

Wykład 13: Pojemność elektryczna

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Pojemność

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

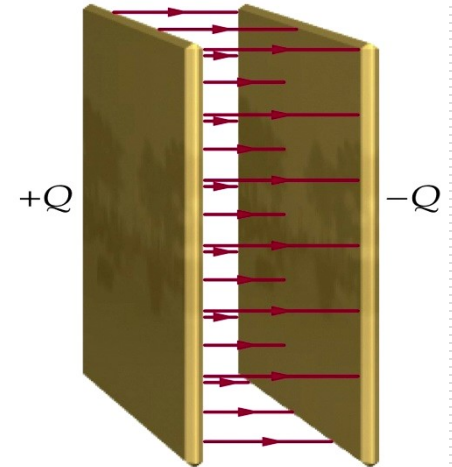
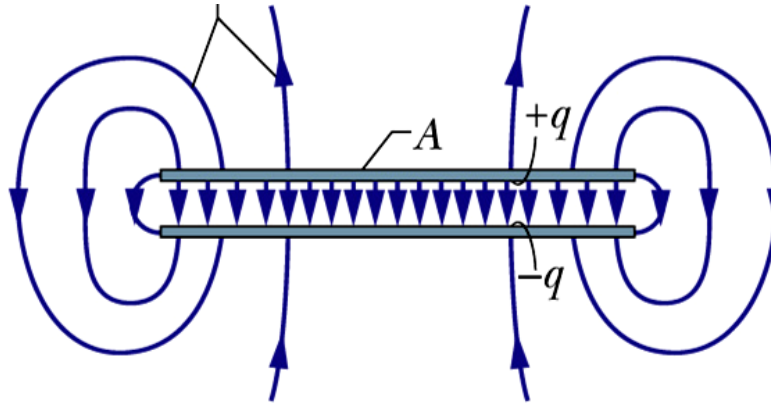
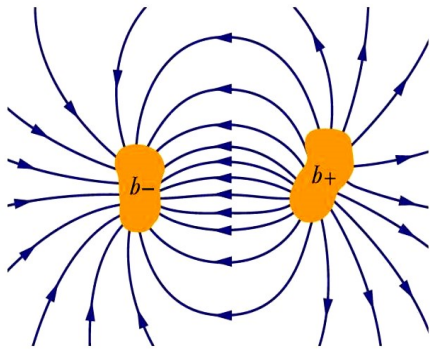
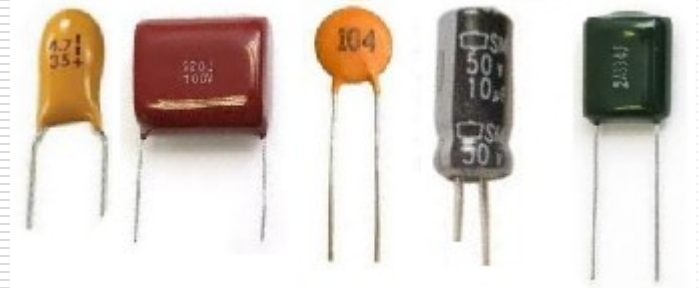
- Jednostką pojemności jest 1F (farad). $\left[\frac{C}{V} = F \right]$
W praktyce używamy μF , pF, nF
- Analogia między kondensatorem mającym ładunek q i sztywnym zbiornikiem o objętości V , zawierającym n moli gazu doskonałego:

$$n = \frac{V}{RT} p$$

$$q = C \Delta V$$

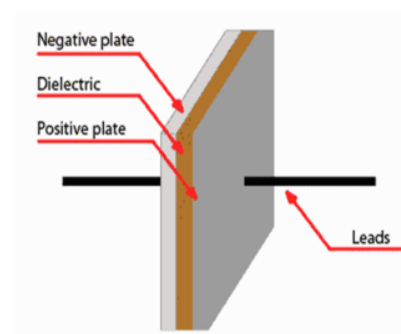
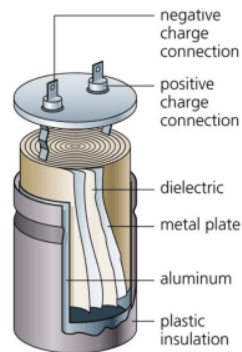
Przy ustalonej temperaturze T , pojemność kondensatora C pełni podobną funkcję jak objętość zbiornika.

