Wykład 11: Grawitacja cz.2

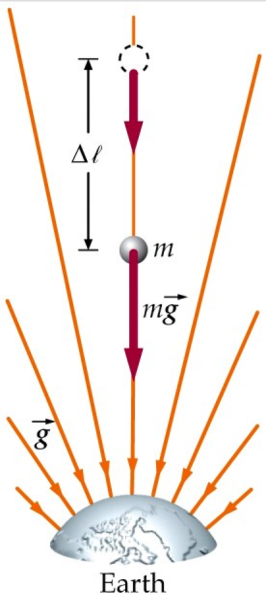
dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Siły centralne

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{r^3}\vec{r} \qquad F = \frac{C}{r^2}$$

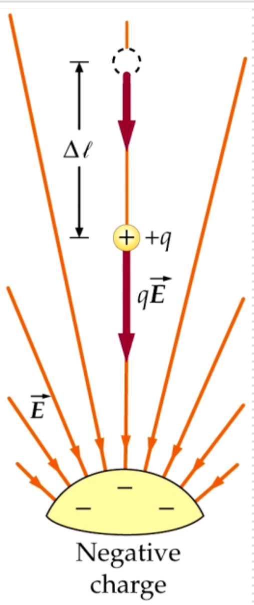
- Dla oddziaływań grawitacyjnych

$$C = -Gm_1 m_2$$



- Dla oddziaływań elektrostatycznych

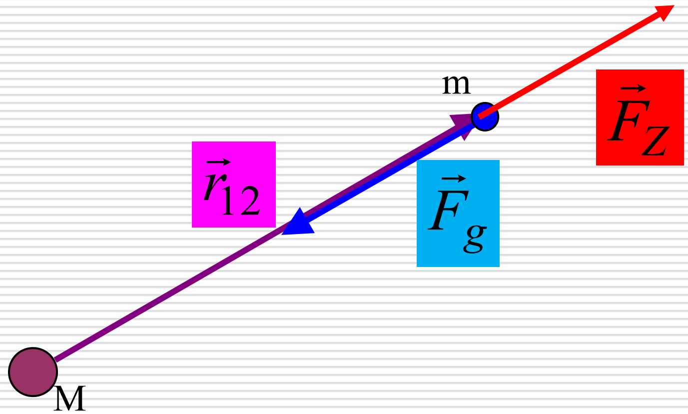
$$C = k \cdot q_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}$$



Wielkości charakteryzujące pole grawitacyjne

- Siła grawitacji $\vec{F}_g = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\hat{r}$
- Natężenie pola $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\hat{r}$
- Energia potencjalna:

  Obliczmy pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy przesunięciu ciała *z* $r \to \infty$ *.*



Aby nie zmieniać energii kinetycznej, ciało jest przesuwane przez siłę zewnętrzną F_z skierowaną przeciwnie do siły grawitacji i co do wartości $F_z = F_g$

.

$$W_Z = \int_r^{\infty} \vec{F}_z \circ d\vec{r} = GMm \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}\Bigg|_r^{\infty} = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{r}$$

Zatem $W_z = \frac{GMm}{r} = \Delta E_p$ $\quad \Delta E_p = E_{p\infty} - E_{pr} = W_z = 0 - E_{pr}$

$$E_p \overset{df}{=} W_{g(\infty\to r)} = W_{z(r\to\infty)}$$ stąd $$\boxed{E_{pr} = -\frac{GMm}{r}}$$

Skoro $W_g = \int_{\infty}^{r} \vec{F}_g \circ d\vec{r} = -E_p$

więc: $F_g = -\frac{dE_p}{dr}$

Dla przypadku 3D można zapisać: $\vec{F}_g = -\left(\hat{i}\frac{\partial E_p}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial E_p}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial E_p}{\partial_z} \right)$

$$\vec{F}_g = -\vec{\nabla} E_p$$

gdzie $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}$

$$\boxed{\vec{F}_g = -\mathbf{grad} E_p}$$

- Potencjał grawitacyjny

$$\boxed{E_{pr} = -\frac{GMm}{r}}$$

$$V \stackrel{df}{=} \frac{E_p}{m} \Rightarrow V = -\frac{GM}{r}$$ skoro $$-\vec{\nabla} E_p = \vec{F}_g$$ zatem

