wynik?

Zalóżmy hipotezę zerową – maszyna jest sprawna. Sprawdźmy to na poziomie istotności 0.10.

Odchylenie standardowe jest znane i wynosi $4.7 \cdot 0.05 = 0.235$, a więc stosujemy statystykę rozkładu normalnego:

$$u = \left| \frac{4.83 - 4.7}{0.235} \sqrt{10} \right| = 1.749$$

Wartość krytyczna, z dystrybucji rozkładu normalnego, wynosi

$$u_{0.10} = x \text{ dla } 1 - 0.05 \text{ (bo dwustronnie)} = 1.65$$

Na tej podstawie możemy odrzucić hipotezę zerową.

Aczkolwiek, gdybyśmy wzięli poziom istotności $\alpha = 0.05$, to wtedy

$$u_{0.05} = x \text{ dla } 1 - 0.025 \text{ (bo dwustronnie)} = 1.96$$

nie możemy odrzucić hipotezy zerowej.

W praktyce taki przypadek jest trochę niejednoznaczny. Należy zwiększyć licznosc próby lub zrealizować nową próbę.

Test istotności dla dwóch średnich

1. Nieznane średnie, nie znane ale takie samo odchylenie standardowe.

Zrealizowano dwie próby, o licznosci n_1 i n_2 , z tej samej populacji, czy średnia z obydwu prób jest taka sama? Nie znamy odchylenia standardowego, ale wiemy że się ono nie zmienia (jest takie samo dla obydwu prób).

Obliczamy średnie m_1 i m_2 , odchylenia standardowe z prób s_1 i s_2 (te mogą się różnić, bo są na podstawie próby), i wyznaczamy test istotności:

$$t = \left| \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \right|$$

i porównujemy z wartością krytyczną na podstawie tablic rozkładu t-Studenta dla założonego poziomu istotności oraz ilości stopni swobody $n_1 + n_2 - 2$.

1. Nieznane średnie, znane odchylenia standardowe.

Zbadano dwie próby z dwóch różnych populacji, wiadomo, że odchylenie standardowe jednej populacji wynosi σ_1 , a drugiej σ_2 . Czy wartości średnie są takie same?

Test istotności odrzucenia hipotezy zerowej:

$$u = \left| \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \right)}} \right|$$

porównujemy dla u_α .