Kondensator

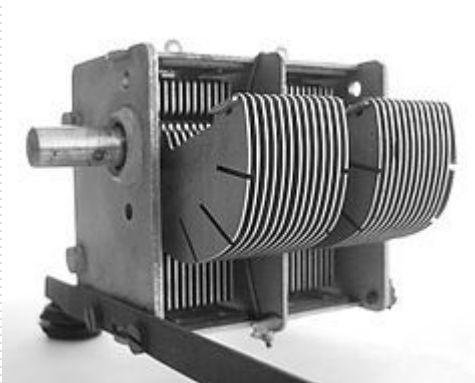


Capacitor Construction

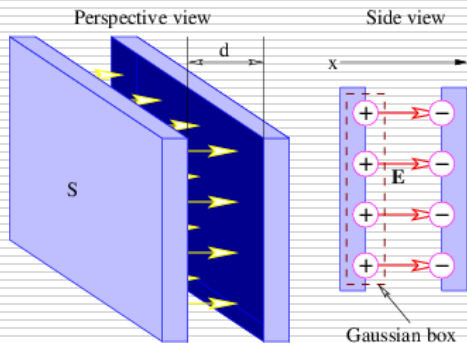
 www.yantraeducation.com



www.yantraeducation.com



Od czego zależy pojemność kondensatora ?



Natężenie pola od jednej okładki: $E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

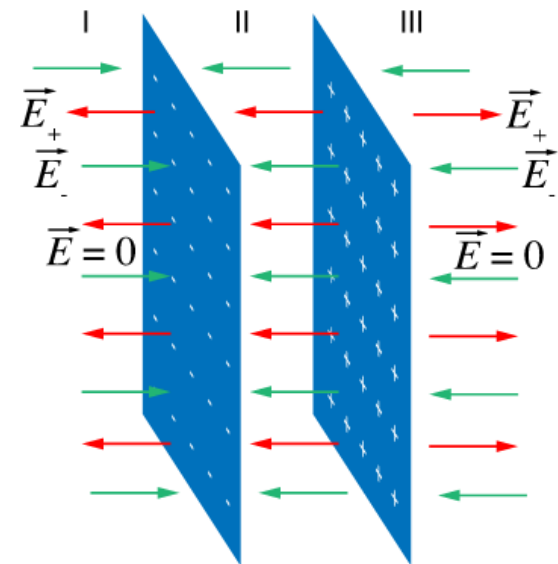
Pole między okładkami:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{q}{S} \quad \text{oraz} \quad E = \frac{U}{d} \quad \text{stąd}$$

$$U = E \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

$$C = \frac{q}{U} = \boxed{\epsilon_0 \frac{S}{d}}$$



interpretacja fizyczna?

□ Energia kondensatora, gęstość energii

Elementarna praca przy przeniesieniu dq między okładkami:

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

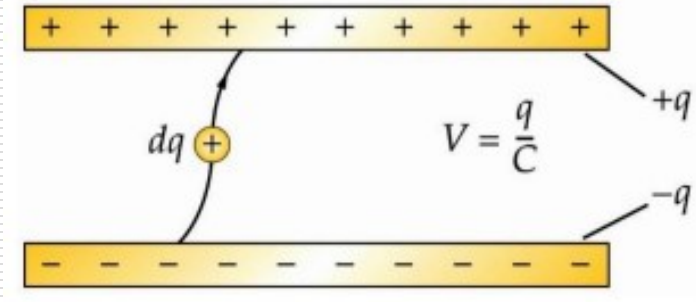
$$W = \int dW = \int \frac{q}{C} dq \Rightarrow \frac{q^2}{2C} = W_n \quad \Rightarrow \frac{qU}{2} = W_n$$

$$W_n = \frac{qEd}{2} = \frac{\varepsilon_0 S d E^2}{2}$$

Energia naładowania = energii rozładowania kondensatora

Objętość kondensatora $V_{obj} = S \cdot d$

$$\text{Gęstość energii} \Rightarrow \frac{W_n}{V_{obj}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \left[\frac{J}{m^3} \right]$$



