

Wykład 14 cz.2:

Siła elektromotoryczna i obwody prądu stałego

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Siła elektromotoryczna (SEM) i opór wewnętrzny

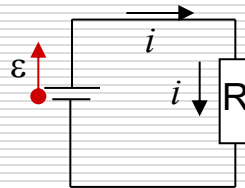
Elektrony po opuszczeniu źródła z bieguna $-$ wracają przez żarówkę do bieguna $+$.

Aby utrzymać różnicę potencjałów między biegunami, źródło *SEM* działa jak pompa i wykonuje pracę nad nośnikami ładunku (elektronami) – przemieszczając je z bieguna $-$ źródła, do bieguna $+$ zwiększając ich energię potencjalną.

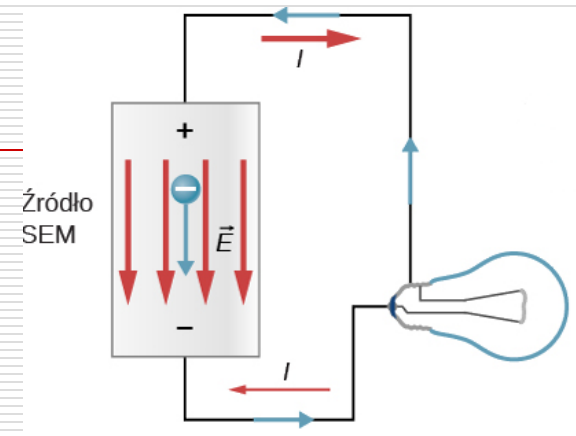
Praca na przeniesienie ładunków jest wykonywana dzięki energii z reakcji chemicznych zachodzących w źródle.

praca źródła:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$



$$dW = \varepsilon \cdot dq = \varepsilon \cdot idt \quad \text{praca baterii} = \text{energii termicznej w } R = i^2 R dt$$



Elektron zderzając się, traci nadwyżkę energii jaką uzyskał od pola **E**. Energia kinetyczna elektronu jest stała, więc stracona energia zamienia się w ciepło.

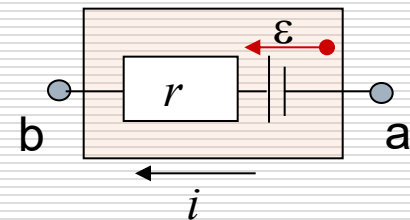
$$\varepsilon \cdot idt = i^2 R dt \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = i \cdot R$$

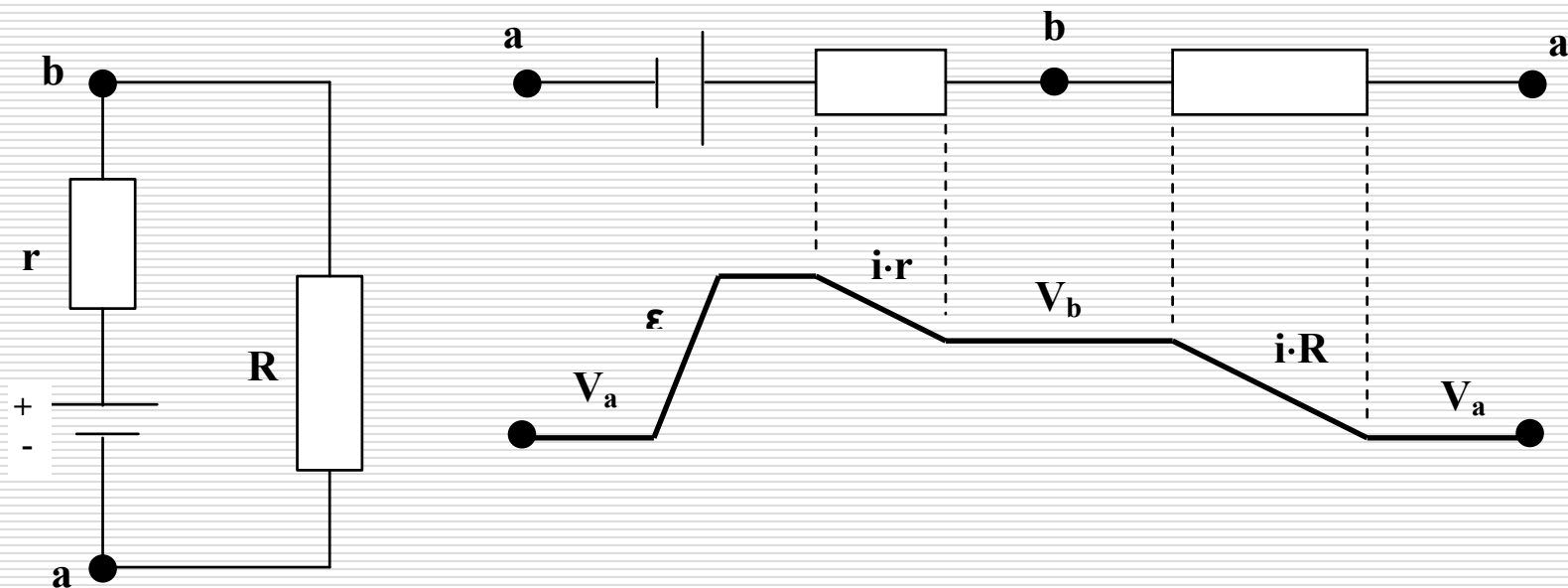
SEM ε jest energią przekazaną przez baterię, przypadającą na jednostkę poruszającego się ładunku.