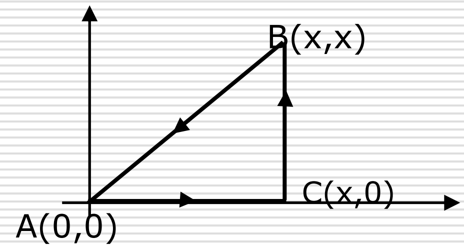
$$-\vec{\nabla} E_p = -\vec{\nabla} m V = -m \vec{\nabla} V = m \vec{g}$$

$$-\vec{\nabla} V = \vec{g}$$

czyli $$\boxed{\vec{g} = -\mathbf{grad}\, V}$$

oraz poprzednio $$\boxed{\vec{F}_g = -\mathbf{grad}\, E_p}$$

Przykład (patrz wykład – „Praca”)



Dane jest pole wektorowe o składowych $F_x = Ky$; $F_y = Kx$; $F_z = 0$; gdzie K jest stałą, działające na masę m. Sprawdzono, że jest to pole jest zachowawcze. Czy istnieje potencjał tego pola $V(x,y)$? Jeśli tak, to ile on wynosi?

Rozwiązanie: skoro $\vec{F} = -\overrightarrow{\nabla E_p} = -m\overrightarrow{\nabla V}$

$$F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = -m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-1}{m}F_x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-1}{m}F_y$$

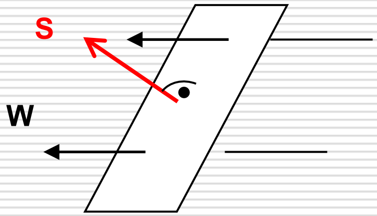
więc $$V = \frac{-1}{m}\int_{(0,0)}^{(x,0)} F_x dx = \frac{-1}{m}\int_{(0,0)}^{(x,0)} Ky dx = \frac{-1}{m}Kxy$$

oraz $$V = \frac{-1}{m}\int_{(0,0)}^{(0,y)} F_y dy = \frac{-1}{m}\int_{(0,0)}^{(0,y)} Kx dy = \frac{-1}{m}Kxy$$

$$\Rightarrow \boxed{V = -\frac{Kxy}{m}}$$

Prawo Gaussa

- Strumień pola wektorowego o natężeniu $\vec{W}$ przechodzący przez powierzchnię S

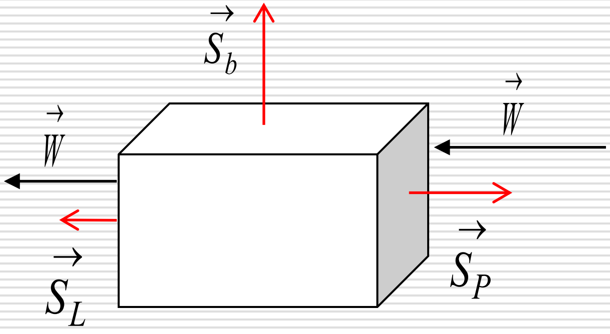


$$\Phi = \vec{W} \circ \vec{S}$$

- Dla powierzchni złożonej

$\Phi_c = \sum_i \Phi_i$ lub ogólnie dla powierzchni zamkniętej $\Phi = \oint \vec{W} \circ d\vec{S}$

w przypadku jak na rysunku



$$\Phi_c = 0$$

Całkowity strumień pola wektorowego, przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do źródła tego pola zamkniętego wewnątrz tej wybranej powierzchni

- Dla pola grawitacyjnego:

Całkowity strumień pola grawitacyjnego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą (tzw. powierzchnię Gaussa), jest proporcjonalny do masy będącej źródłem tego pola – masy, która jest zamknięta wewnątrz powierzchni Gaussa.

$$\boxed{\Phi_g = -4\pi G \cdot M}$$

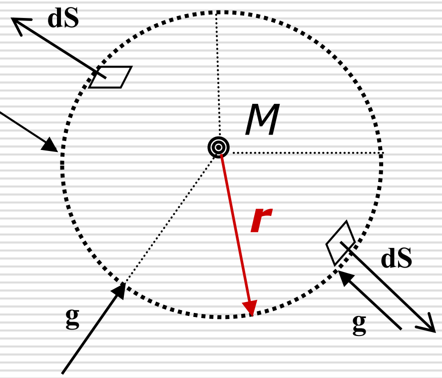
gdzie $\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{S}$

czyli ostatecznie $\boxed{\oint \vec{g} \circ d\vec{S} = -4\pi G M}$

PRZYKŁADY:

