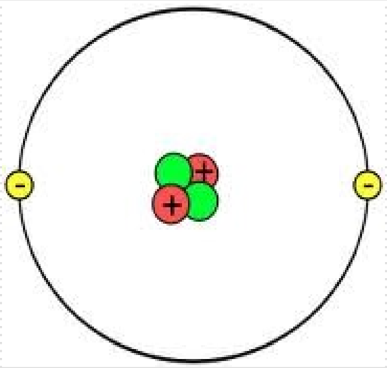
Wykład 12: Elektrostatyka

dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Kwantyzacja ładunku i zasada zachowania ładunku



Każdy elektron ma masę = m_e i ładunek = $-e$

Każdy proton ma masę = m_p i ładunek = e

$e=1{,}602\cdot 10^{-19}\,C$ Ładunek elementarny

Każdy inny ładunek jest wielokrotnością ładunku elementarnego

$|Q|= Ne$

- **Całkowity ładunek układu odosobnionego, tzn. algebraiczna suma dodatnich i ujemnych ładunków występujących w dowolnej chwili, nie może ulegać zmianie.**

$$\boxed{Q_{całk}=const}$$

$$Q_{całk}= Q_e + Q_p = -2\,e + 2\,e = 0$$

Przykłady zasady zachowania ładunku

- Rozpad promieniotwórczy jądra uranu

$$ {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He $$

Emisja cząstki α

Liczba atomowa Z=92 oznacza 92 protony w jądrze i ładunek 92e

Z zasady zachowania ładunku

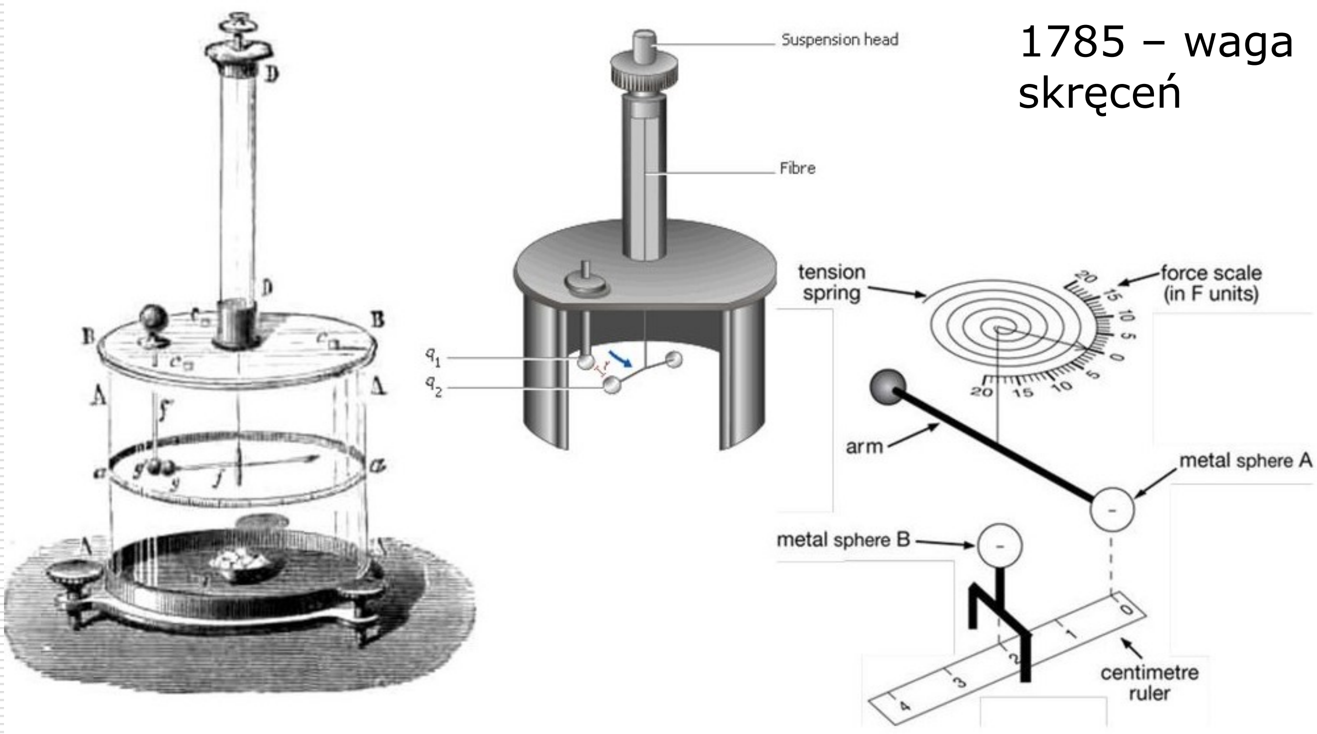
$$ 92e = 90e + 2e $$

- Proces anihilacji elektronu e^- i antycząstki - pozytonu e^+

$$ e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma $$

Emisja dwóch kwantów promieniowania elektromagnetycznego

Empiryczne prawo Coulomba (1736-1806)

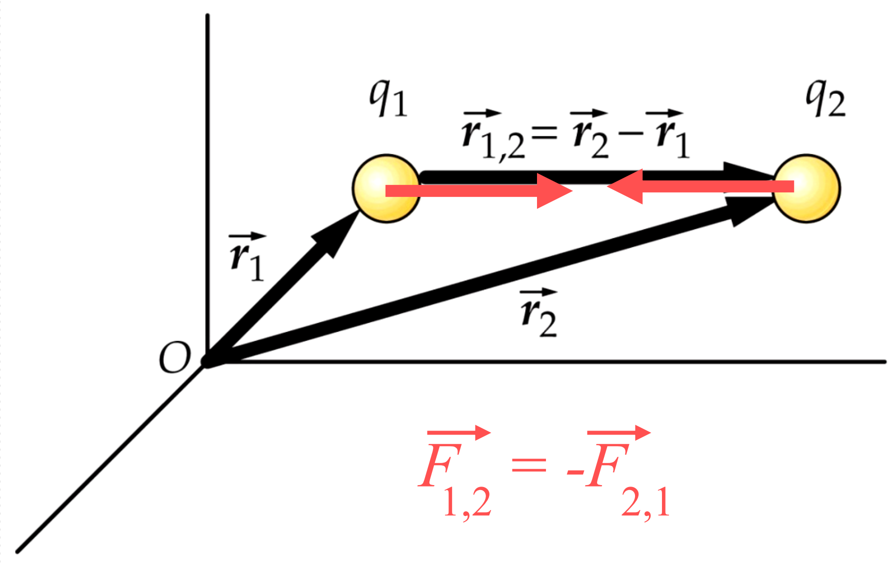


1785 – waga skręceń

$$\boxed{F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \quad \text{gdzie}$$

$$\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$



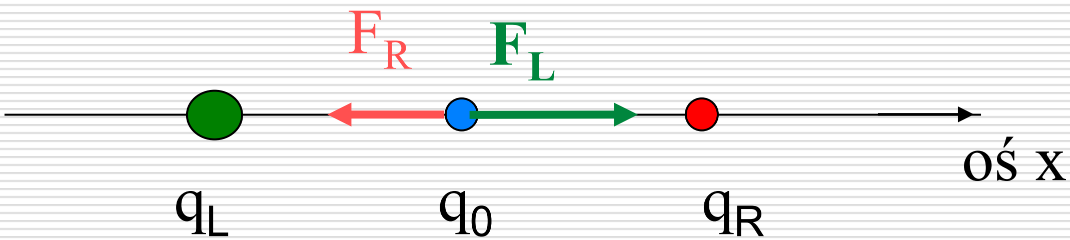
$$F_{1,2} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_{2,1} = \ldots$$

III zasada dynamiki

Zasada superpozycji

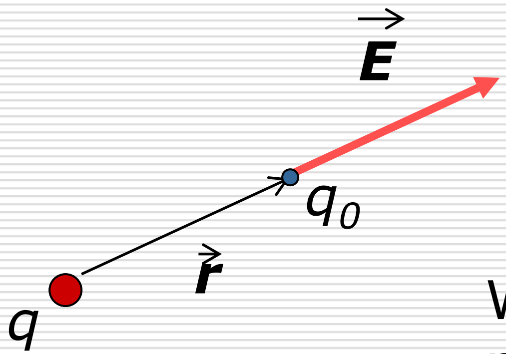
$$\vec{\mathbf{F}}_{cał} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$



Ładunki q_L, q_0 i q_R są tego samego znaku

$$\vec{\mathbf{F}}_0 = \vec{\mathbf{F}}_R + \vec{\mathbf{F}}_L = \frac{kq_0(q_L - q_R)}{x^2}\hat{\mathbf{x}}$$

Natężenie pola elektrycznego



$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_0}$$ ładunek próbny $q_0 > 0$

Wektor natężenie pola ładunku punktowego ma taki sam zwrot jak wektor siły działającej na dodatni ładunek próbny.