Rozpatrując rzeczywistą baterię, o oporze wewnętrznym r :

Napięcie na zaciskach źródła $U_{ab} = \varepsilon - ir$

Moc źródła: $P = \frac{dW}{dt} = iU_{ab}$





r – opór wewnętrzny źródła

$$V_a + \mathcal{E} - i \cdot r - i \cdot R = V_a$$

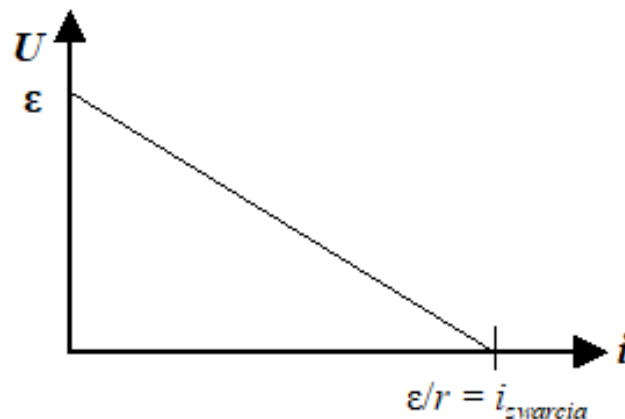
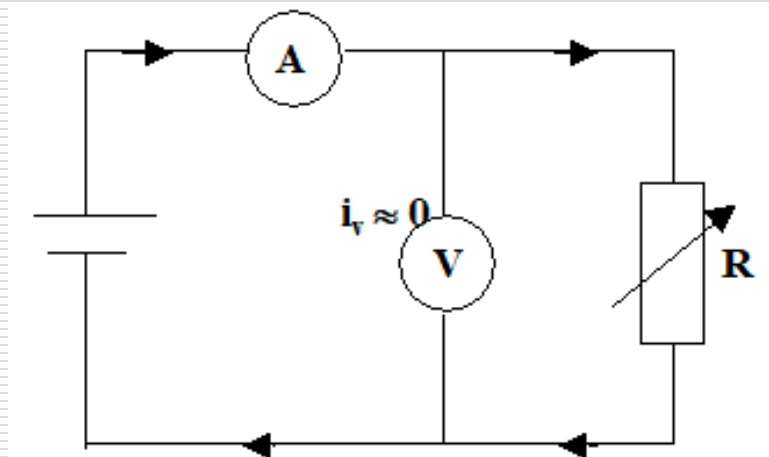
R – opór obciążenia

$$\mathcal{E} = i(r + R) \quad \Rightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

dla źródła doskonałego mamy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

□ Wyznaczanie oporu wewnętrznego ogniwa (źródła SEM).



