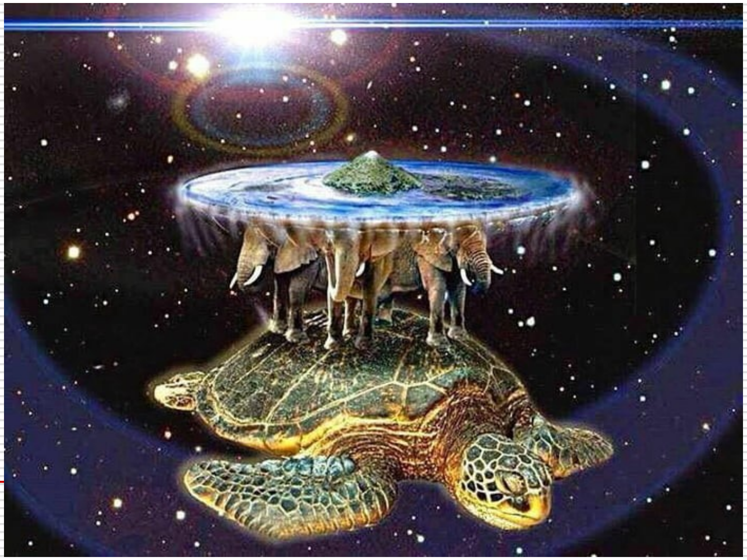
Wykład 10: Grawitacja cz.1



dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Siły centralne

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{r^3}\vec{r} \qquad F = \frac{C}{r^2}$$

- Dla oddziaływań grawitacyjnych

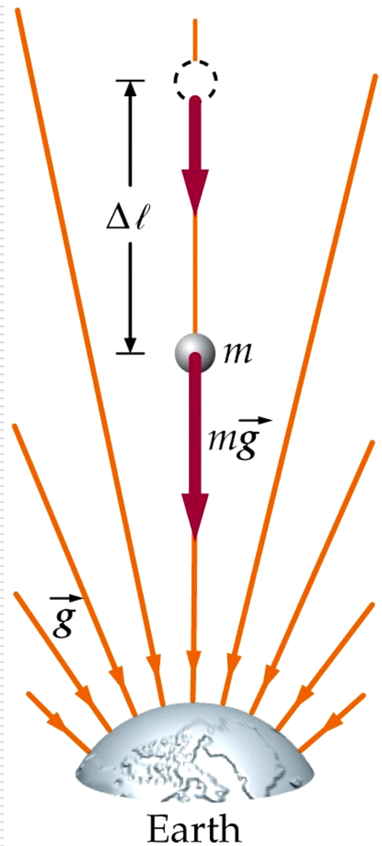
$$C = -Gm_1 m_2$$

gdzie G = 6,673 · 10^{-11} $\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$

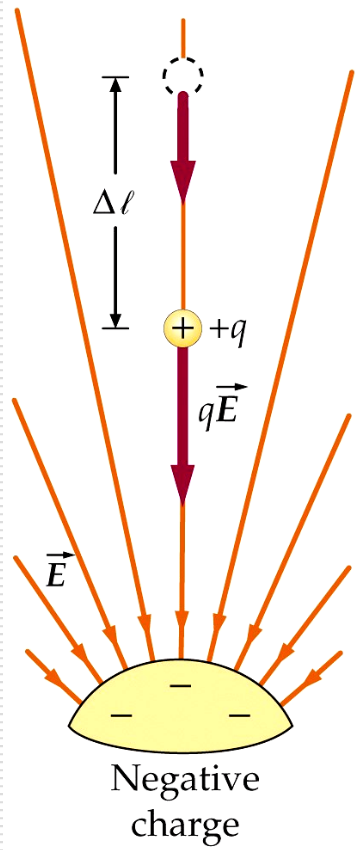
- Dla oddziaływań elektrostatycznych

$$C = k \cdot q_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}$$

gdzie k ≈ 8,99·10^9 $\left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$



pole grawitacyjne

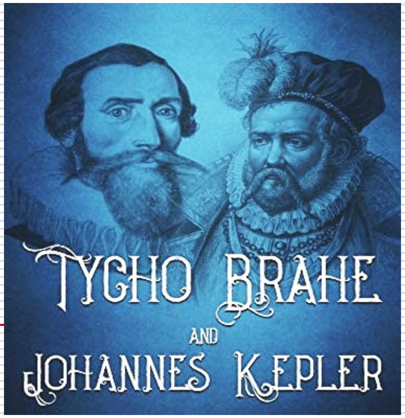


pole elektrostatyczne ładunku ujemnego

Oddziaływanie grawitacyjne jest dużo słabsze niż elektrostatyczne

Dla dwóch elektronów $\dfrac{\textit{Przyciąganie grawitacyjne}}{\textit{Odpychanie elektrostatyczne}} = \dfrac{1}{4{,}17 \cdot 10^{42}}$