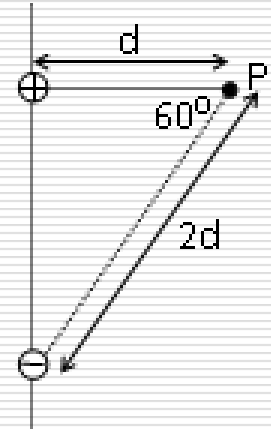
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Natężenie pola pochodzące od wielu ładunków punktowych (rozkład dyskretny)

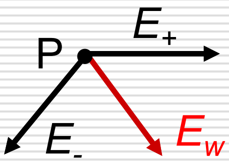
$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i = \sum_i \frac{kq}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

Przykłady

1) Dwa ładunki *+Q* oraz *-4Q* wytwarzają w punkcie P wypadkowe pole elektryczne. Oblicz i narysuj wektor tego pola.

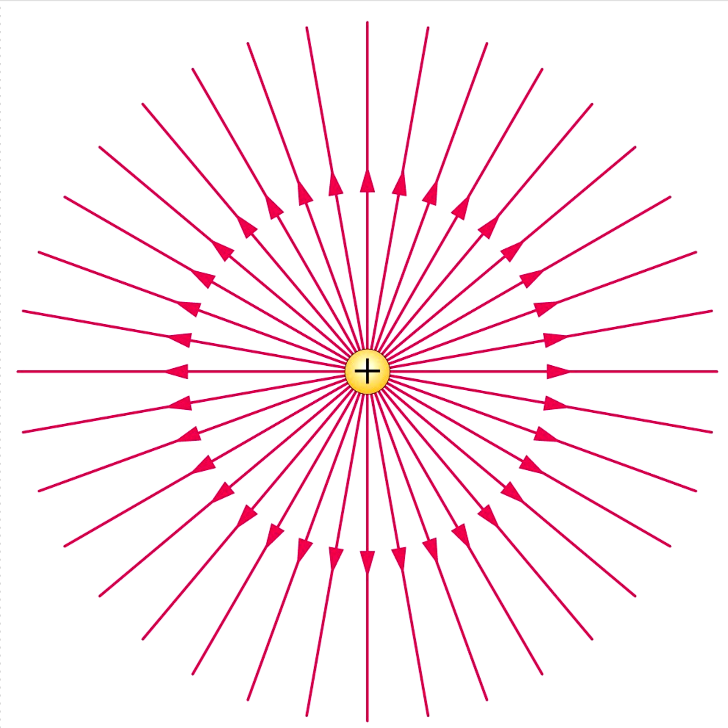


$$E_+ = E_- = k\frac{4Q}{4d^2} = k\frac{Q}{d^2} = E_w$$

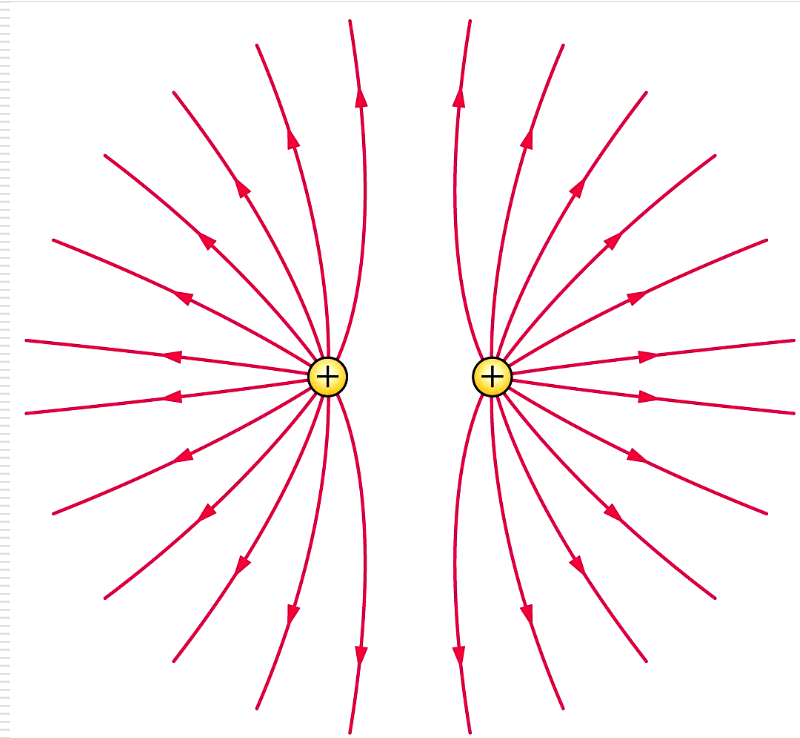


2) Dwa ładunki punktowe +q i -1/9q znajdują się w odległości *r* od siebie. W jakiej odległości *x* od ładunku -1/9q znajduje się punkt w którym wypadkowe natężenie pól elektrycznych pochodzących od tych ładunków jest równe zero ?

Linie pola elektrostatycznego

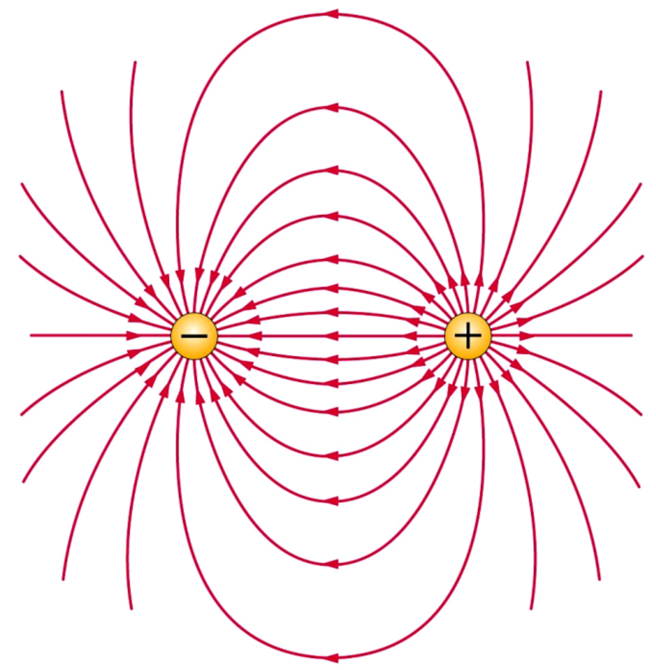


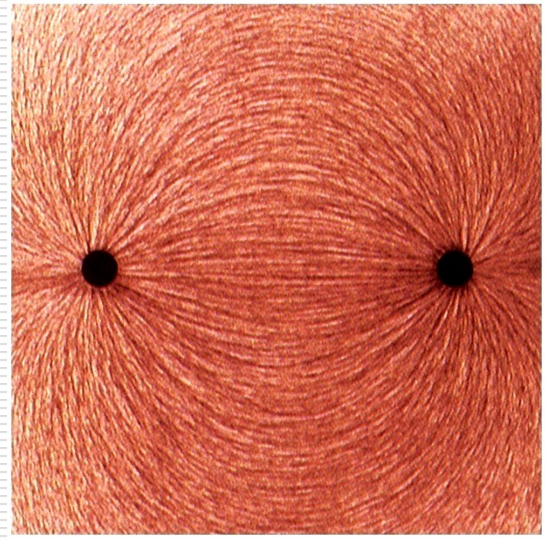
Pole ładunku punktowego- symetria sferyczna