Założenia: $R_V \gg R$ wówczas $i_V \approx 0$ oraz $R_A \approx 0$

Czyli $U = i \cdot R$ $\varepsilon = i \cdot r + U \Rightarrow U = \varepsilon - i r$

$$y = b - x a$$

lub
$$r = \frac{\varepsilon - iR}{i}$$

□ Moc użyteczna źródła

Moc obciążenia $P_{cał} = P_R + P_r$

$$P_R = i^2 R$$

skoro

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

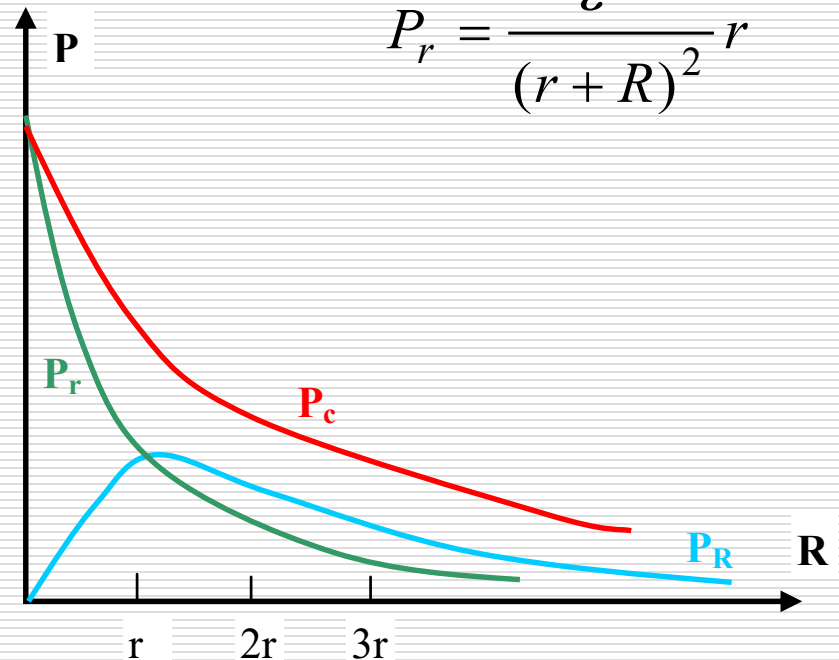
$$P_r = i^2 r$$

więc
$$P_R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R$$

$$P_r = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} r$$

Moc całkowita

$$P_{cał} = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} (R + r) = \frac{\varepsilon^2}{R + r}$$



- Dla jakiej wartości oporu zewnętrznego, moc użyteczna osiąga wartość maksymalną?

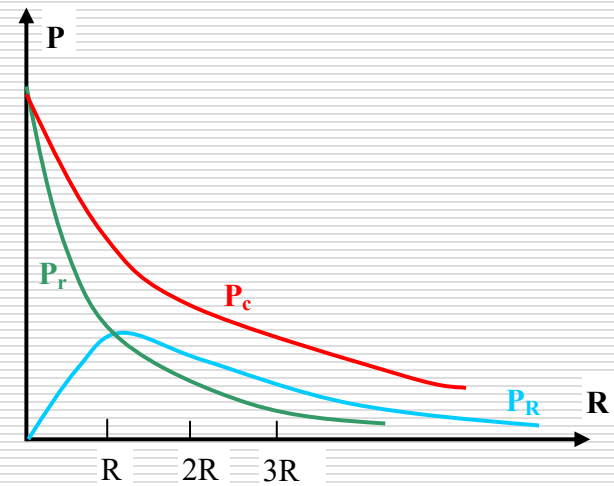
$$P_R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R$$

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{\varepsilon^2 (r + R)^2 - \varepsilon^2 R \cdot 2(r + R)}{(r + R)^4}$$

$$\varepsilon^2 r + \varepsilon^2 R - 2\varepsilon^2 R = 0 \quad \Rightarrow \quad r = R$$

Sprawność ogniwa

$$\eta = \frac{P_R}{P_{cał}} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{4R}}{\frac{\varepsilon^2}{2R}} = 0,5$$



Przykład

- Akumulator o SEM równej 12 V ma opór wewnętrzny 0,1 Ω .
- A. Oblicz różnicę potencjałów między biegunami akumulatora obciążonego oporem 10 Ω i natężenie prądu w obwodzie.
- B. Jakie będą te wartości jeżeli zmniejszymy obciążenie do wartości 0,5 Ω ?
- C. Jak szybko rozpraszana jest energia na tym obciążeniu?
- D. Oblicz natężenie prądu, różnicę potencjałów między biegunami akumulatora i moc traconą na tym obciążeniu, jeżeli na skutek wielokrotnego ładowania opór wewnętrzny akumulatora wzrósł do 0,5 Ω .

