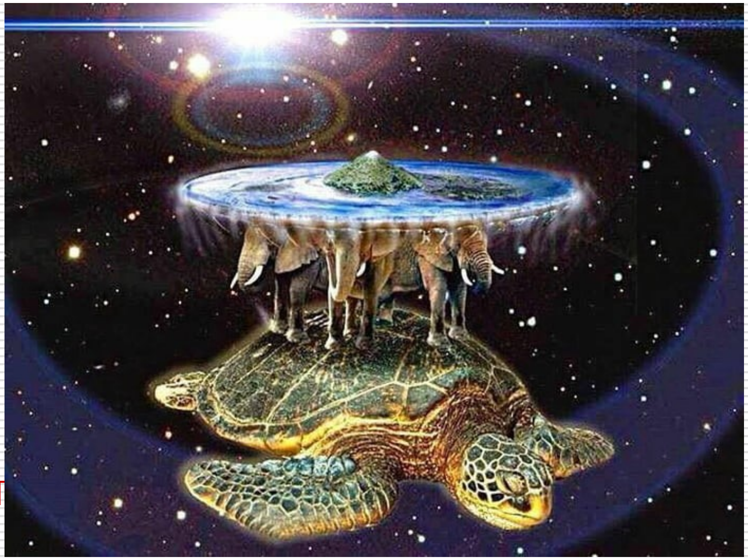
Wykład 11: Grawitacja



dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Siły centralne

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{r^3}\vec{r} \qquad F = \frac{C}{r^2}$$

- Dla oddziaływań grawitacyjnych

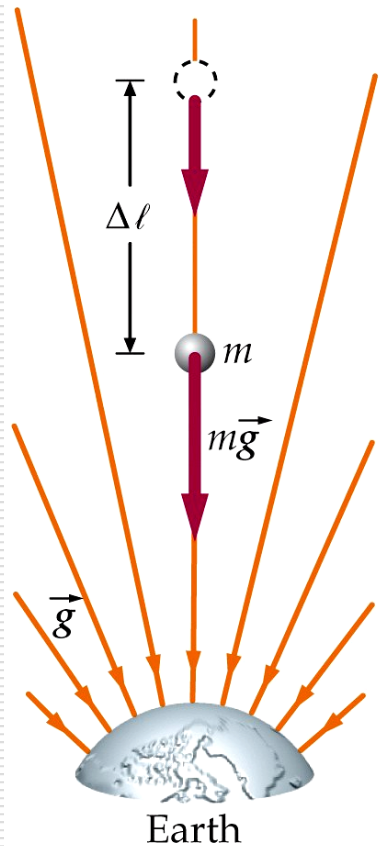
$$C = -Gm_1 m_2$$

gdzie $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$

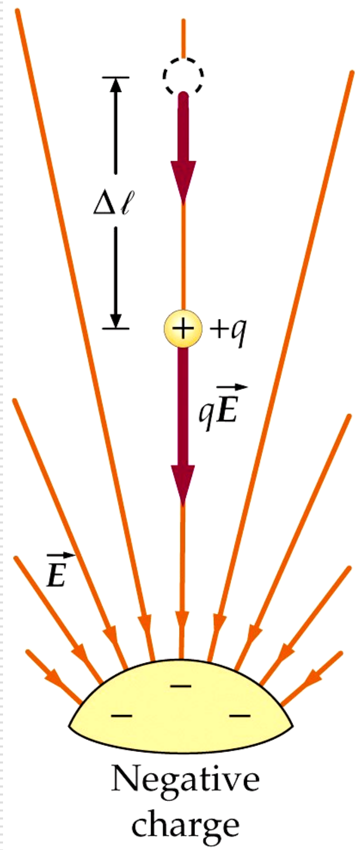
- Dla oddziaływań elektrostatycznych

$$C = k \cdot q_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}$$

gdzie $k \approx 8{,}99 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$



pole grawitacyjne

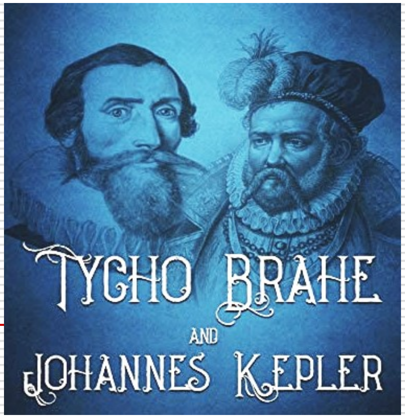


pole elektrostatyczne ładunku ujemnego

Oddziaływanie grawitacyjne jest dużo słabsze niż elektrostatyczne

Dla dwóch elektronów $$\frac{\textit{Przyciąganie grawitacyjne}}{\textit{Odpychanie elektrostatyczne}} = \frac{1}{4{,}17 \cdot 10^{42}}$$

Droga do prawa powszechnego ciążenia



- Ruch orbitalny planet wokół Słońca – jak i dlaczego?
- Regularne, wieloletnie <u>pomiary</u> – Tycho Brahe (1546-1601)
- Prawa Keplera
- Badania powodów ruchu planet