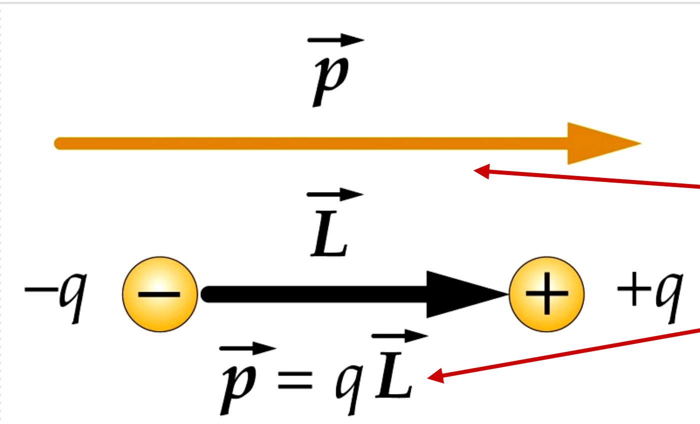


Dwa jednoimienne ładunki punktowe

Dipol elektryczny - dwa różnoimienne ładunki w bardzo małej odległości





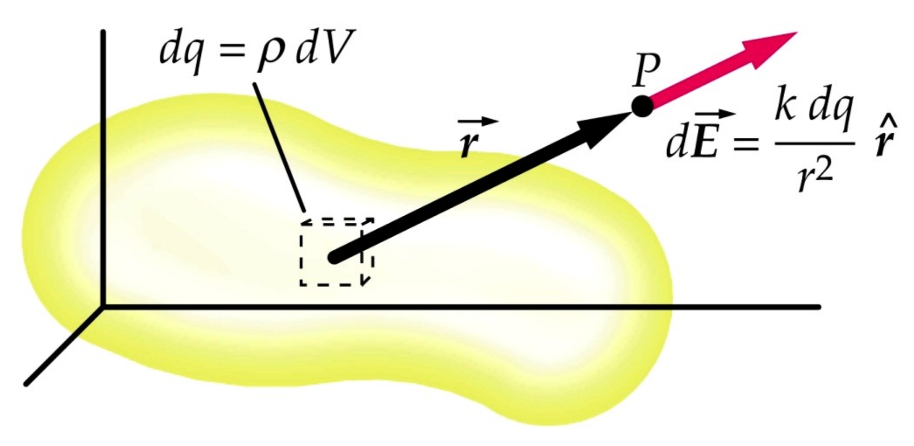


moment dipolowy

odległość między ładunkami

Ciągły rozkład ładunku

- Dla ładunków dyskretnych pole wypadkowe **E** jest sumą wektorów natężenia $\mathbf{E_i}$ czyli: $\vec{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$



- Dla ładunku, dq, natężenie pola elektrycznego w punkcie P dane jest zgodnie z prawem Coulomba jak dla ładunku punktowego

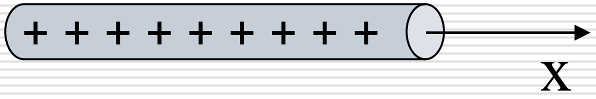
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathrm{kdq}}{\mathrm{r}^2}\,\hat{\mathbf{r}}}$$

- Dla ciągłego rozkładu ładunku pole wypadkowe jest całką:

$$\vec{\mathbf{E}} = \int \mathrm{d}\vec{\mathbf{E}} = \int_Q \frac{\mathrm{kdq}}{\mathrm{r}^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

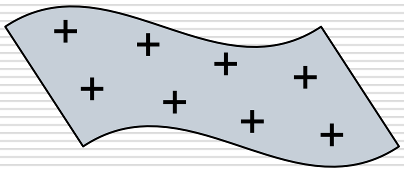
W zależności od rozkładu ładunku rozróżniamy:

- gęstość liniową ładunku λ,



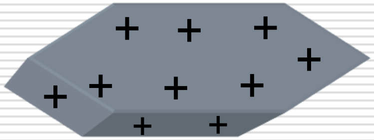
$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

- gęstość powierzchniową ładunku σ,



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

- gęstość objętościową ładunku ρ



$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Dla ciągłego rozkładu ładunku, w zależności od rodzaju gęstości ładunku, pole wypadkowe może być całką liniową, powierzchniową lub objętościową:

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}} = \int_V \frac{k\rho\, dV}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

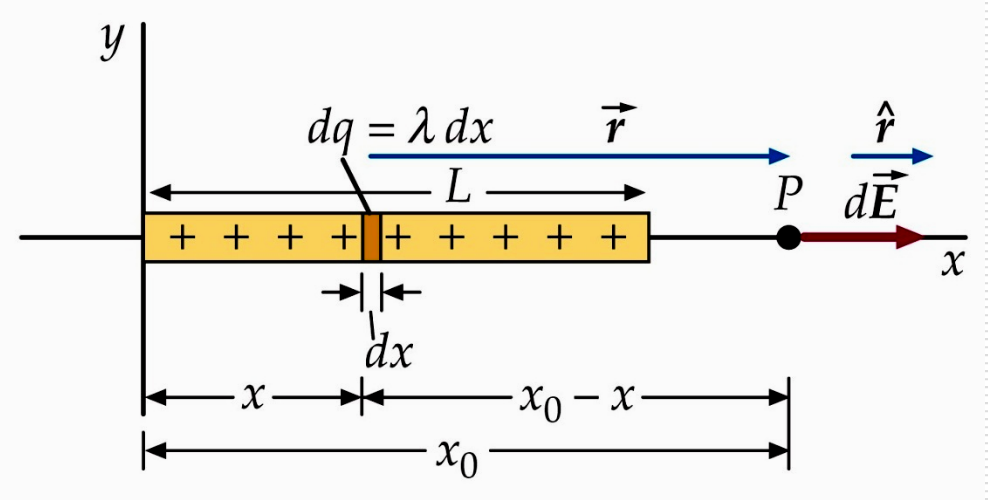
Przykład

- Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w punkcie P na osi liniowego rozkładu ładunku

$$d\vec{\mathbf{E}}_x = \frac{kdq}{(x_0 - x)^2}\hat{\mathbf{x}}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$d\vec{\mathbf{E}}_x = \frac{k\,\lambda dx}{(x_0 - x)^2}\hat{\mathbf{x}}$$



Wypadkowe natężenie pola jest sumą pól pochodzących od ładunków elementarnych dq:

$$E = \int dE_x = \int_0^L \frac{k\,\lambda dx}{(x_o - x)^2} = \frac{k\lambda\, L}{x_o(x_o - L)}$$

Strumień pola (elektrycznego) - przypomnienie

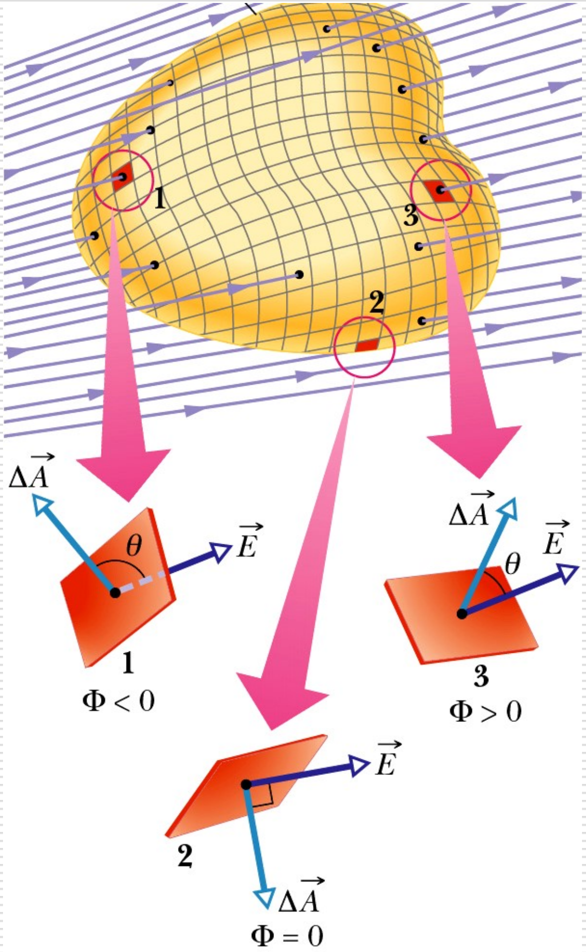
Dla dowolnej powierzchni

$$\Delta\Phi_{\vec{\mathbf{E}}} = \vec{\mathbf{E}} \circ \Delta\vec{\mathbf{A}}$$

$$\Phi_{\vec{\mathbf{E}}} = \sum \vec{\mathbf{E}} \circ \Delta\vec{\mathbf{A}}$$

$$\boxed{\Phi_{\vec{\mathbf{E}}} = \int \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}}}$$

W prawie Gaussa występuje strumień przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą



Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

Całkowity strumień pola elektrycznego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do całkowitego ładunku zawartego wewnątrz tej powierzchni.