Odpowiedzi:

A. $i = 1,188 \text{ A}$, $U_a = 11,9 \text{ V}$ B. $i = 20 \text{ A}$, $U_a = 10 \text{ V}$ C. $P = U \cdot i = 200 \text{ W}$

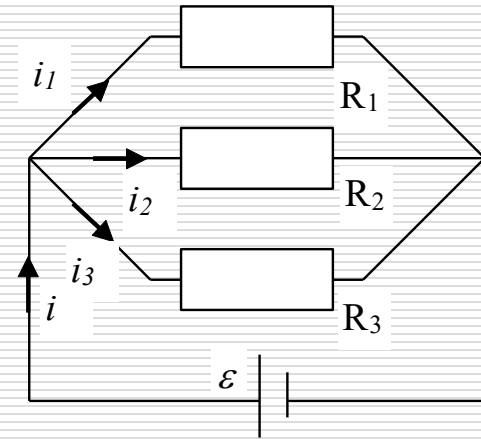
D. $i = 12 \text{ A}$, $U_a = 6 \text{ V}$, $P = 72 \text{ W}$

Prawa Kirchhoffa (1824-1887)

□ Pierwsze prawo

$$\sum_i i_i^{in} = \sum_i i_i^{out}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$



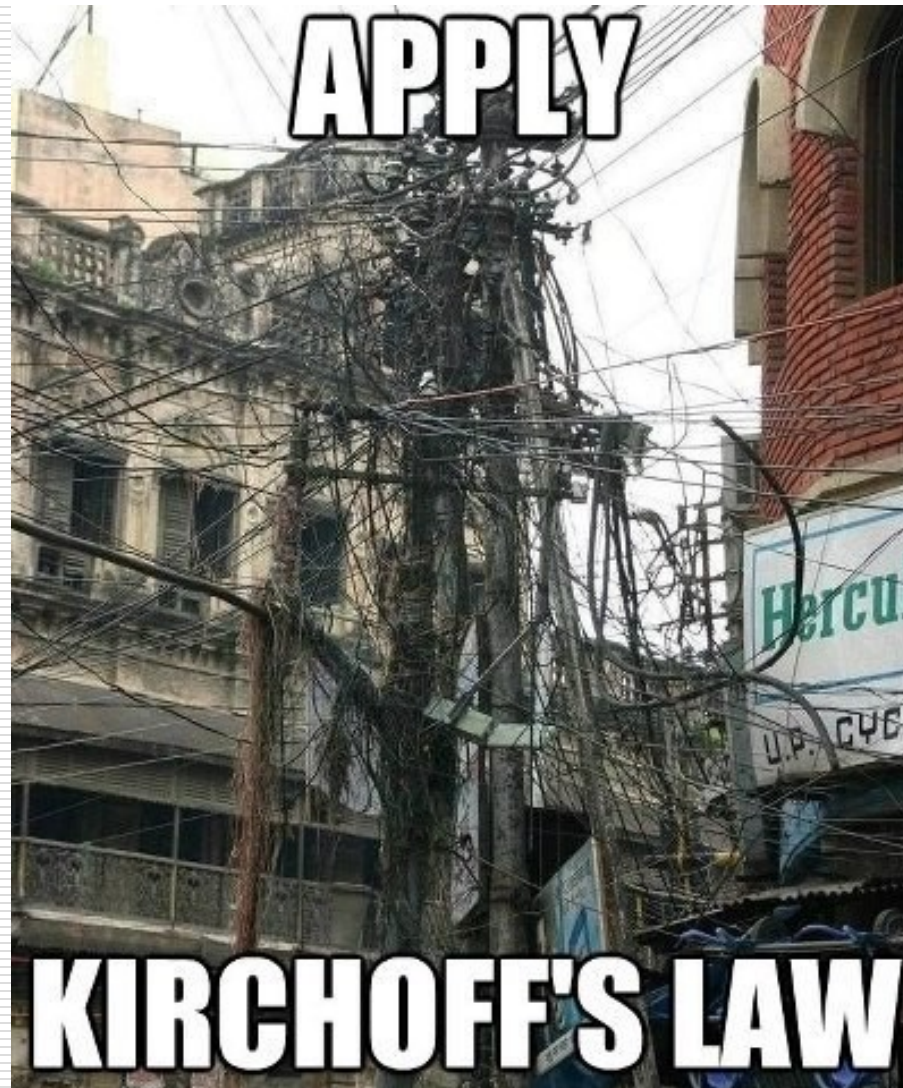
□ Drugie prawo

$$\sum_i i_i R_i = \sum_i \varepsilon_i$$

$$i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$$

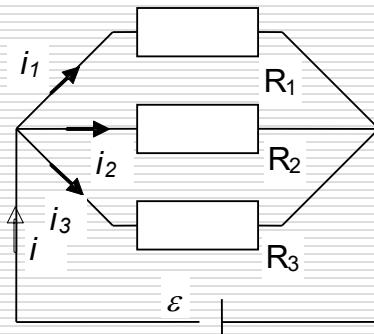
$$\Rightarrow i_1 R_1 = i_2 R_2$$

□ Zadanie



Opór zastępczy

□ połączenie równoległe

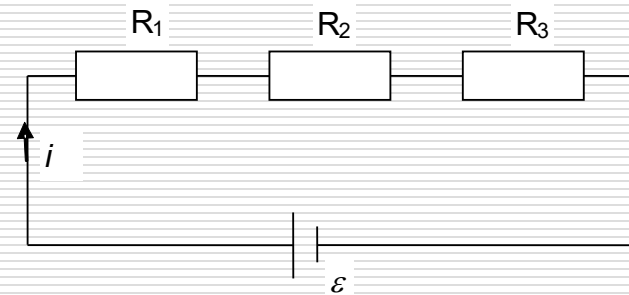


Z I prawa Kirchhoffa:

$$\frac{\varepsilon}{R_z} = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