  – Galileusz – zasada bezwładności.
- Newton (1642-1726): ruch ciała może

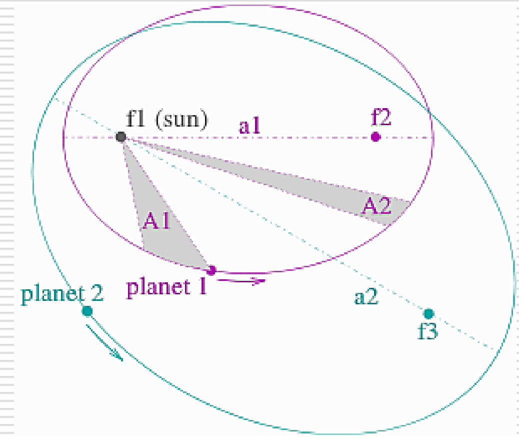
  zmienić tylko siła

  Z II i III prawa Keplera $\Rightarrow$ Słońce jest źródłem sił radialnych $\sim 1/r^2$

- Newton postulował powszechność tej siły – <u>wszystkie</u> ciała przyciągają się wzajemnie.

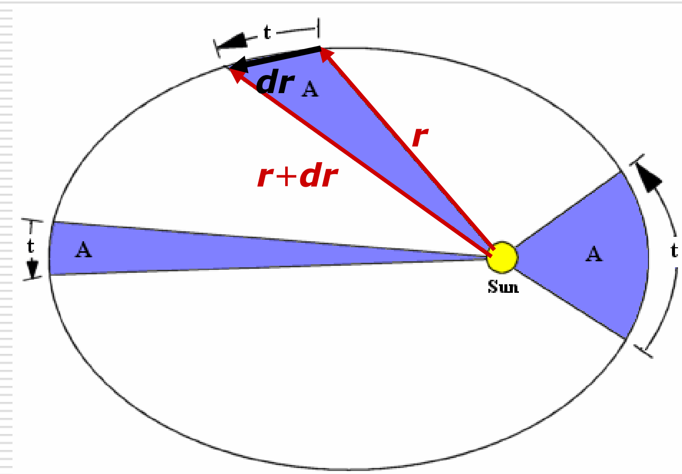
Prawa Keplera (1571-1630)

- *I. Wszystkie planety krążą po elipsach. W ognisku elipsy znajduje się Słońce.*
- *II. Pola zakreślane przez wektor wodzący (od Słońca) w jednakowych odstępach czasu są równe.*



Zakreślane pole:

$$dA = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$$



$$dA = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$$

tzw. „prędkość polowa"

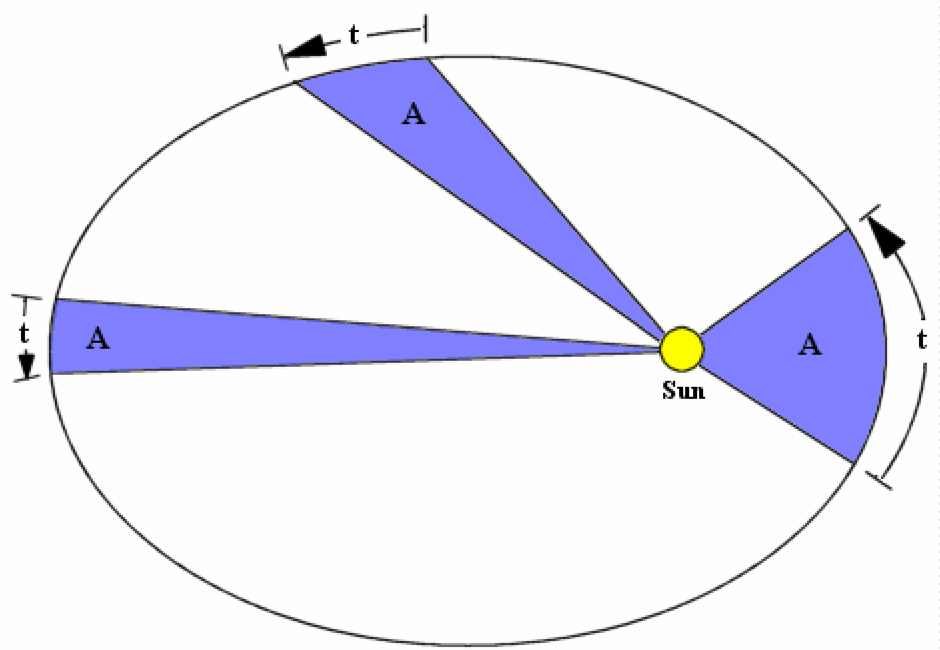
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \frac{\vec{L}}{2m}$$

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ jeżeli nie działają siły zewnętrzne:

$$\vec{L} = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = const$$

- *Prędkość polowa jest stała!*



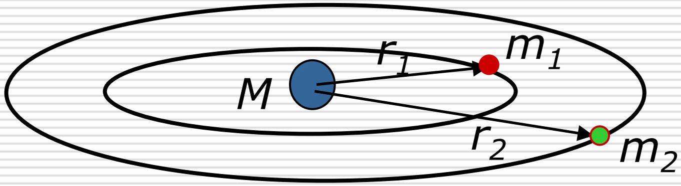
- *III Kwadraty okresów obiegów różnych planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześcianów dużych półosi elipsy.*

Powodem ruchu po orbicie jest siła dośrodkowa – jest nią siła grawitacji:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$



$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = const}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

PRZYKŁADY:

1. W pewnym układzie słonecznym satelity badawcze okrążają planety o różnej gęstości, pozbawione atmosfery- tuż nad ich powierzchniami. A) Obliczyć, jak zależy czas okrążenia przez satelitę od gęstości planety. B) Czy czas obiegu satelity zależy od promienia planety i od masy satelity?