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

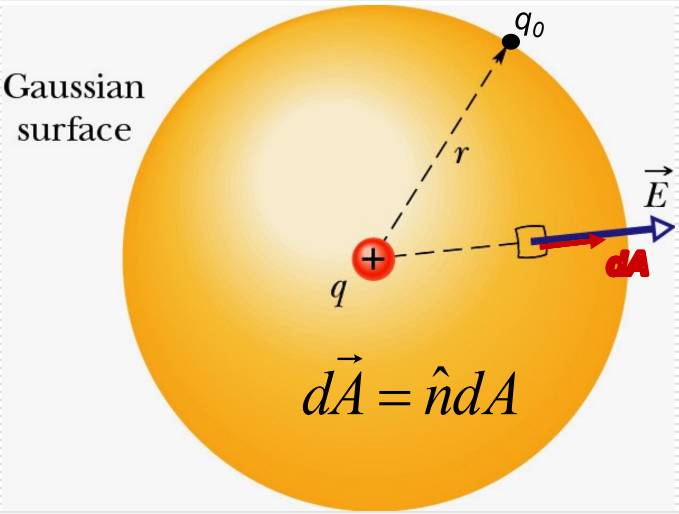
Właściwości powierzchni Gaussa:

- Powierzchnia Gaussa jest tworem hipotetycznym, matematyczną konstrukcją myślową,
- Jest dowolną powierzchnią zamkniętą, lecz w praktyce powinna mieć kształt związany w symetrią pola,
- Powierzchnię Gaussa należy tak poprowadzić aby punkt, w którym obliczamy natężenie pola elektrycznego leżał na tej powierzchni.

Od prawa Gaussa do prawa Coulomba

Skoro $F = q_0 E$

- Ładunek punktowy q otaczamy powierzchnią Gaussa – sferą o promieniu r ponieważ



E = const na powierzchni sfery oraz

$\vec{E} \parallel \hat{n}$

cos 0 = 1

- Obliczamy całkowity strumień przez powierzchnię Gaussa

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\cos\theta \, dA = \oint E dA$$

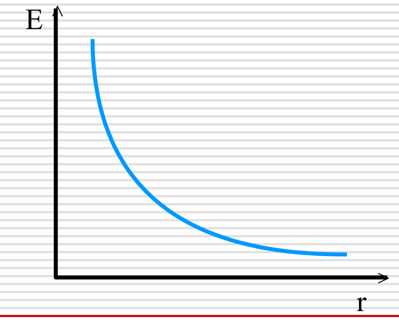
$$\Phi_E = E \oint dA = E(4\pi r^2)$$

- Korzystamy z prawa Gaussa $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o}$

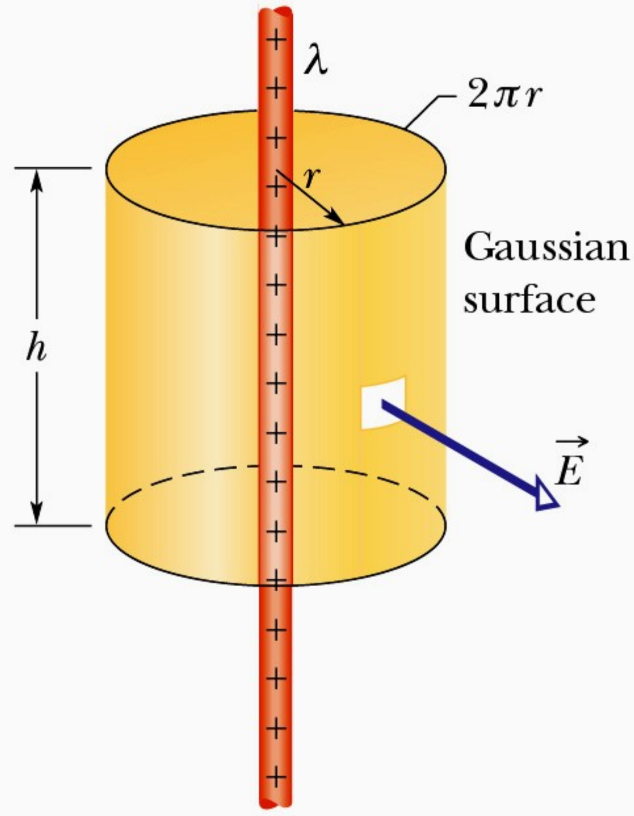
- Porównujemy z obliczonym strumieniem

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

Ostatecznie $F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$



Liniowy rozkład ładunku



Całkowity strumień przechodzący przez powierzchnię Gaussa

$$\Phi_E = 2\pi r h E$$

Całkowity ładunek zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa

$$Q = \lambda h$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_o}$$

zatem

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Wartość wektora natężenia pola elektrycznego

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}$$

symetria cylindryczna

Powierzchniowy rozkład ładunków

- Całkowity strumień przez powierzchnię Gaussa

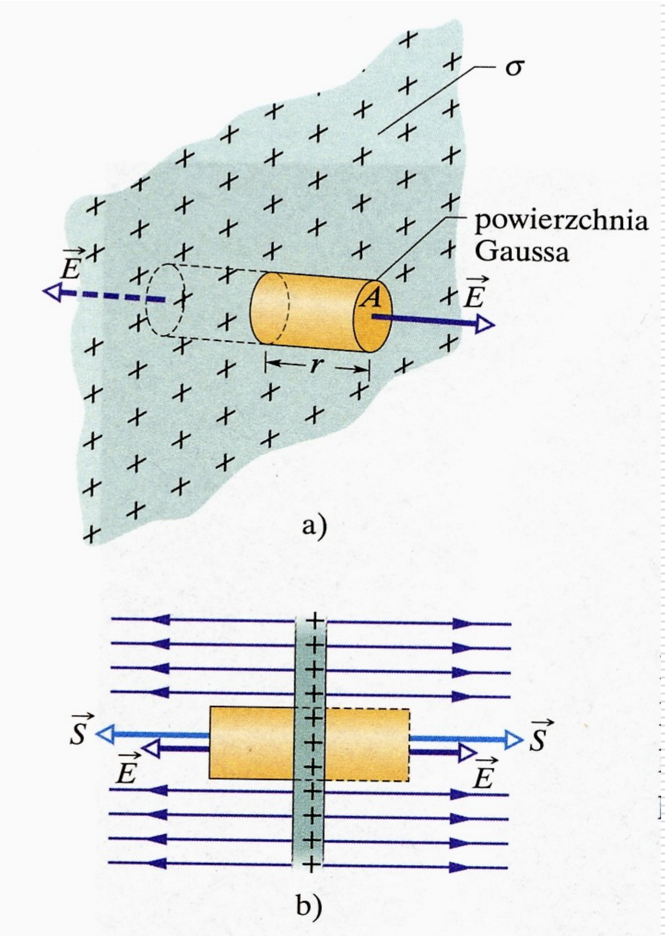
$$\Phi_E = 2ES$$

- Z prawa Gaussa

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o}$$

- Wartość wektora natężenia pola

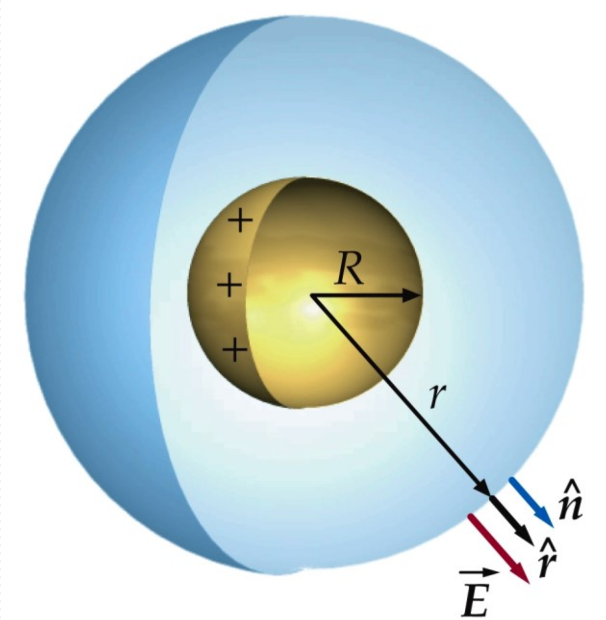
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$



Pole elektryczne sferycznego rozkładu ładunków

Całkowity strumień przez powierzchnię Gaussa będącą sferę o promieniu r wynosi:

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E$$



Z prawa Gaussa: $$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

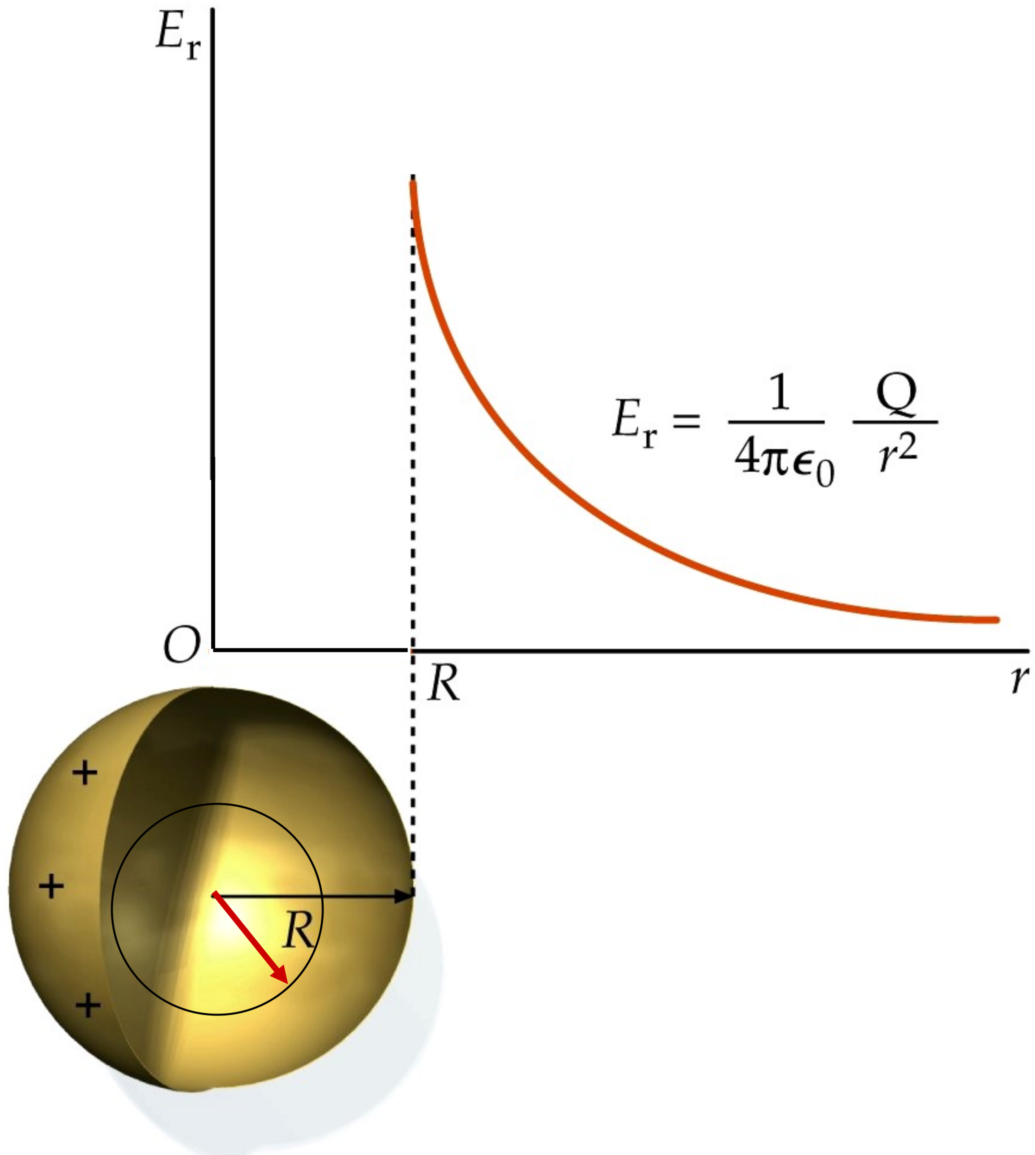
Ładunek całkowity Q jest rozłożony tylko na powierzchni sfery o promieniu R

Ze względu na rozkład ładunku rozważmy dwa przypadki:

- r>R $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$ Pole na zewnątrz pustej powłoki sferycznej jest takie jakby cały ładunek był skupiony w środku kuli

- r<R

wewnątrz powierzchni Gaussa tj. sfery o promieniu *r* nie ma ładunku czyli Q=0, Φ_E=0 a zatem E=0



Pole wewnątrz naładowanej powłoki sferycznej wynosi zero

Zastosowania prawa Gaussa

- Prawo Gaussa stosujemy do obliczania natężenia pola elektrycznego gdy znamy rozkład ładunku lub do znajdowania rozkładu ładunku gdy znamy pole.
- Prawo Gaussa możemy stosować **zawsze** ale sens ma to tylko w tym przypadku gdy pole elektryczne wykazuje symetrię (sferyczną, cylindryczną).
- Aby skutecznie skorzystać z prawa Gaussa trzeba **coś wiedzieć** o polu elektrycznym na wybranej powierzchni Gaussa.

W praktyce zastosowanie prawa Gaussa jest ograniczone do konkretnych przypadków - symetrii:

a) pole (jednorodne) od naładowanej nieskończonej płaszczyzny (powierzchniowy rozkład ładunku)

b) pole (o symetrii cylindrycznej) od nieskończenie długiego pręta (liniowy rozkład ładunku) lub walca (powierzchniowy rozkład ładunku – walec przewodzący, objętościowy rozkład ładunku - walec nie przewodzący)

c) pole (o symetrii sferycznej) od naładowanej kuli lub powierzchni sferycznej

Przykłady zadań z zastosowania prawa Gaussa.

- Kula z dielektryka o promieniu *R* naładowana jest z gęstością ładunku zmieniającą się wraz z odległością od środka, opisaną zależnością $\rho = \rho_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Wyznaczyć rozkład natężenia pola **E**.

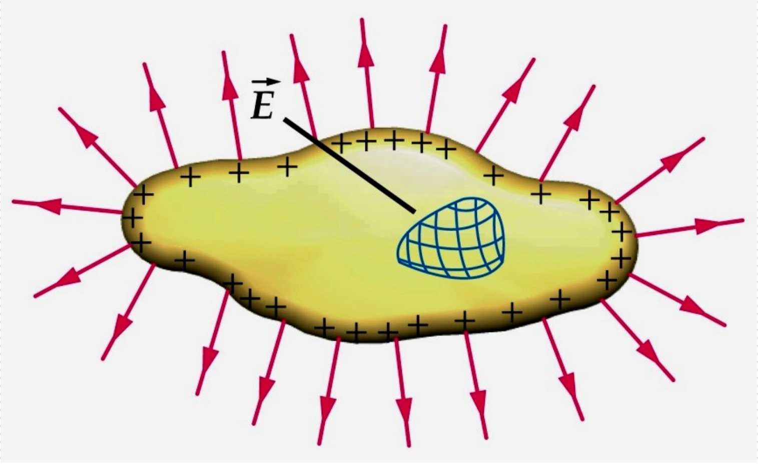
  Odp. Dla *r*>*R* $E = \frac{\rho R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$

- Nieskończony metalowy walec o promieniu *R*, jednorodnie naładowano z gęstością σ_+ i otoczono innym współosiowym, cienkim metalowym walcem o promieniu *2R* i takiej gęstości powierzchniowej ładunku σ_-, że pole elektryczne na zewnątrz tych walców wynosi zero.
  - Obliczyć rozkład pola w funkcji odległości od osi walców;
  - Narysować wykres E(r);
  - Określić gęstość σ_-

  Odp. $\sigma_- = ½\, \sigma_+$

Pole elektryczne przewodnika

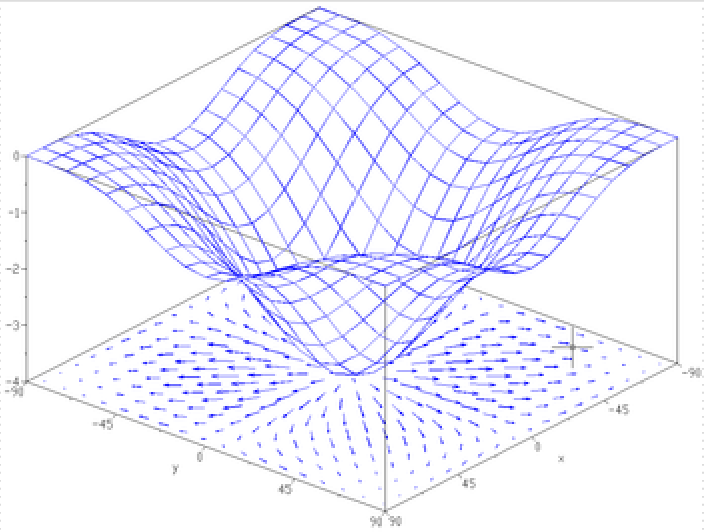
- Na powierzchni metalicznej (przewodzącej) cały ładunek gromadzi się na zewnątrz (wewnątrz pole *E=0*).
- Istnieje tylko składowa prostopadła do powierzchni a składowa styczna równa się zeru (gdyby istniała składowa styczna to: po powierzchni płynąłby prąd wywołany ruchem elektronów).