- Masa punktowa:

Powierzchnia Gaussa



$$\Phi_{\vec{g}} = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s} = \oint_S |\vec{g}||d\vec{s}| \cos 180^0 = -\oint_S g ds$$

$$\Phi_{\vec{g}} = -g \oint_S ds = -g 4\pi r^2$$

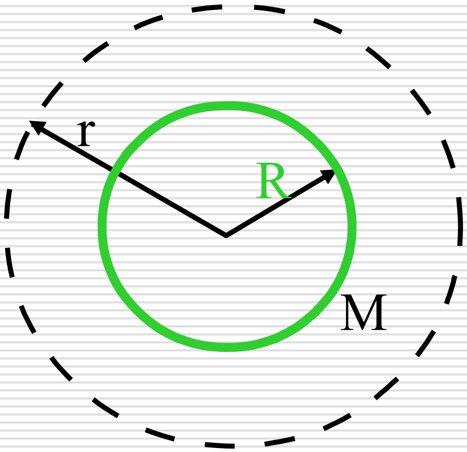
Skoro: $\Phi_g = -4\pi GM$

$$\boxed{g = G\frac{M}{r^2}}$$

$$F_g = m \cdot g = \boxed{G\frac{Mm}{r^2}}$$

Sferyczny rozkład masy

masa M rozłożona na sferze o promieniu R



gęstość powierzchniowa masy:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

1. rozpatrujemy pierwszy obszar **r > R**

Na podstawie prawa Gaussa

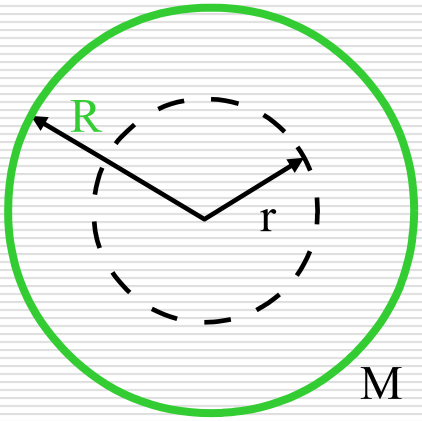
$$-4\pi GM = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s}$$

gdzie M jest masą powłoki zawartej wewnątrz powierzchni Gaussa.

$$-4\pi GM = -g4\pi r^2 \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \qquad g = \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2} = G\frac{M}{r^2}$$

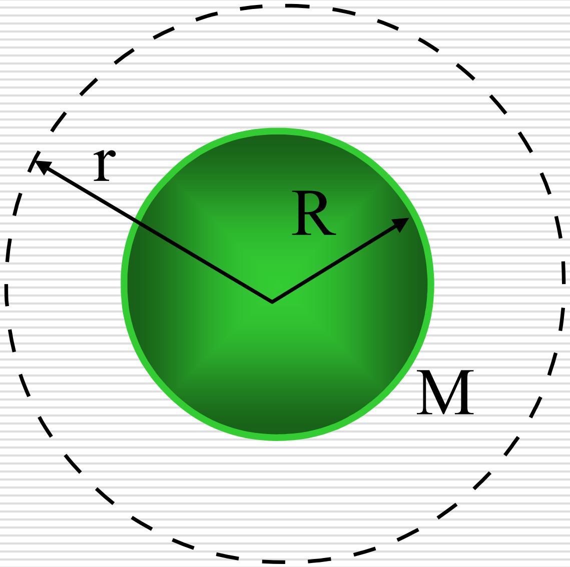
2. Dla drugiego obszaru **r < R**

$$0 = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s} \Rightarrow g = 0$$



gdyż żadna masa nie jest zawarta wewnątrz wybranej powierzchni Gaussa.

Objętościowy rozkład masy – kula o promieniu *R* i masie *M*.



1. pierwszy obszar $r > R$ (cała masa kuli zawarta jest wewnątrz powierzchni Gaussa).