Rozwiązanie:

Dlaczego krążą? Powód: $G\frac{M\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}}$ $\qquad v = \frac{2\pi R}{T}$

$M = \rho \cdot \mathrm{V} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$$G\frac{\rho 4\pi R^3}{3R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}}$$

2. Okres obiegu stacji kosmicznej po kołowej orbicie o promieniu *R* wynosi *T*. Druga stacja kosmiczna o dwukrotnie większej masie porusza się po orbicie o promieniu *4R.* Oblicz jej okres obiegu planety.

Odp.: $T_x = 8T_1$

3. Promień orbity Ziemi wynosi 1,5·10^{11}m. Znając stałą *G* = 6,67·10^{-11}N $\cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ oblicz masę Słońca.

Odp.: $M \approx$ 2·10^{30}kg

Prędkości kosmiczne

- V_I – jej osiągnięcie pozwoli na poruszanie się po zamkniętej orbicie o promieniu R bliskim promieniowi ciała niebieskiego.

$$F_{dość} = F_g$$

$$\frac{mV_I^2}{R} = \frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow V_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

- V_{II} – początkowa -aby opuścić pole grawitacyjne danego ciała niebieskiego (*prędkość ucieczki*).

$$E_{ku} + E_{pR} = E_{p\infty}$$

$$\frac{mV_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{\infty} = 0 \qquad \Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

V_{II} – przy starcie z Ziemi: V_{II} = 1,12·10^4 m/s = 11,2 km/s

ALE:

Wykorzystując w pierwszym przypadku ruch obrotowy Ziemi (na równiku 1,7 km/s) czyli wystarczy prędkość 9,5 km/s.

- V_{III} – przy starcie z orbity Ziemi ($R_{S\text{-}Z}$), aby opuścić Układ Słoneczny:

$$\Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{S-Z}}}$$

V_{II} = 4,21·10^4 m/s = 42,1 km/s = 150 000 km/h

ALE:

Uciekając z pola grawitacyjnego Słońca, wykorzystuje się szybkość orbitalną Ziemi – 30 km/s, więc wystarczy tylko nadać ciału prędkość 12 km/s + możliwa „asysta grawitacyjna” innych planet!

- V_{IV} – aby opuścić Drogę Mleczną: V_{IV} = *550 km/s* ale wykorzystując ruch Słońca wokół środka Galaktyki V_{IV} = *330 km/s*

Przykłady:

$M_Z = 5{,}96 \cdot 10^{24}$kg; $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^{6}$m

$M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$kg; $R_{S-Z} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$m

- Oblicz prędkość orbitalną Międzynarodowej Stacji Kosmicznej orbitującej na wysokości *h* = 400 km.

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}} = 7{,}67 \cdot 10^3 m/s$$

- Jak daleko doleciałaby rakieta starując w kierunku „od Słońca” z wokółziemskiej orbity z prędkością 30 km/s ?

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R_{S-Z}} = -\frac{GMm}{r} \qquad \Rightarrow r = 3 \cdot 10^{11} m \; (= 2 * R_{S-Z})$$

czyli pomiędzy Marsem a pasem planetoid.

Einstein a grawitacja

- wg Newtona oddziaływania grawitacyjne zachodzą w sposób natychmiastowy co jest sprzeczne z postulatem Einsteina o niemożności przesyłania sygnałów z szybkością większą niż szybkość światła.
- wg Ogólnej Teorii Względności grawitacja jest konsekwencją zakrzywienia czasoprzestrzeni przez obiekty mające masę/ energię.

Dygresja: co to jest przestrzeń ?

Geometria: jest to zbiór wszystkich punktów (z przypisywanymi im współrzędnymi) – nie we wszystkich punktach muszą się znajdować ciała.

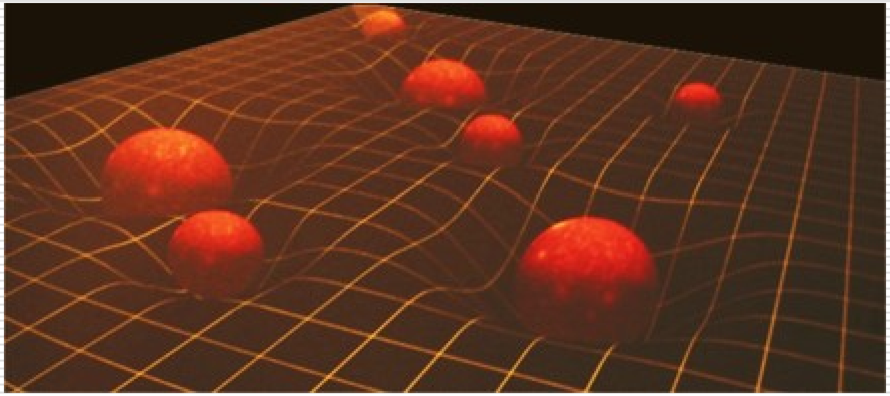
A co to jest czasoprzestrzeń ?