Przykłady

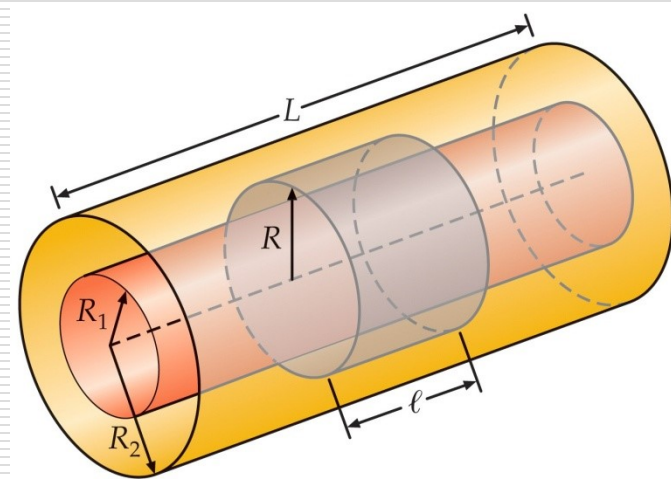
- ❑ Jaka musiałaby być powierzchnia okładki kondensatora płaskiego, aby, przy odległości okładek $d=1\text{ mm}$, uzyskać pojemność $C=1\text{ F}$?

$$S=113\text{ mln m}^2$$

- ❑ Udowodnić, że pojemność kondensatora cylindrycznego wyraża się wzorem

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

- ❑ Kondensator kulisty, którego okładki są współśrodkowymi sferami naładowano ładunkiem Q . Jeżeli nastąpi przesunięcie wewnętrznej sfery (przy chwiejnej równowadze mogą zadziałać siły elektryczne) – zaburzenie współśrodkowości, to czy pojemność kondensatora wzrośnie czy zmaleje ?

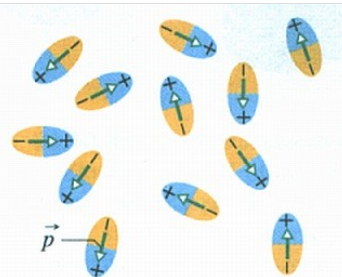
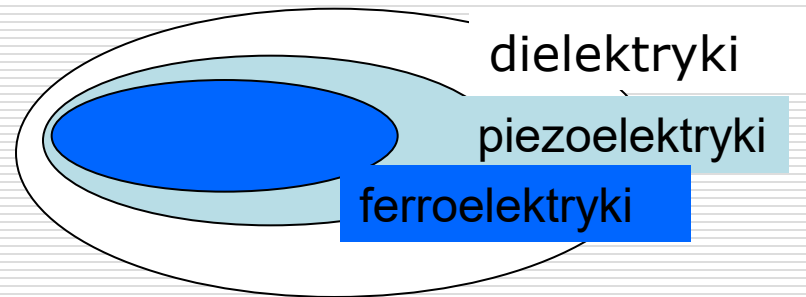


□ Powłoka sferycznego balonika została naładowana z jednorodną gęstością powierzchniową ładunku δ . Do wnętrza tego balonika wprowadzono punktowy pyłek o ładunku q – tego samego znaku co powłoka. Czy spowoduje to zmianę średnicy balonu ? Oto rozumowania dwóch studentów:

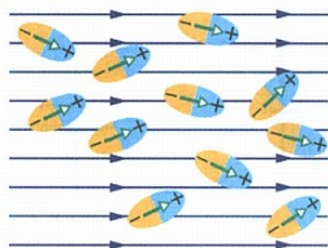
- Jednoimienne ładunki się odpychają, a zatem dowolny element powłoki będzie odpychany od ładunku q co doprowadzi do wzrostu średnicy balonu.
- Równomiernie naładowana powłoka sferyczna nie wytwarza w swoim wnętrzu pola, co oznacza brak oddziaływania pomiędzy powłoką i ładunkiem q . A zatem średnica balonu się nie zmieni się.

Który student ma rację?