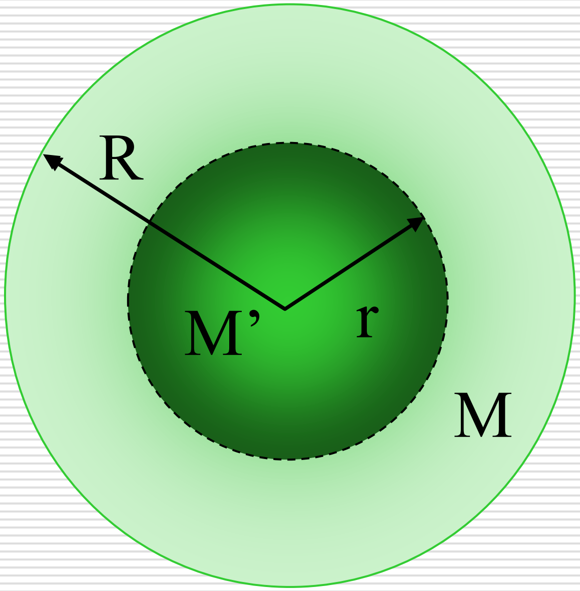
$$-4\pi GM = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s}$$

$$-4\pi GM = -g4\pi r^2 \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

Można stąd obliczyć potencjał i energię potencjalną masy próbnej *m* znajdującej się w odległości ***r*** od źródła pola grawitacyjnego *M*.

$$V = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r}$$

2. dla $r < R$ tylko część masy kuli zawarta jest wewnątrz powierzchni Gaussa.



Na podstawie prawa Gaussa:

$$-4\pi G M' = \oint \vec{g} \circ d\vec{S} \Rightarrow -4\pi G M' = -g 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow g = \frac{GM'}{r^2}$$ Obliczmy M' :

$$\frac{M'}{V'} = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \Rightarrow M' = M\frac{r^3}{R^3}$$