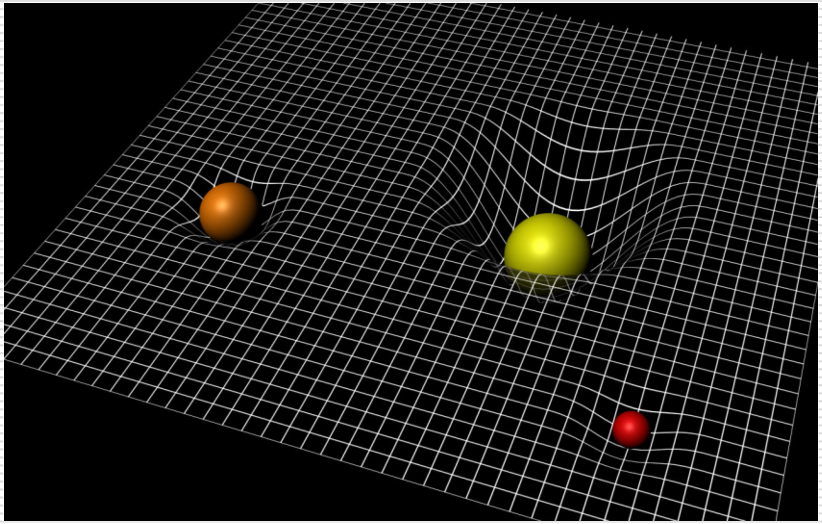
Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń nazywamy czasoprzestrzenią. Również w tym przypadku nie wszystkim abstrakcyjnym zdarzeniom (punktom czasoprzestrzennym) muszą odpowiadać zdarzenia fizyczne.

Ilość współrzędnych? **4** ale:

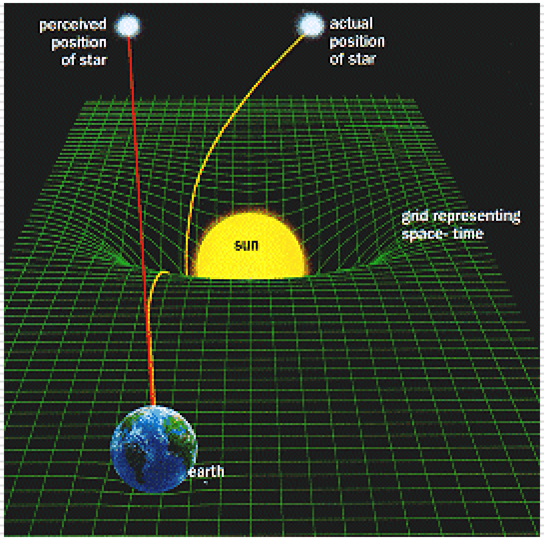
Rysunek bryły 3-wymiarowej robimy na płaszczyźnie. Również czasoprzestrzeń można badać robiąc jej dwuwymiarowy przekrój – tzn. ustalając współrzędne y i z i badając zmienne x i t.

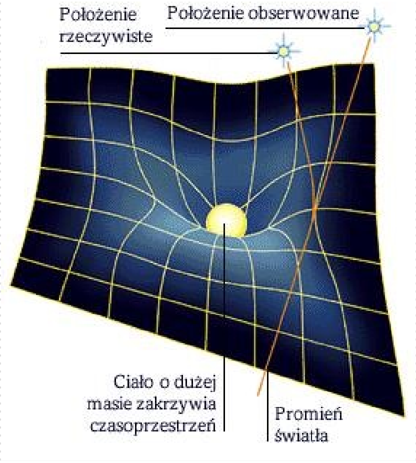
Zatem zakrzywienie czasoprzestrzeni:

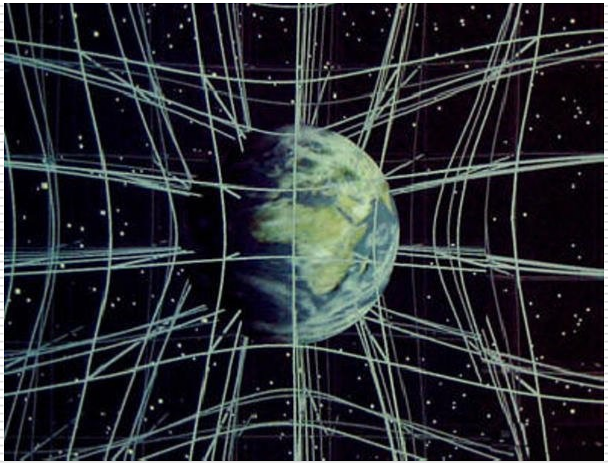




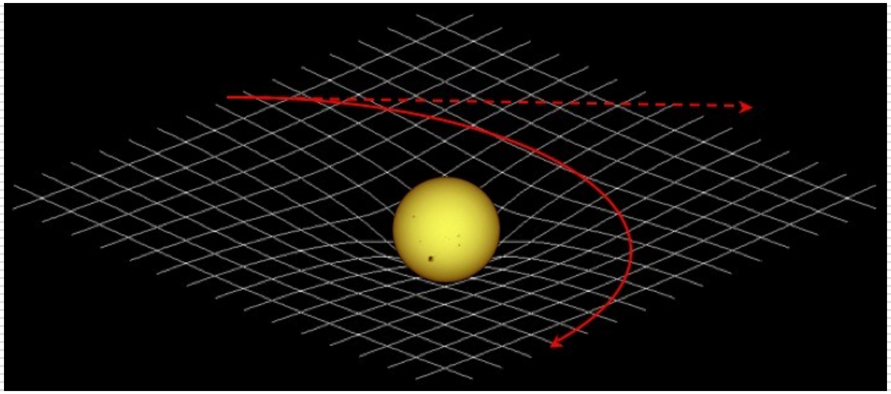
Konsekwencja:
najkrótsza linia
w pobliżu masy
jest zakrzywiona

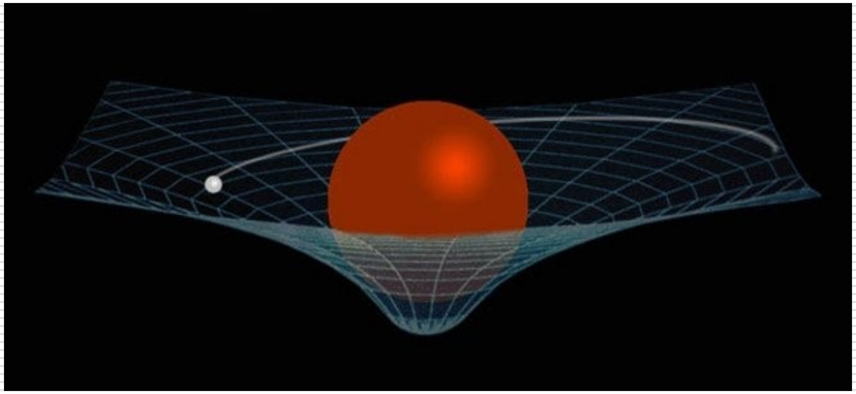


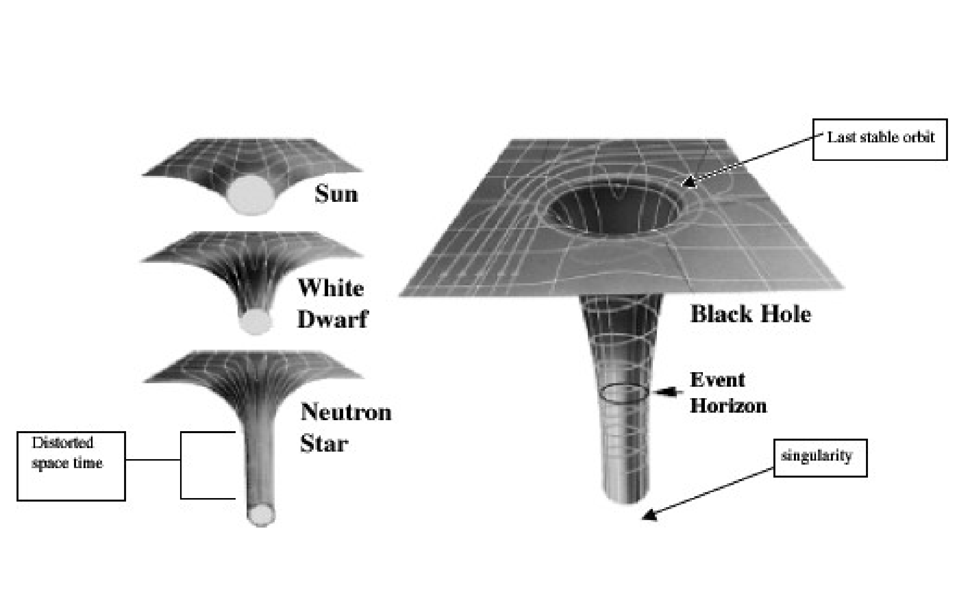




Eliptyczna orbita planet wynika z zakrzywienia czasoprzestrzeni





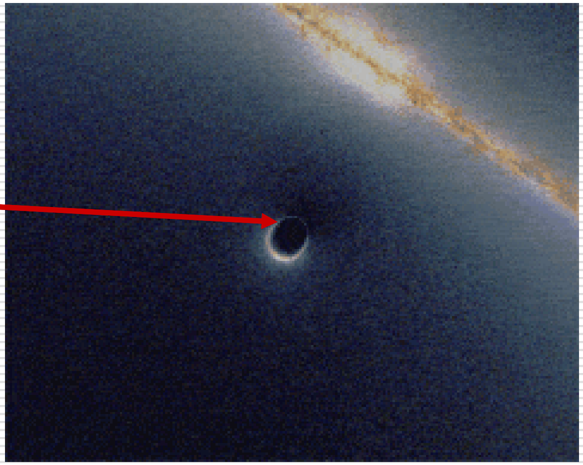


Pole grawitacyjne wirującej czarnej dziury – w tym modelu centralna osobliwość - miejsce, w którym krzywizna osiąga nieskończoność, nie jest już punktem lecz pierścieniem ułożonym w płaszczyźnie równikowej.