Dielektryki



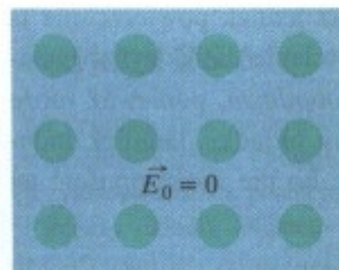
a)



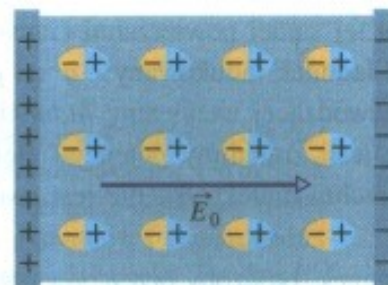
b)

Rys. 26.12. a) Cząsteczki obdarzone elektrycznym momentem dipolowym przy braku zewnętrznego pola elektrycznego mają przypadkowe ustawienia. b) Przyłożenie pola elektrycznego prowadzi do częściowego uporządkowania dipoli. Całkowitemu uporządkowaniu przeszkadza ruch termiczny

Dielektryki – ładunki nie mogą się swobodnie przemieszczać ale możliwe są przesunięcia ładunków w skali mikroskopowej.



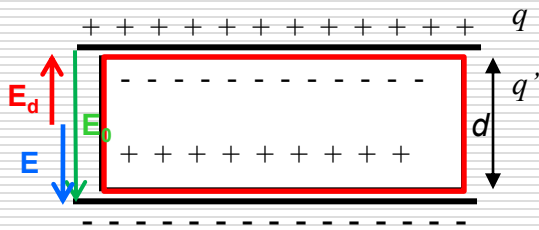
a)



b)

Rys. 26.13. a) Płyta z niepolarnego dielektryka. Koła przedstawiają elektrycznie obojętne atomy w płycie. b) Przyłożenie pola elektrycznego przez naładowanie okładek kondensatora; pole częściowo rozciąga atomy, rozsuwając środki dodatniego i ujemnego ładunku. c) Rozsuniecie wytwarza ładunki powierzchniowe na ścianach płyty. Ładunki te wytwarzają pole o natężeniu $\vec{E}'$, które jest skierowane przeciwnie do natężenia przyłożonego pola $\vec{E}_0$. Wypadkowe natężenie pola $\vec{E}$ wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń $\vec{E}_0$ i $\vec{E}'$) ma ten sam kierunek, jak wektor $\vec{E}_0$, ale mniejszą wartość

HRW t.3



q – ładunek swobodny o gęstości $\sigma = \frac{q}{S}$
 q' – indukowany ładunek polaryzacyjny

o gęstości $\sigma_d = \frac{q'}{S}$

bez dielektryka (V_0)

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

z dielektrykiem (V)

$$E = \frac{V}{d} = E_0 - E_d$$

gdzie $E_d = \frac{\sigma_d}{\epsilon_0}$

$$V = \frac{V_0}{\epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

gdzie

$$\epsilon_r = \frac{C_{diel}}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

więc $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$

ϵ_r - względna przenikalność elektryczna

ϵ - przenikalność ośrodka $\left[\frac{F}{m}\right]$

stąd $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_d}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_d = \sigma - \frac{\sigma}{\epsilon_r}$

ostatecznie

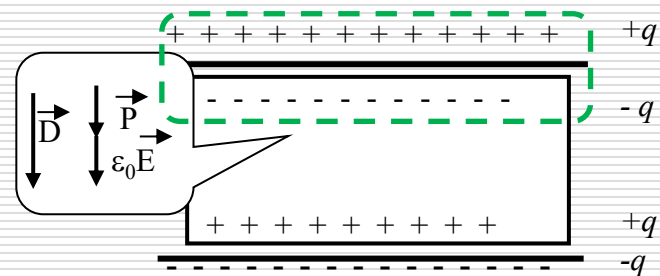
$$q' = q \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}$$

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

natomiast

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

Płytką dielektryka ma *moment dipolowy* $\vec{p}$ o wartości $q' \cdot d$



Dla każdego dielektryka można zdefiniować tzw. *wektor polaryzacji*:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{S \cdot d} \quad P = \frac{q' \cdot d}{S \cdot d} = \frac{q'}{S} = \sigma_d$$

zwrot wektora: od ładunku ujemnego do dodatniego ładunku indukowanego - jak w każdym dipolu.