□ połączenie szeregowe



Z II prawa Kirchhoffa:

$$\varepsilon = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

$$iR_z = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\boxed{R_z = R_1 + R_2 + R_3}$$

Przykłady

Odpowiedzi:

1 a. $I = 2 \text{ A}$

1 b. $R_1 = 1 \Omega$

2 a. $R_x = 2 \Omega$

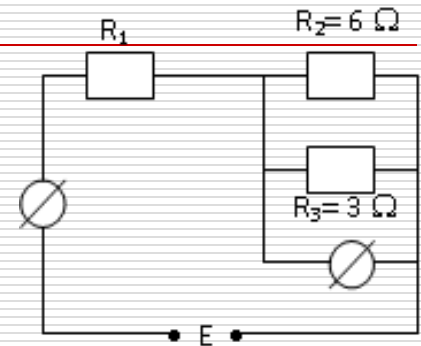
2 b. *bez zmian 400 mV*

3. $P_{PL} = 4800 \text{ W} !!$

1. Woltomierz wskazuje napięcie $U_V = 4 \text{ V}$.

a) Oblicz wskazania amperomierza.

b) Oblicz wartość R_1 , jeżeli napięcie $E = 6 \text{ V}$.



2. Rzeczywisty amperomierz ma opór wewnętrzny 4Ω i zakres 100 mA .

a) Co należy zrobić aby trzykrotnie rozszerzyć zakres miernika ?

b) Jak zmieni się po modyfikacji jego zakres w roli woltomierza ?