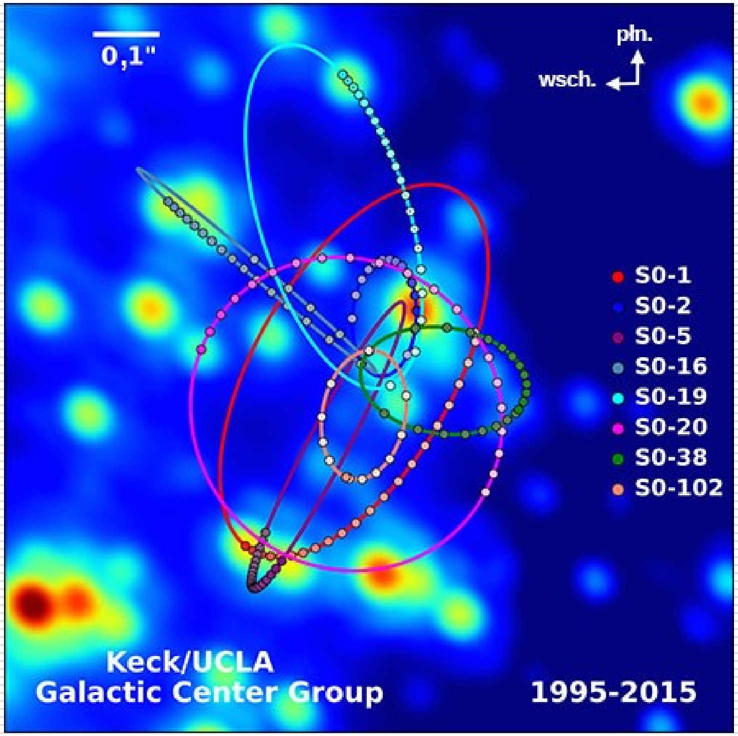
Jeżeli masa gwiazdy i jej promień spełnią warunki:
to światło nie będzie mogło uciec z jej powierzchni.

$$V_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}} > c$$

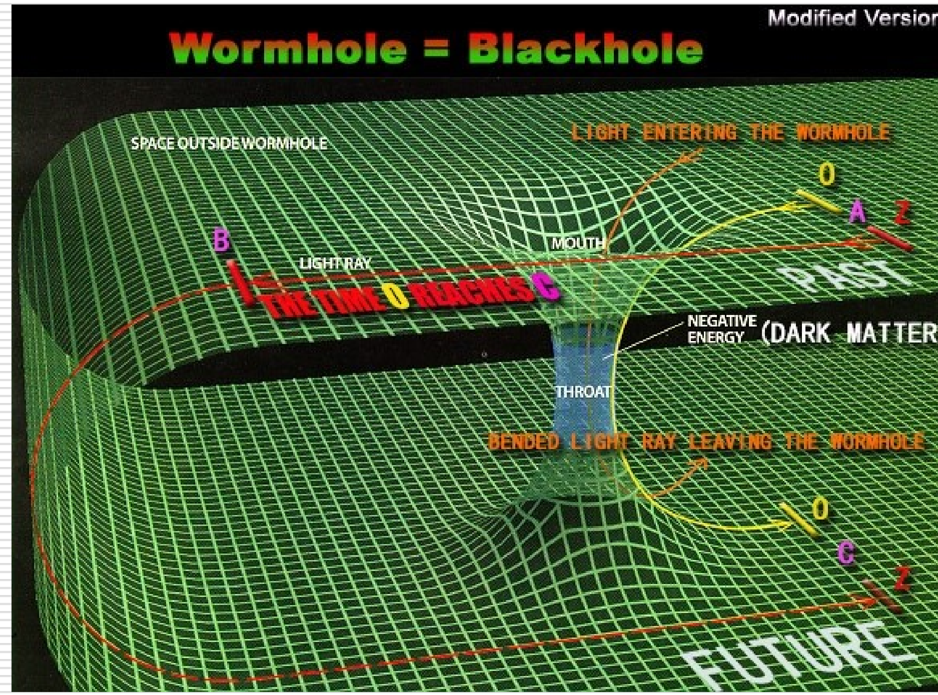
Dla określonej masy *M,* promień *R nosi nazwę* promienia Schwarzschilda, a powierzchnia ograniczona tym promieniem to tzw. *horyzont zdarzeń* – trajektorie fotonów są tam zakrzywiane i pozostają wewnątrz czarnej dziury.
Dla Słońca $R \approx 3$ *km,* a dla Ziemi $R \approx 9$ *mm (wówczas jej gęstość* $\sim 2 \cdot 10^{30}$ *kg/m*^{3} *!*