Aby powiązać wektory $\vec{E}$ oraz $\vec{P}$ wprowadzamy *wektor indukcji* $\vec{D}$

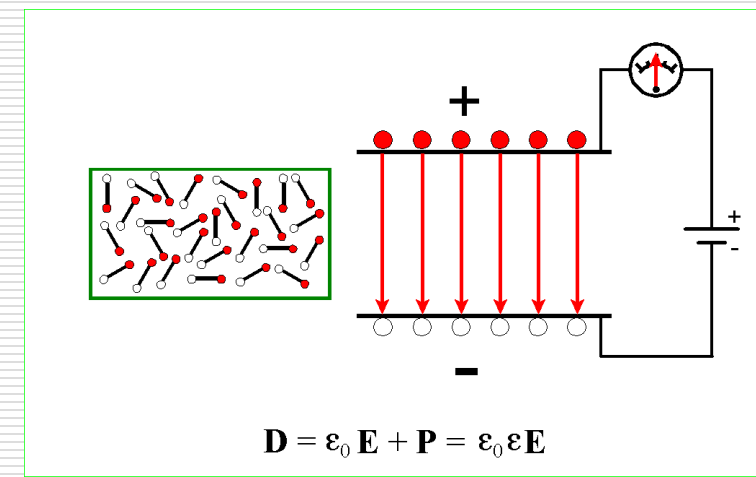
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

A więc

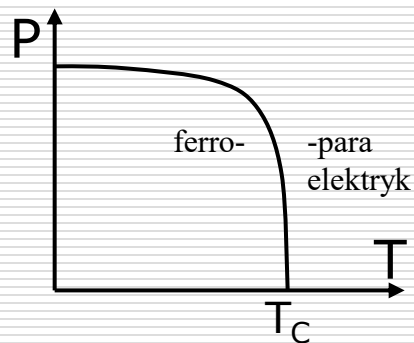
$\vec{P}$ - łączy ładunki polaryzacyjne

$\epsilon_0 \vec{E}$ - dotyczy wszystkich ładunków

$\vec{D}$ - łączy ładunki swobodne (jest taki sam dla próżni i dielektryka)



Zdolność polaryzacji dielektryka pod wpływem pola elektrycznego określa podatność dielektryczna χ :



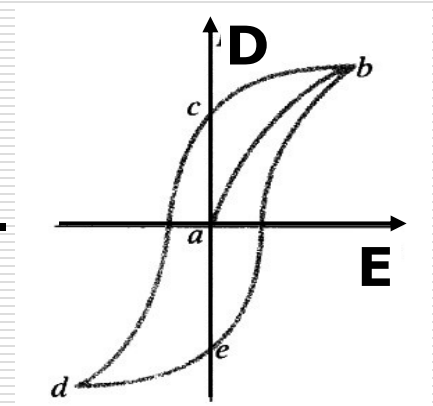
$$\chi = \frac{A}{T - T_C}$$

gdzie A – stała Curie-Weissa.

Dla **ferroelektryka** → pętla histerezy

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\chi = \epsilon_d - 1$$



Przykłady:

- Po naładowaniu płaskiego kondensatora zawierającego dielektryk, odłączono go od źródła, a następnie wysunięto dielektryk. Określ i uzasadnij jak zmieni się:
 - Pojemność kondensatora ■ jego ładunek
 - Natężenie pola oraz ■ napięcie między okładkami
 - Energia kondensatora

- Do próżniowego, płaskiego kondensatora dołączonego do źródła napięcia wsunięto dielektryk. Jak wówczas zmieniają się powyższe parametry kondensatora?

Połączenia kondensatorów

□ Równoległe

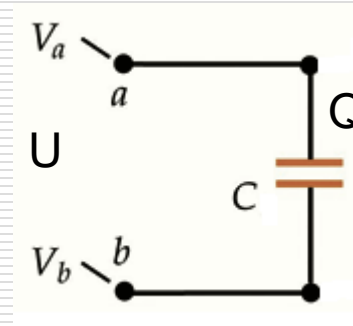
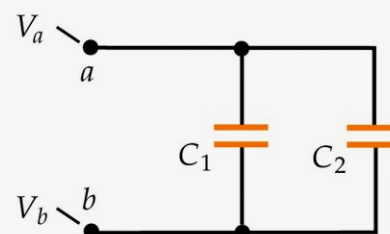
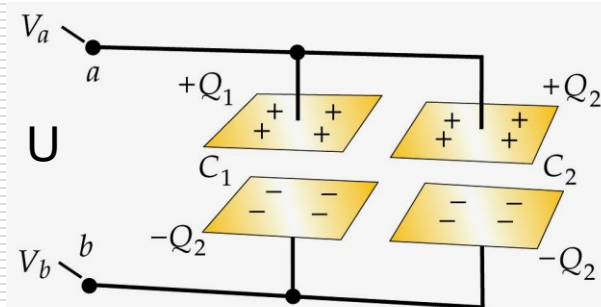
$$V_a - V_b = U_1 = U_2 = U$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C} = U$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = CU$$