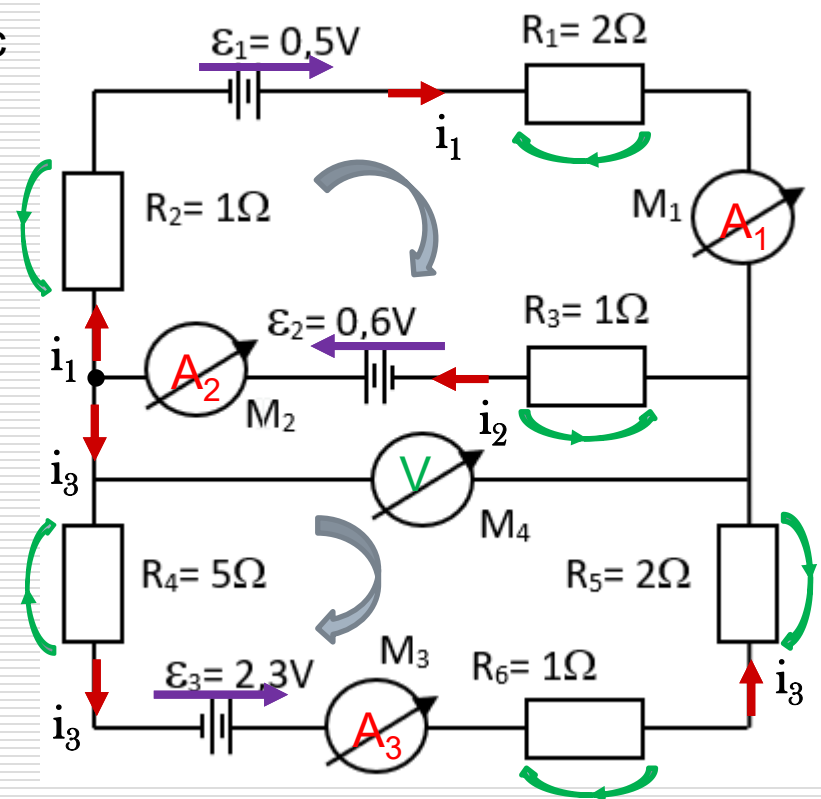
3. Czajnik elektryczny o mocy 1200 W dostosowany do napięcia 110 V kupiony w USA, zawieziono do Europy gdzie stosuje się napięcie 220 V . Jaka będzie moc tego czajnika włączonego do gniazdka w Europie?

4. Zaznacz spadki napięć i kierunki prądu oraz oblicz wskazania mierników oraz moc traconą w obwodzie.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = i_1(R_1 + R_2) + i_2 R_3$$

$$i_2 = i_1 + i_3$$

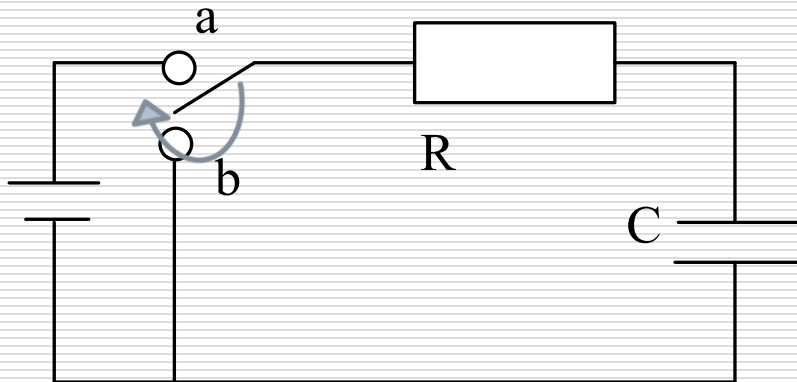
$$i_3(R_4 + R_5 + R_6) + i_2 R_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$



Stąd: $i_1 = 0,2 \text{ A}$; $i_2 = 0,5 \text{ A}$; $i_3 = 0,3 \text{ A}$;

$$U = \varepsilon_2 - i_2 \cdot R_3 = 0,1 \text{ V} \dots\dots\dots$$

Obwód RC – zasada zachowania energii



Przełącznik znajduje się w pozycji **a**)
- ładowanie kondensatora C.