Droga do prawa powszechnego ciążenia



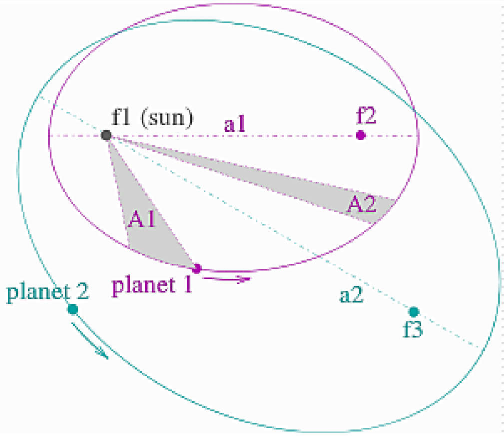
- Ruch orbitalny planet wokół Słońca – jak i dlaczego?
- Regularne, wieloletnie pomiary – Tycho Brahe (1546-1601)
- Prawa Keplera
- Badania powodów ruchu planet

  – Galileusz – zasada bezwładności.
- Newton (1642-1726): ruch ciała może

  zmienić tylko siła

  Z II i III prawa Keplera $\Rightarrow$ Słońce jest źródłem sił radialnych $\sim 1/r^2$
- Newton postulował powszechność tej siły – wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie.

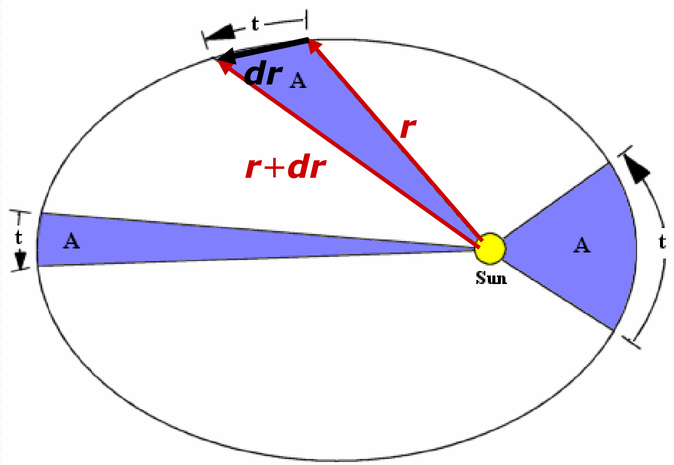
Prawa Keplera (1571-1630)



- *I. Wszystkie planety krążą po elipsach. W ognisku elipsy znajduje się Słońce.*
- *II. Pola zakreślane przez wektor wodzący (od Słońca) w jednakowych odstępach czasu są równe.*

Zakreślane pole:

$$dA = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$$



$$dA = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)dt$$

tzw. „prędkość polowa”

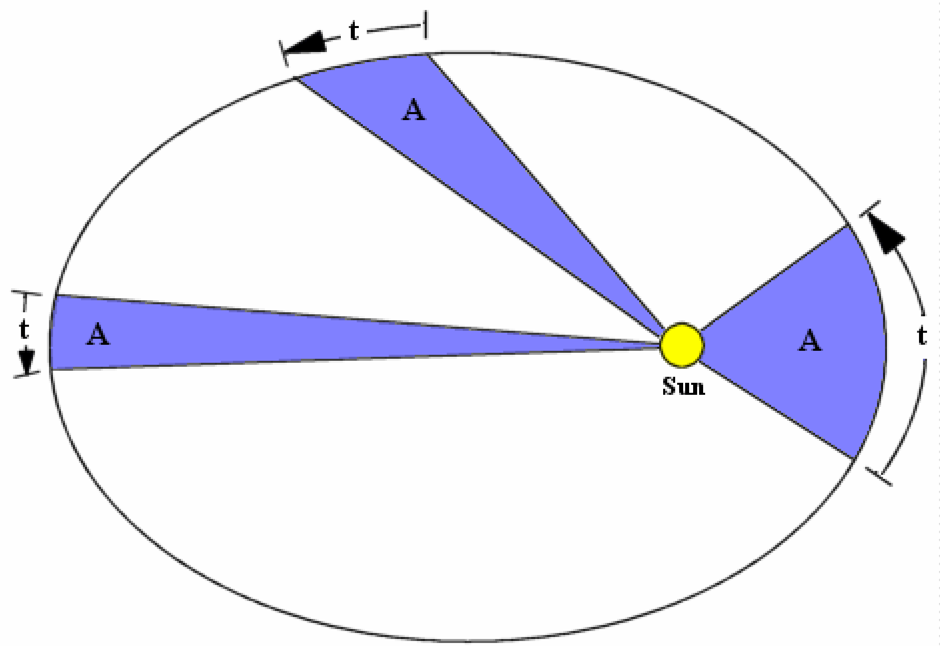
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \frac{\vec{L}}{2m}$$