$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Dygresja matematyczna - *operatory*

- Operator przyporządkowuje np. polu skalarnemu odpowiednie pole wektorowe, np.:



$$\vec{F}_g = -\mathbf{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p$$

gdzie $$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}$$

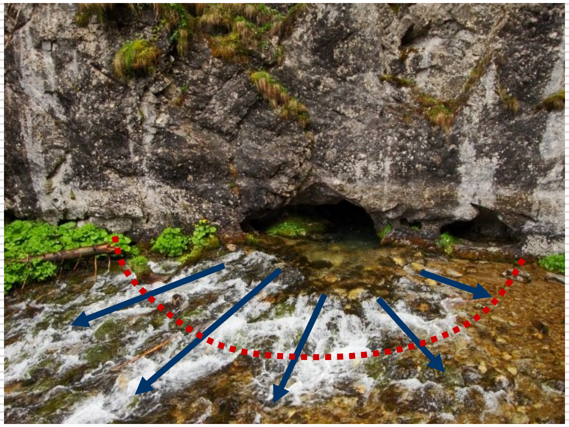
- Gradient funkcji skalarnej to pole wektorowe wskazujące kierunki najszybszych wzrostów wartości danego pola skalarnego w poszczególnych punktach, przy czym moduł (długość) każdej wartości wektorowej jest równy szybkości wzrostu.

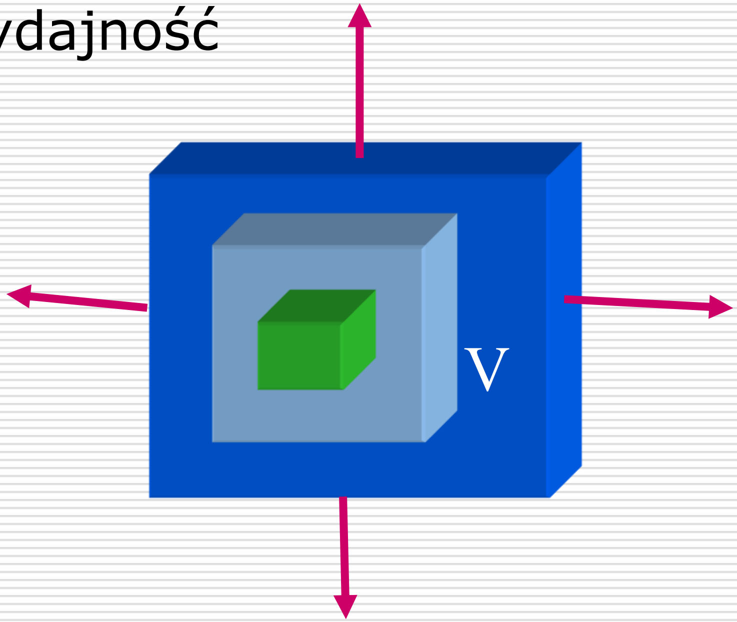
- Dywergencja (źródłowość) pola wektorowego - operator różniczkowy będący miarą natężenia źródła (lub jego ujścia) na jednostkę objętości.

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \circ \vec{\mathbf{E}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{\mathbf{E}} \circ d\,\vec{\mathbf{A}}}{V}$$

jest w granicy nieskończenie małej objętości V, strumieniem wychodzącym ze źródła i określa jego wydajność

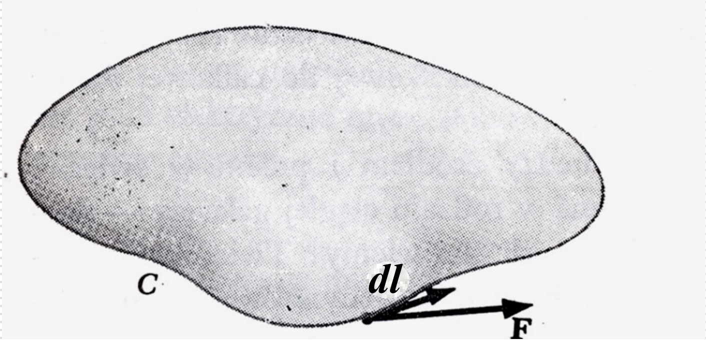




Dywergencja dodatnia ⇨ strumień (masy) wody wypływa z obszaru

- Rotacja lub wirowość – operator różniczkowy działający na pole wektorowe , tworzy pole wektorowe wskazujące wirowanie (gęstość cyrkulacji) pola wyjściowego.

Krążenie (cyrkulacja) pola wektorowego **F** po konturze zamkniętym jest zdefiniowane jako całka krzywoliniowa:



$$\Gamma = \oint_C \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{l}$$

Krzywa C ogranicza pewną powierzchnię zamkniętą rozpiętą na tej krzywej.

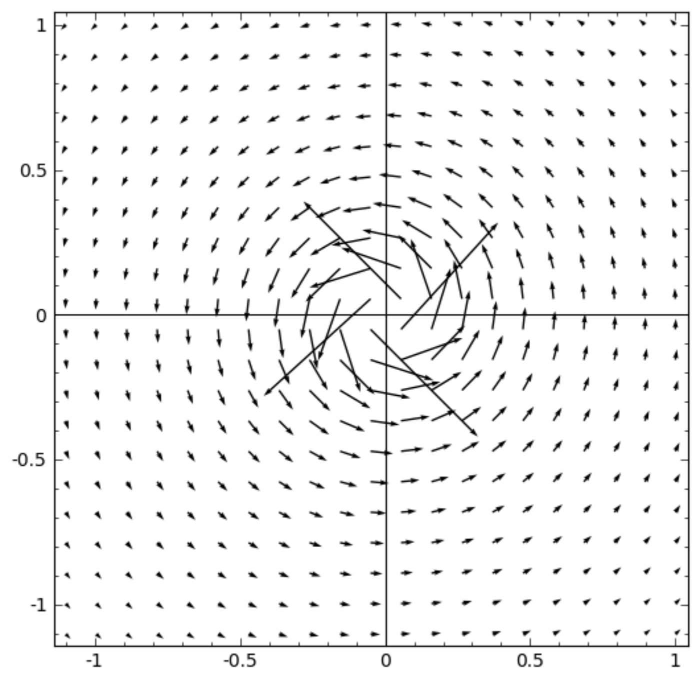
$d\vec{l}$ to element drogi całkowania - ma kierunek styczny do krzywej C w danym punkcie.

Jeżeli **F** jest siłą, to krążenie Γ ma sens fizyczny pracy.

Jeżeli **F** jest siłą zachowawczą to Γ=0.

rotacja wektora ***F***:

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

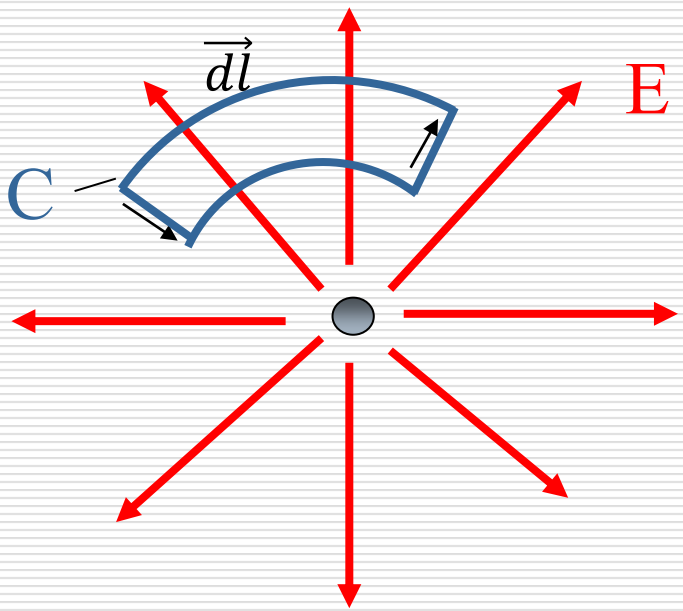


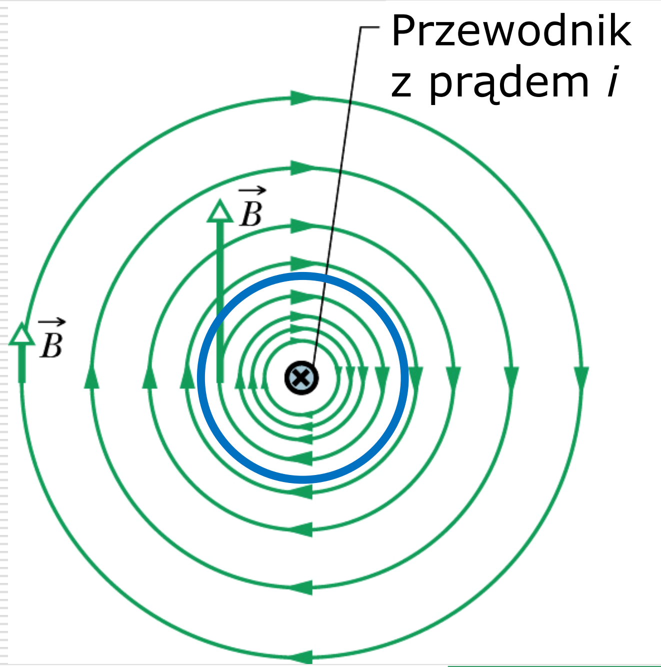
Jeżeli rotacja danego pola wektorowego jest równa zero (wektorem zerowym), to pole to jest bezwirowe.