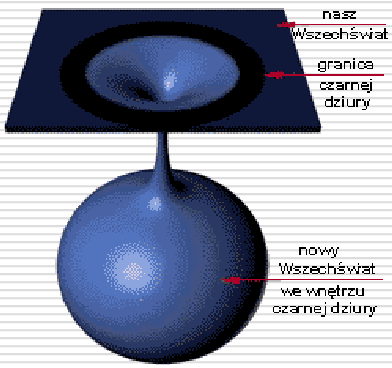


Wikipedia



trajektorie gwiazd krążących wokół masy znajdującej się w centrum Drogi Mlecznej. Na podstawie ich ruchu szacuje się, że czarna dziura w centrum galaktyki ma masę równą około 4 milionom mas Słońca.

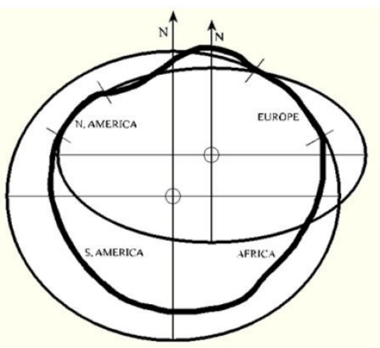


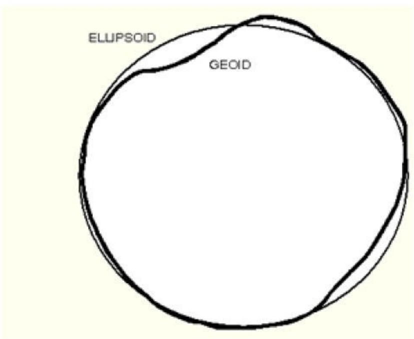


1935 – tunel Einsteina-Rosena (połączenie czarnej dziury i białej)

Zależność przyspieszenia ziemskiego od…

- wysokości (dla szer.geogr. 45^0)



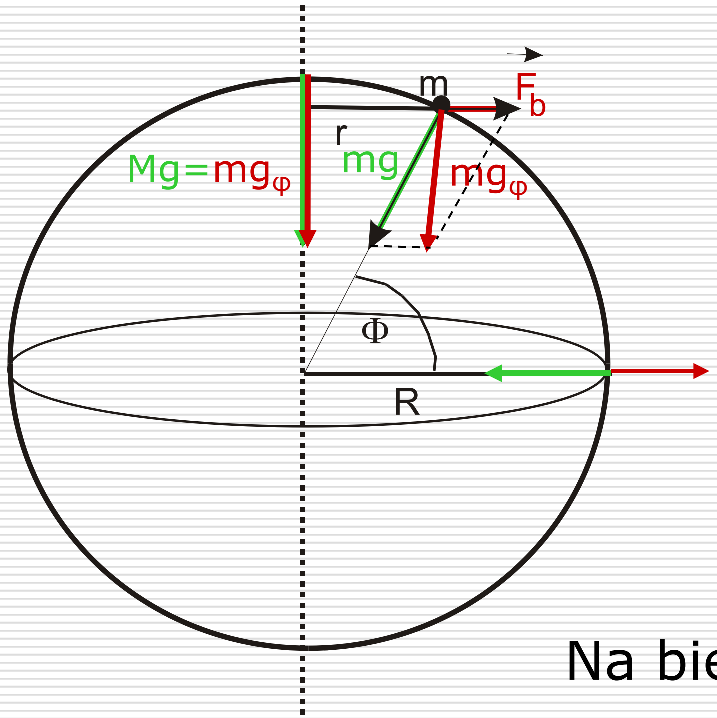


- szerokości geograficznej (na poziomie morza)
  - geoida
  - prawie połowa zmiany *g* jest wywołana ruchem obrotowym Ziemi

Wysokość [m]	g [m/s^2]
0	9,806
1000	9,803
4000	9,794
8000	9,782
32000	9,71

Szerokość geograficzna	g [m/s^2]
0^0	9,780
30^0	9,793
50^0	9,811
90^0	9,832

W związku z ruchem obrotowym Ziemi, należy uwzględnić działanie siły odśrodkowej bezwładności.
Ciężar ciała na szerokości geograficznej φ:



$$mg_\varphi = \frac{GMm}{R^2} - m\omega^2 r$$

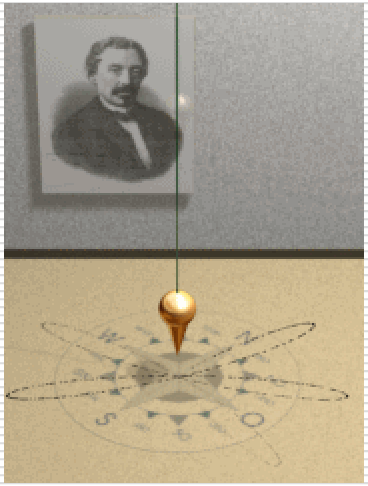
$$r = R\cos\varphi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$g_\varphi = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} R\cos\varphi$$