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ jeżeli nie działają siły zewnętrzne:

$$\vec{L} = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = const$$

- *Prędkość polowa jest stała!*



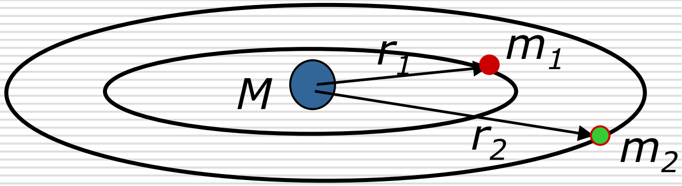
- *III Kwadraty okresów obiegów różnych planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześcianów dużych półosi elipsy.*

Powodem ruchu po orbicie jest siła dośrodkowa – jest nią siła grawitacji:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$



$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = const}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

PRZYKŁADY:

1. W pewnym układzie słonecznym satelity badawcze okrążają planety o różnej gęstości, pozbawione atmosfery- tuż nad ich powierzchniami. A) Obliczyć, jak zależy czas okrążenia przez satelitę od gęstości planety. B) Czy czas obiegu satelity zależy od promienia planety i od masy satelity?

Rozwiązanie:

Dlaczego krążą? Powód: $G\frac{M\cancel{m}}{\cancel{R^2}} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}}$ $\qquad v = \frac{2\pi R}{T}$

$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$$G\frac{\rho 4\pi R^3}{3R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}}$$

2. Okres obiegu stacji kosmicznej po kołowej orbicie o promieniu *R* wynosi *T*. Druga stacja kosmiczna o dwukrotnie większej masie porusza się po orbicie o promieniu *4R.* Oblicz jej okres obiegu planety.

Rozwiązanie:

Jakie prawo? $\frac{T_1^2}{R^3} = \frac{T_x^2}{(4R)^3}$

$$\left(\frac{T_1}{T_x}\right)^3 = \left(\frac{R}{4R}\right)^3 = \frac{1}{64} \qquad \frac{T_1}{T_x} = \frac{1}{8} \qquad \Rightarrow T_x = 8T_1$$

2. Promień orbity Ziemi wynosi $1{,}5 \cdot 10^{11}$m. Znając stałą $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$N $\cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ oblicz masę Słońca.

Rozwiązanie:

Dlaczego Ziemia krąży wokół Słońca? (patrz Przykład 1)

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \qquad T = 365 \cdot 3600 \cdot 24 = 31{,}55 \cdot 10^6 \mathrm{s} \qquad M \approx 2 \cdot 10^{30} \mathrm{kg}$$

Prędkości kosmiczne

- V_I – jej osiągnięcie pozwoli na poruszanie się po zamkniętej orbicie o promieniu R bliskim promieniowi ciała niebieskiego.

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mV_I^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad \Rightarrow V_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

- V_{II} – początkowa -aby opuścić pole grawitacyjne danego ciała niebieskiego (*prędkość ucieczki*).

$$E_{ku} + E_{pR} = E_{p\infty}$$

$$\frac{mV_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{\infty} = 0 \qquad \Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

V_{II} – przy starcie z Ziemi: V_{II} = 1,12·10⁴ m/s = 11,2 km/s

ALE:

Wykorzystując w pierwszym przypadku ruch obrotowy Ziemi (na równiku 1,7 km/s) czyli wystarczy prędkość 9,5 km/s.

- V_{III} – przy starcie z orbity Ziemi ($R_{S\text{-}Z}$), aby opuścić Układ Słoneczny:

$$\Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{S-Z}}}$$

$V_{II} = 4{,}21 \cdot 10^4$ m/s = 42,1 km/s = 150 000 km/h

ALE:

Uciekając z pola grawitacyjnego Słońca, wykorzystuje się szybkość orbitalną Ziemi – 30 km/s, więc wystarczy tylko nadać ciału prędkość 12 km/s + możliwa „asysta grawitacyjna" innych planet!

- V_{IV} – aby opuścić Drogę Mleczną: V_{IV} = *550 km/s* ale wykorzystując ruch Słońca wokół środka Galaktyki V_{IV} = *330 km/s*

Przykłady:

$M_Z=5{,}96\cdot10^{24}$kg; $R_Z=6{,}37\cdot10^{6}$m

$M_S=1{,}99\cdot10^{30}$kg; RS-$_Z=1{,}5\cdot10^{11}$m

- Oblicz prędkość orbitalną Międzynarodowej Stacji Kosmicznej orbitującej na wysokości *h* = 400 km.

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}} = 7{,}67 \cdot 10^3 m/s$$

- Jak daleko doleciałaby rakieta starując w kierunku „od Słońca" z wokółziemskiej orbity z prędkością 30 km/s ?

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R_{S-Z}} = -\frac{GMm}{r} \qquad \Rightarrow r = 3 \cdot 10^{11} m \; (= 2 * R_{S-Z})$$

czyli pomiędzy Marsem a pasem planetoid.