Pole bezwirowe posiada potencjał (i odwrotnie: pole posiadające potencjał jest polem bezwirowym).

□ Przykład:

Zbadać wirowość pola elektrostatycznego oraz pola magnetycznego przewodnika.

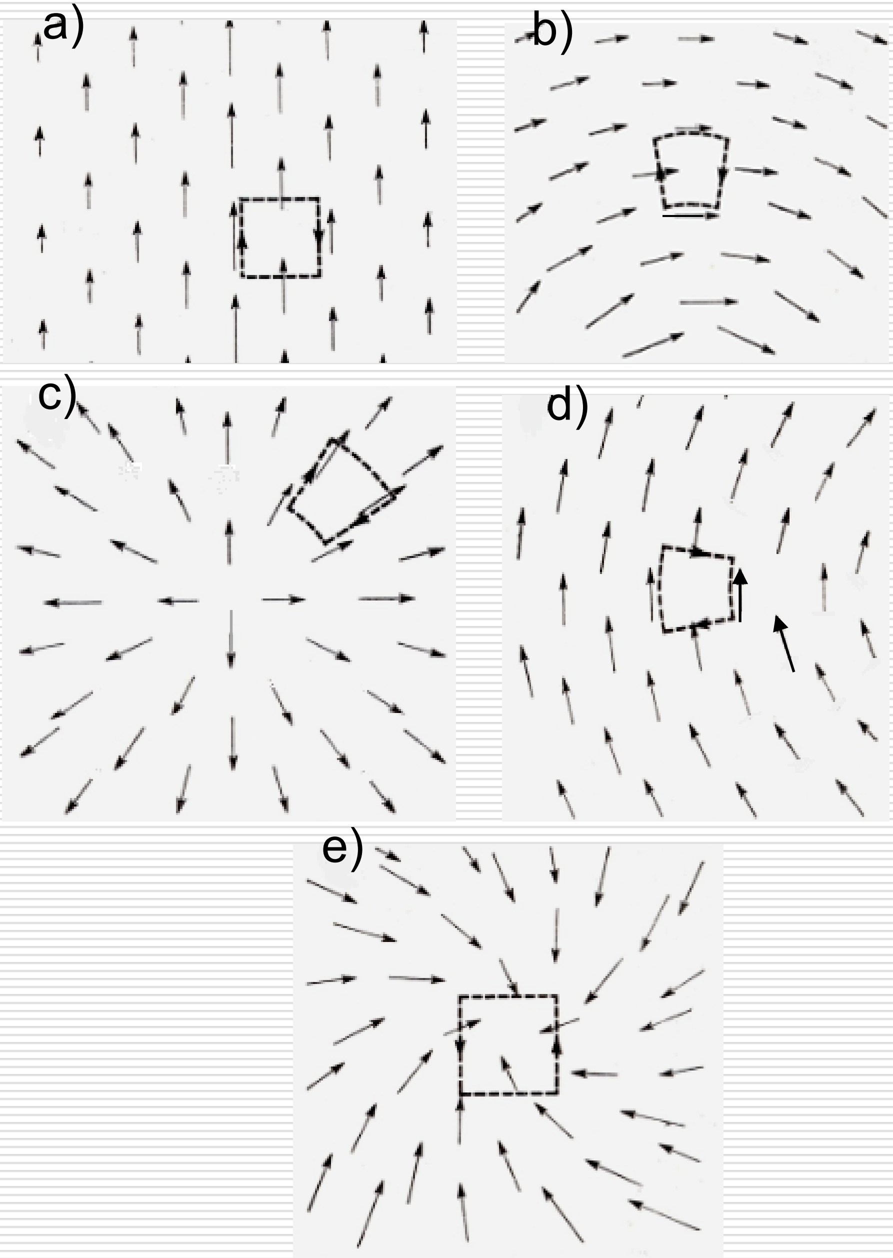




$$\oint_C \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} \neq 0 \qquad \boxed{rot\,\vec{B} \neq 0}$$

Pole magnetyczne jest polem wirowym. To określa prawo Ampère'a.



Zadanie

Trzy z przedstawionych pól wektorowych mają znikającą dywergencję w przedstawionym obszarze.

a), b), d)

Dwa z nich mają znikającą rotację.

b), c)

Proszę ocenić, które z pól mają omawiane własności?

Przykłady z rachunku operatorowego

- Mając zdefiniowane:

- pole skalarne $\Phi(x,y,z)$
- pole wektorowe $\vec{V}(x,y,z)=\hat{i}V_1(x,y,z)+\hat{j}V_2(x,y,z)+\hat{k}V_3(x,y,z)$
- wektory: $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ oraz $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

oblicz:

a) $grad\,\vec{r}^{\,2}$

b) $\vec{\nabla}(\vec{A}\circ\vec{r})$

c) $div\ grad\varphi$

d) $div\ rot\vec{A}$

e) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi)$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

umożliwia zamianę całki powierzchniowej na objętościową (potrójną) i na odwrót

$$\boxed{\oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \oiiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}\, dV}$$

Z prawa Gaussa w postaci całkowej:

$$\boxed{\oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_o}}$$

gdzie $Q_{wew} = \oiiint_V \rho\, dV \Rightarrow \oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = \oiiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_o} dV$

Porównując wyrażenia podcałkowe:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \circ \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}}$$

Prawo Gaussa	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
Postać całkowa	$\oint_S \vec{g} \circ \overrightarrow{dS} = -4\pi G \cdot M$	$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \circ \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
Postać różniczkowa	$\mathrm{div}\vec{g} = \vec{\nabla} \circ \vec{g} = -4\pi G \cdot \rho_m$	$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \circ \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_o}$

Potencjał pola

- Wektor natężenia pola – istnieje zawsze

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_o}$$

- Potencjał (skalar) – istnieje tylko dla pól zachowawczych (potencjalnych)

$$V = \frac{E_p}{q_o}$$

Wielkości charakteryzujące:	oddziaływanie pomiędzy ładunkami punktowymi	pole elektrostatyczne
siła $\vec{\mathbf{F}}$ energia potencjalna E_p	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r}$	
natężenie $\vec{\mathbf{E}}$ potencjał V		$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_o}$ $V = \frac{E_p}{q_o}$

Związek potencjału z natężeniem pola

Dla dowolnej siły zachowawczej, zmiana energii potencjalnej dE_p dana jest wzorem:

$$dE_p = -\underbrace{\vec{F}_C \circ d\vec{l}}_{\text{praca } dW} = -q_0 \vec{E} \circ d\vec{l}$$

Z definicji potencjału:

$$dV = \frac{dE_p}{q_o} \qquad dE_p = q_0 dV \longrightarrow q_0 dV = -q_0 \vec{E} \circ d\vec{l}$$

więc $$dV = -\vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} \qquad \vec{E} = -\frac{\overrightarrow{dV}}{dl} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}}$$

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \circ d\,\vec{\mathbf{l}}$$ po scałkowaniu:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \circ d\,\vec{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = V_b - V_a = -\frac{W}{q_o}$$

Różnica potencjałów ΔV między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy **W** wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego.