Zmiana energii źródła
dającego ładunek dq $dW_{zr} = \varepsilon \cdot dq$

Elementarne ciepło
wydzielane na R $dW_R = i^2 R \cdot dt$

Zmiana energii
kondensatora $dW_C = d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$

$$\varepsilon dq = \underbrace{i^2 R dt}_{\text{energia cieplna}} + d\left(\underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{\text{energia zgromadzona na kondensatorze}}\right)$$

$$\varepsilon dq = i^2 R dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) \Rightarrow \varepsilon dq = i^2 R dt + \frac{q}{C} dq \mid : dt$$

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} = i^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon \cdot i = i^2 R + \frac{q}{C} i \Rightarrow \boxed{\varepsilon = iR + \frac{q}{C}}$$

Jest to II prawo Kirchhoffa:

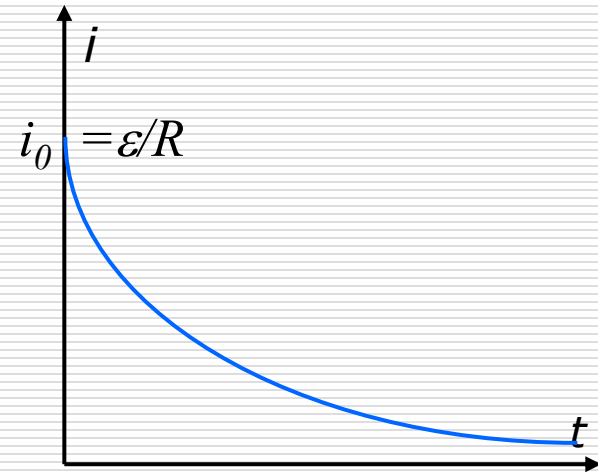
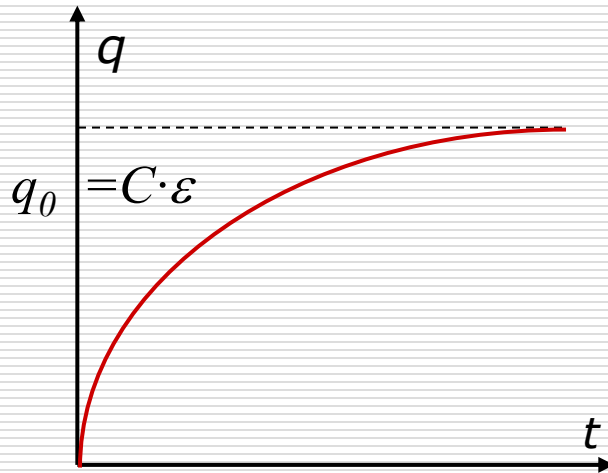
$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \varepsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

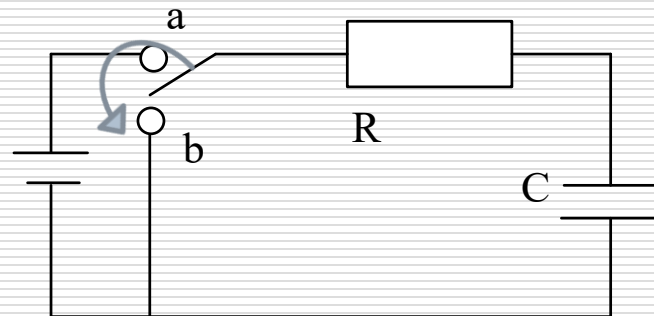
rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\varepsilon \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Przełącznik w pozycji **b)**
- rozładowanie
kondensatora C



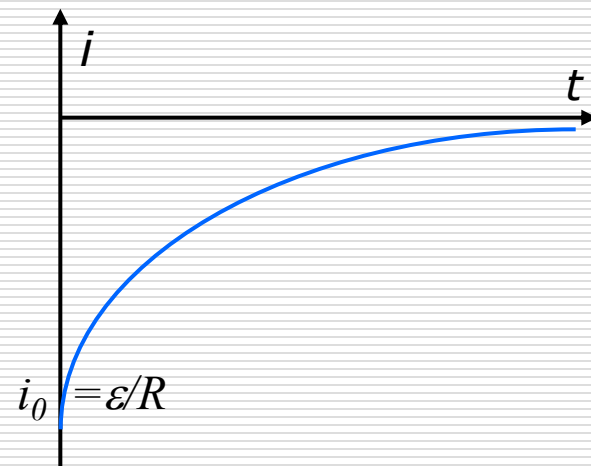
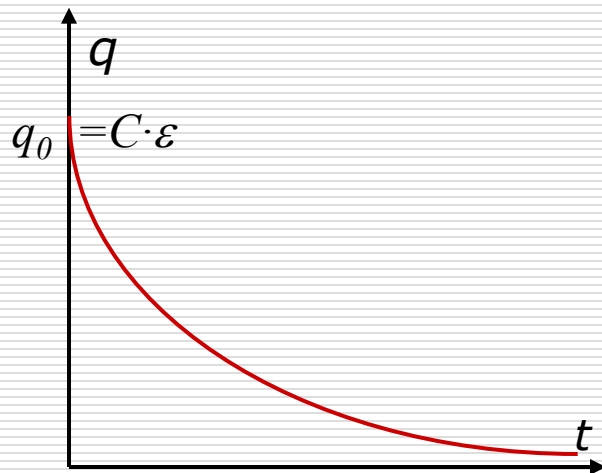
II prawo Kirchhoffa: $0 = i \cdot R + \frac{q}{C}$ czyli $0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