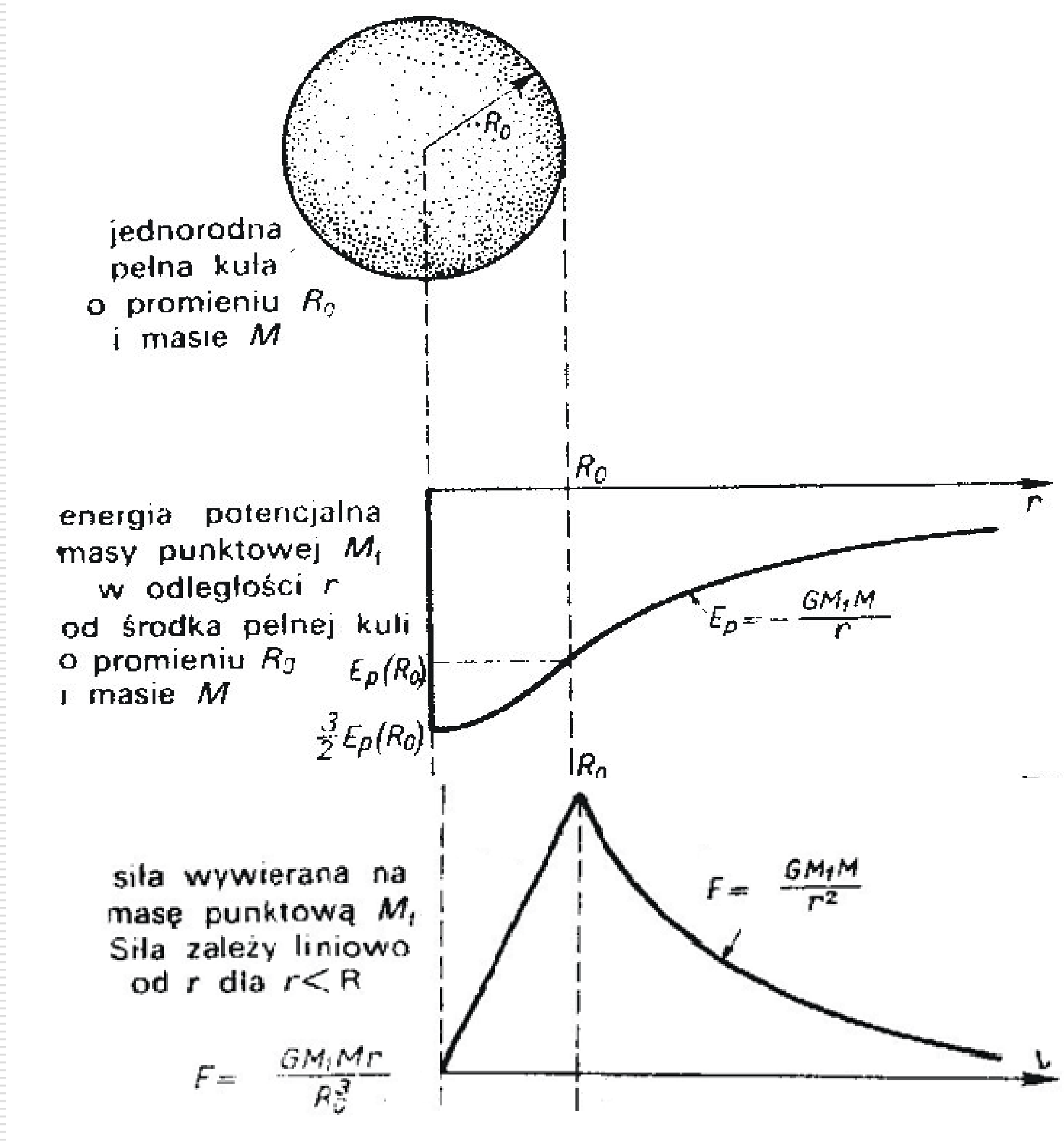
stąd $g = \frac{GMr}{R^3}$

Dla obu obszarów otrzymujemy ten sam wynik gdy **r = R**

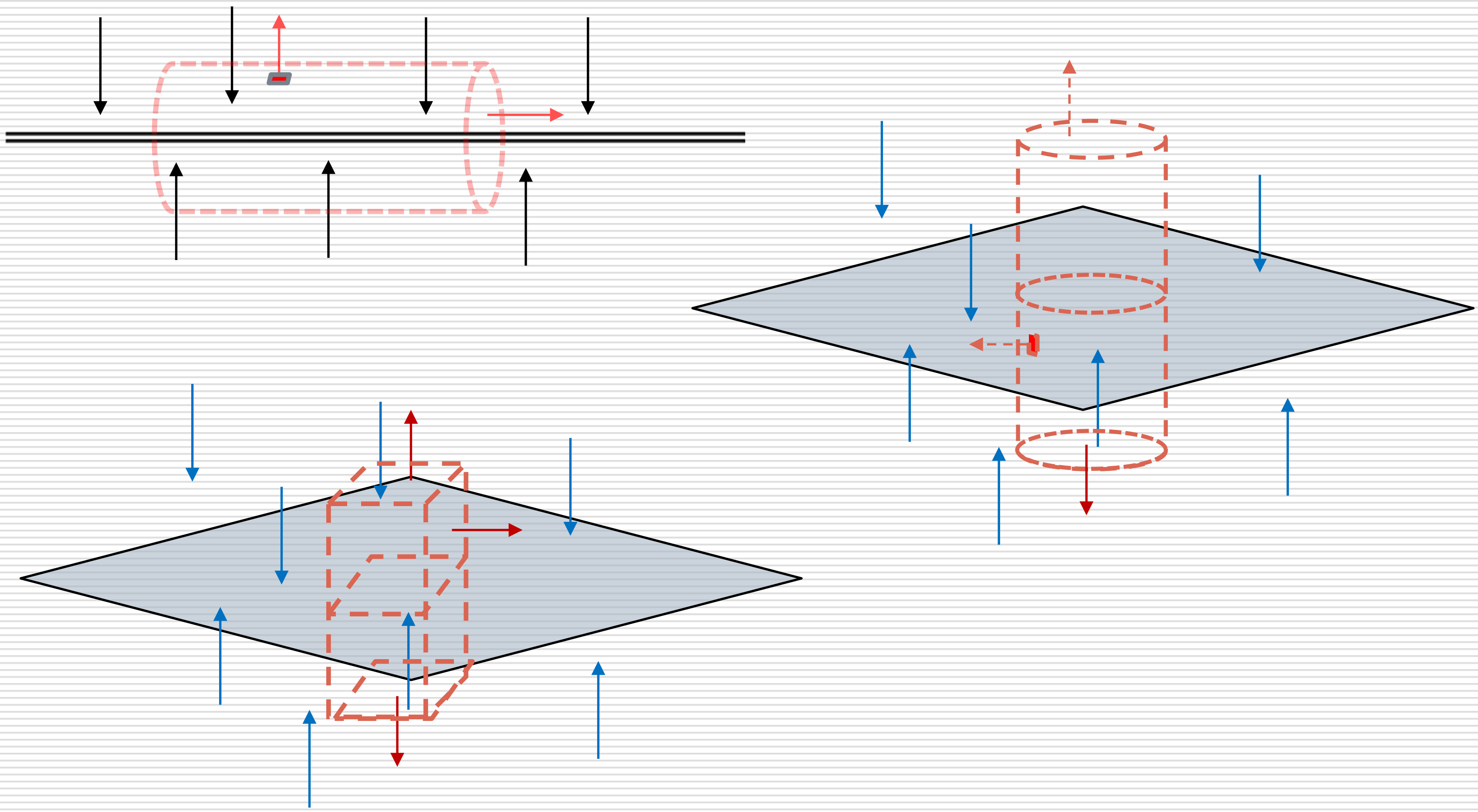
$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Podobnie jak poprzednio:

$$V = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{R^3}\frac{r^2}{2}$$


jednorodna
pełna kula
o promieniu R_0
i masie M
R_0
energia potencjalna
masy punktowej M_1
w odległości r
od środka pełnej kuli
o promieniu R_0
i masie M
$E_p(R_0)$
$\frac{3}{2}E_p(R_0)$
$E_p = -\frac{GM_1M}{r}$
r
siła wywierana na
masę punktową M_1
Siła zależy liniowo
od r dla $r < R$
$F = \frac{GM_1M}{r^2}$
$F = \frac{GM_1Mr}{R_0^3}$

Liniowy i powierzchniowy rozkład masy

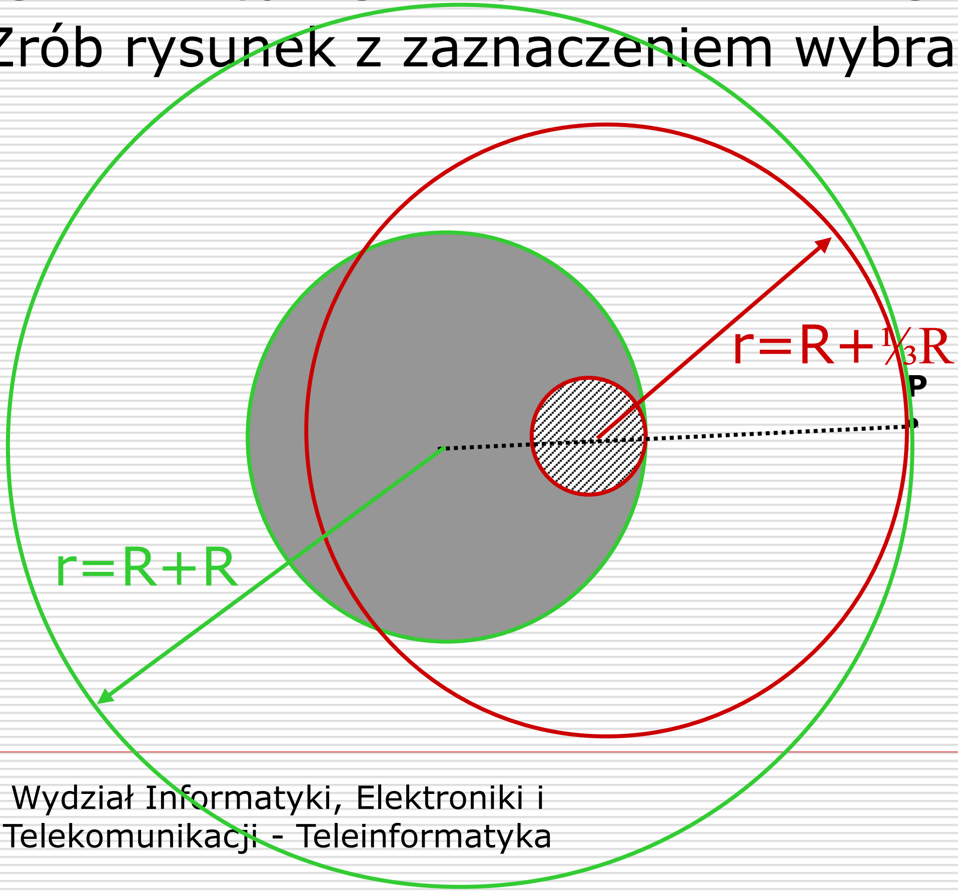


Wielkości charakteryzujące	Oddziaływanie pomiędzy masami punktowymi	Pole grawitacyjne	Prawo Gaussa
Siła Energia potencjalna	$\vec{\boldsymbol{F}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ $E_p = G\frac{m_1 m_2}{r}$		
Natężenie Potencjał		$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}$ $V = \frac{E_p}{m}$	
			$\oint \vec{g}\circ d\vec{S} = -4\pi G \cdot m$