Różnicę potencjałów nazywamy napięciem U=ΔV

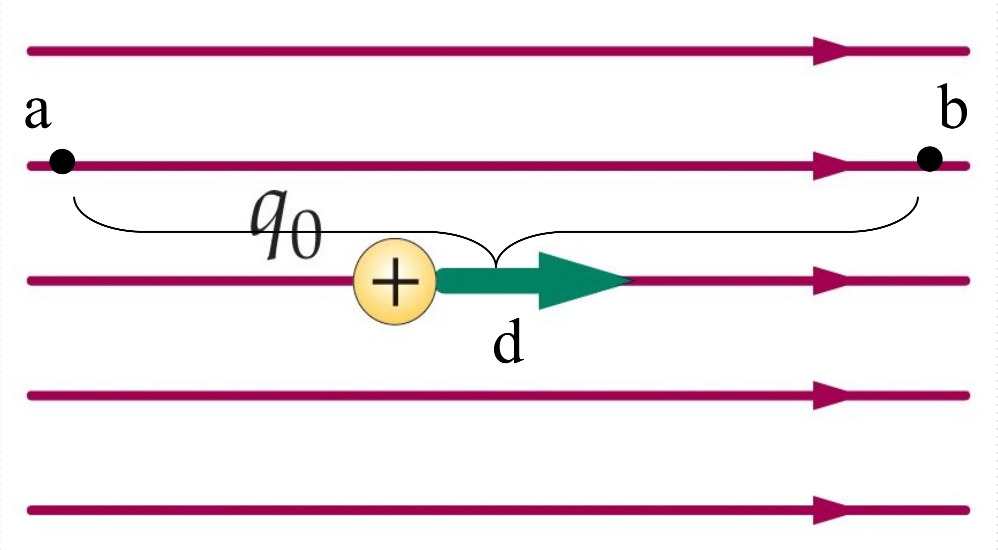
Jednostki: $V = \frac{E_p}{q_o} \Rightarrow [U] = 1V = \frac{J}{C}$

$$E = -\frac{dV}{dl} \Rightarrow [E] = \frac{V}{m}$$

Potencjał pola jednorodnego

$V_a > V_b$

Potencjał wyższy V_a



Potencjał niższy V_b

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\int_a^b E dl = -E \int_a^b dl = -E(b-a) = -Ed$$

Potencjał pola ładunku punktowego

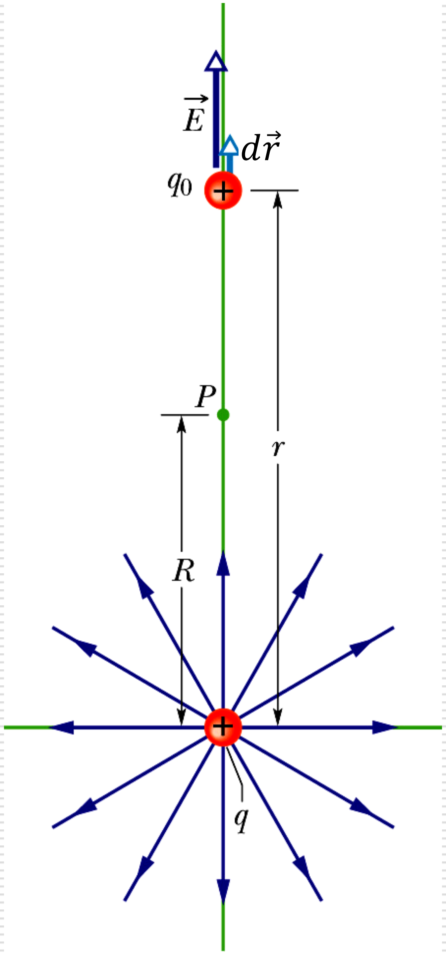
Przesuwamy ładunek próbny q_o z punktu P do nieskończoności

$$\vec{E} = -\frac{\overrightarrow{dV}}{dr} \Rightarrow dV = -\vec{E}\circ\overrightarrow{dr} \qquad \vec{E}\circ d\vec{r} = E\,dr\,coso^{0}$$

$$V_\infty - V_P = -\int_R^\infty \vec{\boldsymbol{E}}\circ\overrightarrow{\boldsymbol{dr}} = -\int_R^\infty E dr$$

Przyjmujemy $V_\infty = 0$ i $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$

zatem $V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ ogólnie $\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{q}{r}}$

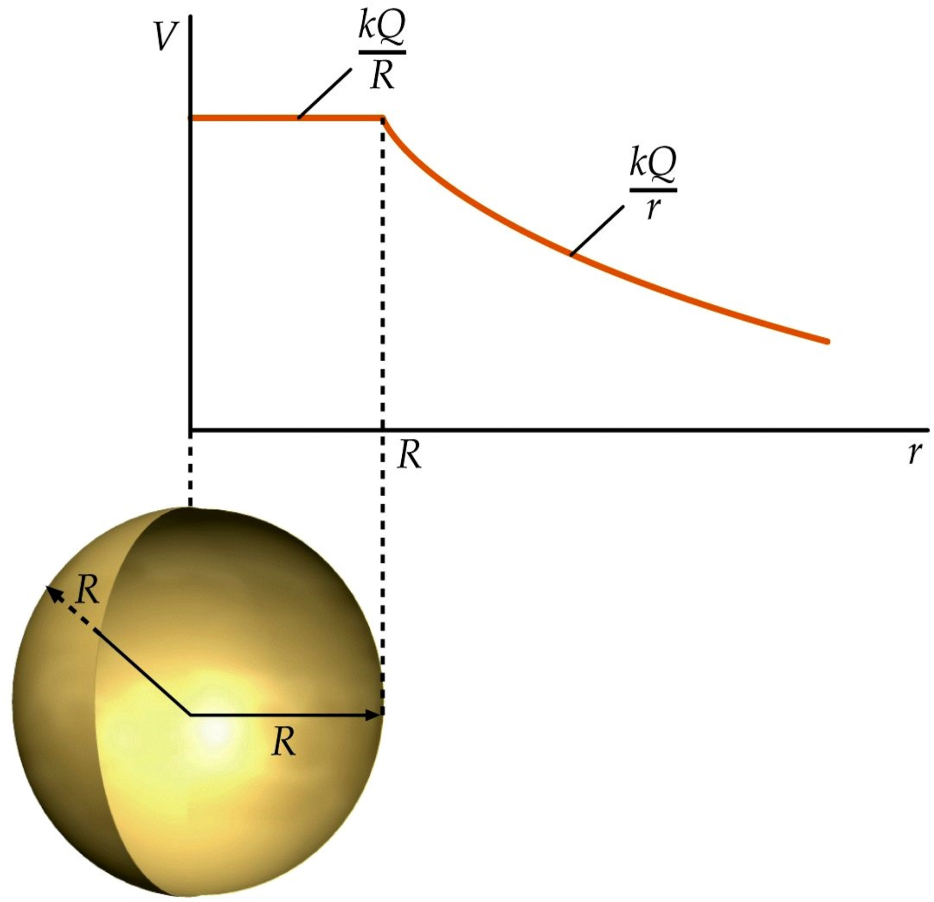


Potencjał ciągłego rozkładu ładunków

Dla naładowanej ładunkiem powierzchniowym Q powłoki sferycznej, gdy r < R jest: E = 0, czyli potencjał V jest wielkością stałą, niezależną od *r*.

Dla r>R, V zanika z odległością r jak 1/r

Zadanie: Pokazać, że potencjał dla powłoki sferycznej wykazuje taką zależność V(r) jak na powyższym wykresie



PRZYKŁAD:

Uproszczony model atomu zakłada, punktowe jądro o ładunku +*Q*, które jest otoczone w odległości *R* powłoką elektronową będąca sferą naładowaną ładunkiem –*Q*.

A) Narysuj zależność *E(r)* i uzasadnij obliczeniami;

B) Oblicz rozkład potencjału w funkcji odległości od jądra atomu.

C) Rozważyć zagadnienie, gdy jądro nie traktujemy jako punktowe, tylko jest kulą o promieniu R_j naładowana jednorodnie dodatnim ładunkiem Q.

Odp. c) Dla $r<R_j$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R_j^3}$

Potencjał dipola

Potencjał wytwarzany przez dipol w dowolnym punkcie P: $r \gg l$

$$V = V_1 + V_2 = k\frac{Q}{r} + k\frac{-Q}{r+\Delta r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)}$$

Zakładamy: $\Delta r \approx l \cdot cos\theta$

$r \gg \Delta r \;\Rightarrow \Delta r$ w mianowniku do zaniedbania

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l \cdot cos\theta}{r^2}$$

Moment dipolowy: $Q \cdot l = p$

stąd $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p \cdot cos\theta}{r^2}$$

Podsumowanie

- Elektrostatyka opisuje pola statyczne utworzone przez ładunki elektryczne w spoczynku.
- Pole elektrostatyczne jest zachowawcze (potencjalne). Pole to jest charakteryzowane przez wektor natężenia pola i potencjał.
- Wartość natężenia pola pochodzącego od konkretnych rozkładów ładunku obliczamy bądź z zasady superpozycji i prawa Coulomba bądź z prawa Gaussa.
- Prawo Gaussa w postaci całkowej lub różniczkowej stanowi jedno z równań Maxwella.

Wzory różniczkowe podsumowanie

Funkcja skalarna: $\Phi(x, y, z)$

Funkcja wektorowa: $\vec{W}(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}$$

$$\overrightarrow{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi \qquad divW = \vec{\nabla} \circ \vec{W} \qquad rotW = \vec{\nabla} \times \vec{W}$$

Dla pola elektrostatycznego:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \qquad \text{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \overrightarrow{rotE} = 0$$