Pojemność kondensatora
zastępczego

$$C = C_1 + C_2$$

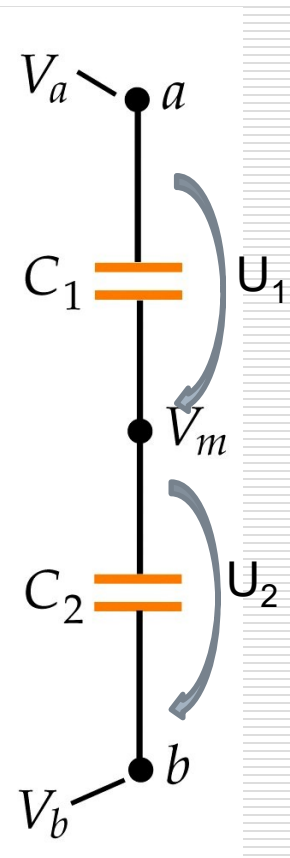
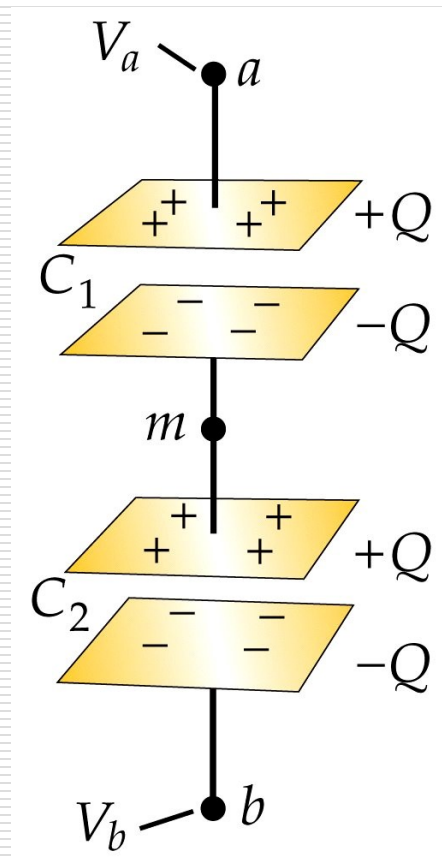
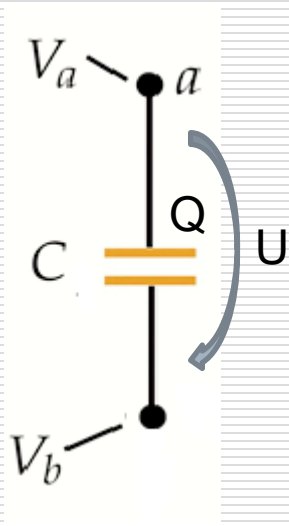


□ Szeregowe

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

Pojemność kondensatora zastępczego

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



Zadanie:

Dwa kondensatory o pojemności C każdy – jeden próżniowy, a drugi zawierający dielektryk o stałej ε_r połączono równolegle i naładowano do napięcia U . Następnie, po odłączeniu od źródła napięcia, z jednego kondensatora wyjęto dielektryk i wprowadzono do kondensatora próżniowego. Obliczyć wykonaną przy tym pracę.

Odp.
$$W_x = -CU^2 \frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{1 + \varepsilon_r^2}$$

Podsumowanie

- ❑ Kondensator jest urządzeniem, w którym magazynowana jest potencjalna energia elektrostatyczna.
- ❑ Gęstość energii zmagazynowanej jest proporcjonalna do kwadratu pola E .
- ❑ Pojemność kondensatora zależy od jego wymiarów geometrycznych i wypełnienia.
- ❑ Podstawowe łączenia kondensatorów:

➤ szeregowo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

➤ równolegle

$$C = C_1 + C_2$$