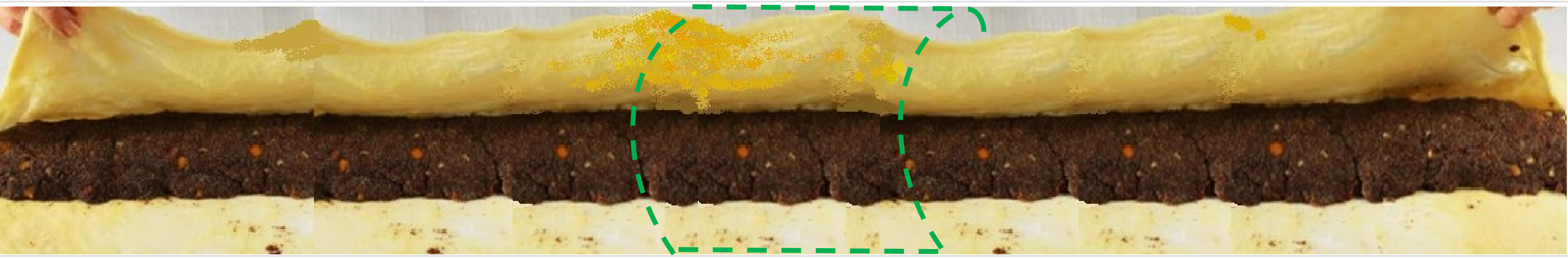
Inny przykład zastosowania prawa Gaussa.

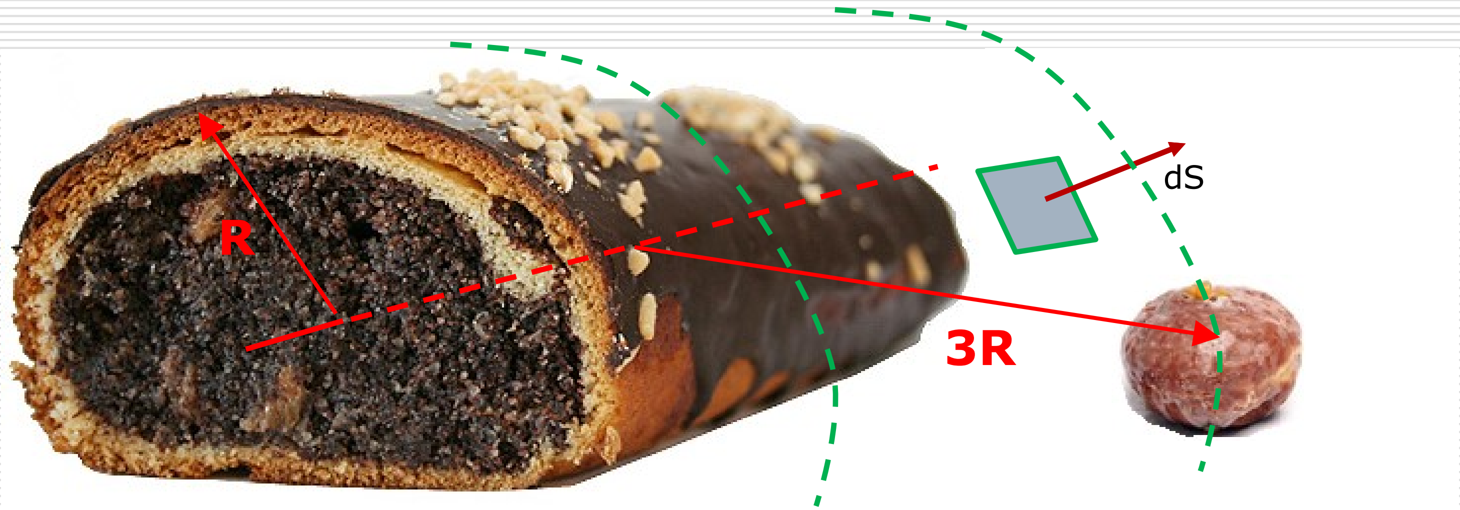
W jednorodnej kuli o promieniu *R*, wykonanej z materiału o gęstości ρ_1, wykonano kuliste wydrążenie o promieniu $r=⅓$ R przylegające do powierzchni kuli. Wydrążenie wypełniono materiałem o gęstości $\rho_2 = ½\ \rho_1$ Korzystając z prawa Gaussa oblicz natężenie pola grawitacyjnego w punkcie P, odległości R od powierzchni kuli. Zrób rysunek z zaznaczeniem wybranych powierzchni Gaussa.