Rozwiązaniem równania różniczkowego: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$

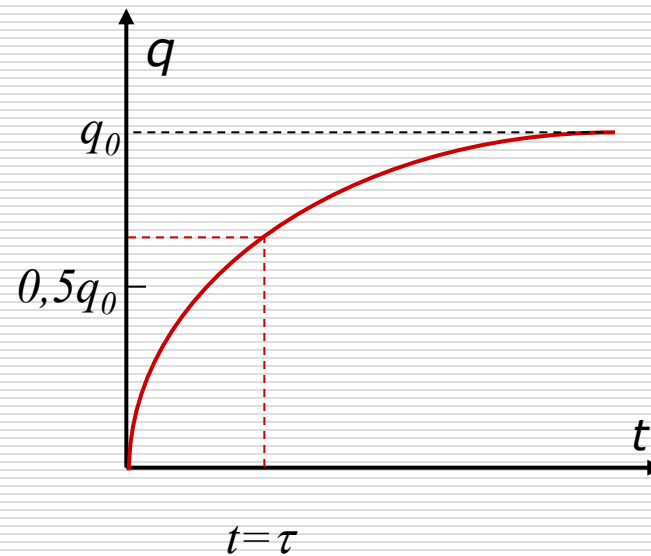
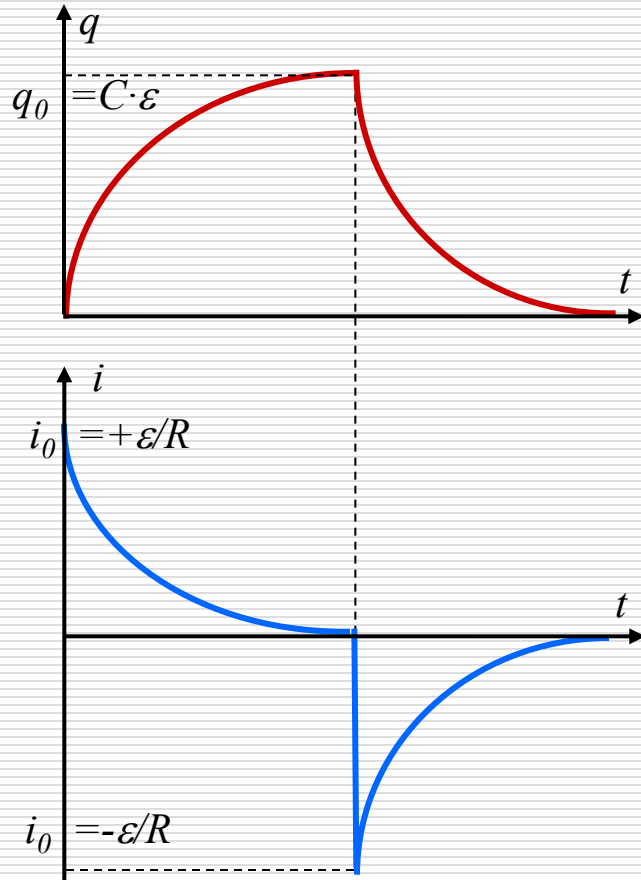
jest funkcja:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = C\varepsilon \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{C\varepsilon}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Cykliczny proces ładowania i rozładowania kondensatora:



Stała czasowa

$$t = R \cdot C = \tau$$

$$q(\tau) = C\varepsilon(1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot C\varepsilon$$