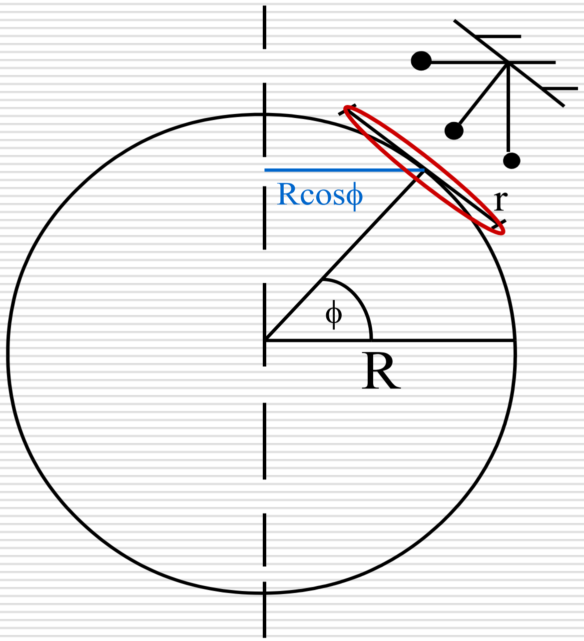
Na biegunie: $\varphi = 90^o \quad g_b = \frac{GM}{R^2}$

Na równiku $\varphi = 0^o \quad g_r = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

Wahadło Foucault'a



- płaszczyzna wahań wykonuje pełen obrót w ciągu jednej doby gwiazdowej (23h 56min 04,09s).
- W każdym wahnięciu wahadło nieznacznie skręca, zbacza z prostej drogi. Zboczenie to odpowiada ściśle kątowi, o jaki w ciągu tego wahnięcia obróciła się Ziemia.
- Zmianę kierunku ruchu wahadła można zinterpretować jako skutek działania pewnej siły. To jest właśnie siła Coriolisa, a cały efekt dowodzi nieinercjalności układu odniesienia związanego z powierzchnią Ziemi, czyli – pośrednio – jej ruchu obrotowego.



Kula wahadła Foucaulta wykonuje wahania nad pierścieniem o promieniu *r*, a płaszczyzna wahań obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara.

Prędkości względne krańcowych punktów pierścienia – północnego i południowego są różne. Szybciej porusza się punkt leżący dalej od osi obrotu.

Obliczamy prędkości liniowe odpowiednio północnego i południowego punktu pierścienia:

$$v_N = \omega R \cos\phi - \omega r \sin\phi$$

$$v_S = \omega R \cos\phi + \omega r \sin\phi$$

Różnica pomiędzy każdą z tych prędkości a prędkością środka pierścienia wahadła Foucaulta:

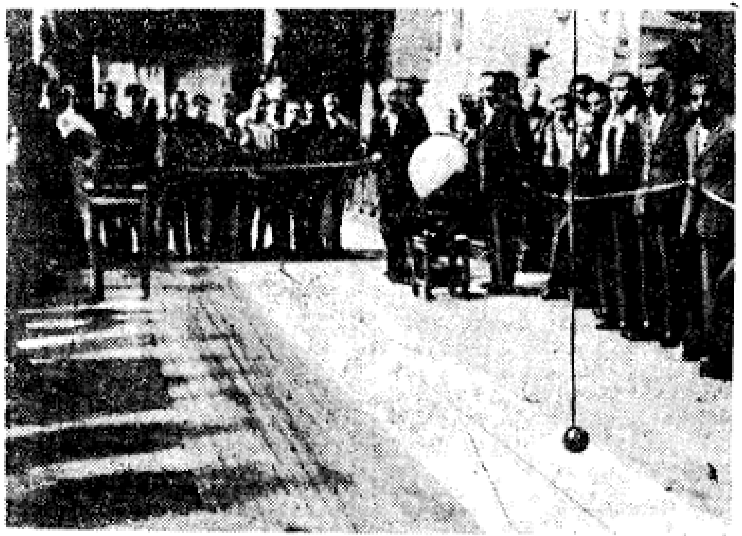
$$\Delta v = \omega r \sin\phi$$

Skoro obwód pierścienia wynosi $2\pi r$ więc pełny obrót

płaszczyzny wahań: $$T_0(\omega r \sin\phi) = 2\pi r$$

Stąd okres obiegu: $$T_0 = \left(\frac{2\pi r}{\frac{2\pi}{T} r \sin\phi}\right) = \frac{T}{\sin\phi} = \frac{24h}{\sin\phi}$$

Miejsce	Miasto	L [m]	M [kg]
Wydział Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza	Poznań	10	52
Centrum Nauki Kopernik	Warszawa	15	242
Politechnika Śląska – Centrum Nowych Technologii	Gliwice	22	55
Dziedziniec Politechniki Gdańskiej	Gdańsk	26	64
Wieża Radziejowskiego – dawna dzwonnica	Frombork	28,5	46
Zamek książąt Pomorskich – Wieża Dzwonów	Szczecin	28,5	76
Kościół św. Piotra i Pawła	Kraków	46,5	25



Pokaz wahadła Foucault'a ściąga liczne rzesze zainteresowanych... obrotem ziemi.
Foto „Dziennik Polski"