$$g = \frac{23}{72}\pi G R \rho_1$$



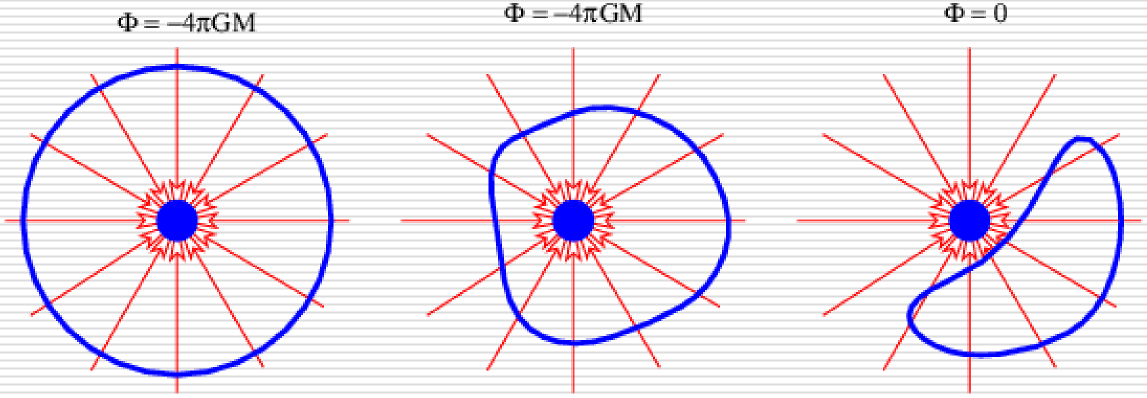
Uczeń cukiernika upiekł makowiec w kształcie bardzo, bardzo długiego, idealnego walca - niestety z zakalcem. Gęstość tego makowca o promieniu *R* można opisać w uproszczeniu funkcją $\sigma = A(1\text{-}r/R)$, gdzie *A* - stała makowcowa. Z jaką siłą przyciąga ten makowiec punktowy pączek o masie m umieszczony w odległości 3*R* od osi makowca ?





Podsumowanie – własności powierzchni Gaussa

- Powierzchnia Gaussa jest tworem hipotetycznym, matematyczną konstrukcją myślową,
- Jest dowolną powierzchnią zamkniętą, lecz w praktyce powinna mieć kształt związany w symetrią pola,
- Powierzchnię Gaussa należy tak poprowadzić aby punkt, w którym obliczamy natężenie pola grawitacyjnego leżał na tej powierzchni.



Energia grawitacyjna jednorodnej kuli

- Obliczamy energię oddziaływania pomiędzy pełną kulą o promieniu ***r*** a otaczającą ją powłoką kulistą o grubości *dr* i masie *dM*.
- Budowanie kuli będzie polegać na doklejaniu kolejnych zewnętrznych powłok. Praca potrzebna na „doklejenie" powłoki – przeniesienie jej z ∞:

$$dW = -\frac{GMdM}{r}$$

masa tak tworzonej kuli i powłoki jest równa odpowiednio:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr$$

Całkowita praca potrzebna do utworzenia kuli:

$$W = \int dW = \int -\frac{GMdM}{r} = -\int_0^R G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho dr}{r} = -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2\int_0^R r^4 dr$$

$$W = -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2\frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{GM^2}{R}$$

W ten sposób obliczamy energię grawitacyjną gwiazd i planet.

- Przykładowo, grawitacyjna energia własna Słońca:

$$W = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}$$

$M_s = 2 \cdot 10^{30} kg$ $R_s = 7 \cdot 10^8 m$

$$E_{p\ Slonca} \approx -\frac{3}{5} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}(2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \approx -2{,}3 \cdot 10^{41} J$$

Jest to bardzo duża ilość energii i jest oczywiste, że w procesie grawitacyjnego zapadania się gwiazdy (do stadium białego karła o promieniu ok. 0,1 obecnego promienia Słońca) wyzwoli się ogromna ilość energii.