

Wykład 15: Pole magnetyczne

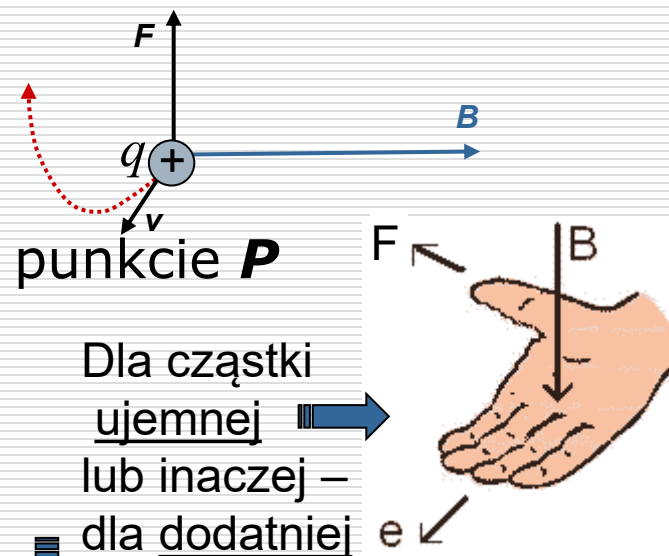
dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Wektor indukcji pola magnetycznego, siła Lorentza

- Jeżeli na dodatni ładunek q poruszający się z prędkością \vec{v} działa siła \vec{F} zakrzywiająca tor ładunku – jak na rysunku, to w punkcie P istnieje indukcja magnetyczna \vec{B} .



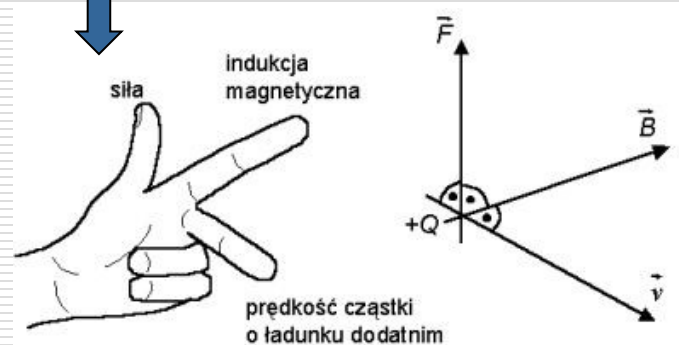
$$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L = 0 \quad \vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_L = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_L = \max$$

$$F_L = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\vec{v}, \vec{B})$$

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$B = \frac{F_{L \max}}{q \cdot v}$$

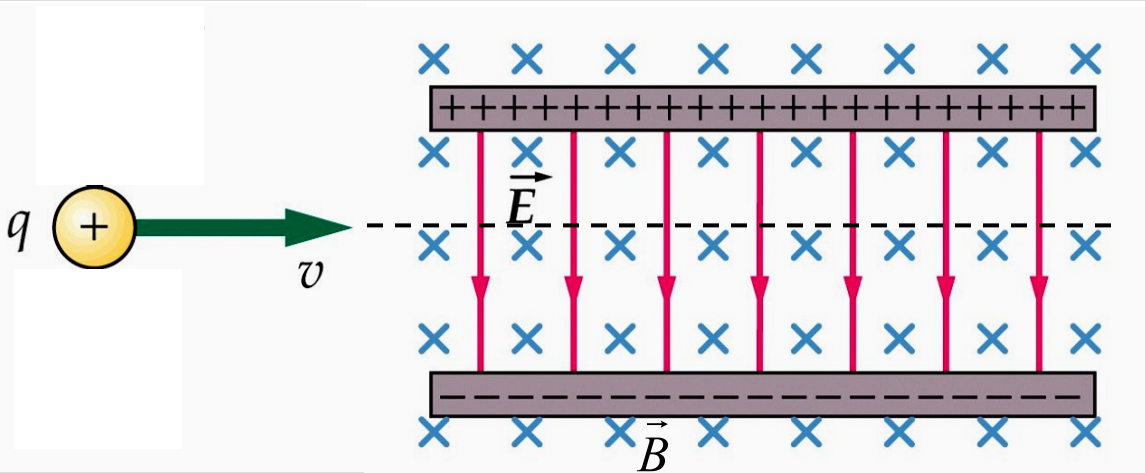


$$B = \frac{F_{L \max}}{q \cdot v} \quad \left[T = \frac{N}{A \cdot s \cdot \frac{m}{s}} = \frac{kg}{A \cdot s^2} \right]$$

□ Ruch cząsteczki w polu **E** i **B**

$$\vec{F} = \underbrace{q \cdot \vec{E}}_{\text{od pola } \vec{E}} + \underbrace{q(\vec{v} \times \vec{B})}_{\text{od pola } \vec{B}}$$

• Ruch w skrzyżowanych polach $\vec{B} \perp \vec{E}$



$$\vec{F}_L = -\vec{F}_E$$

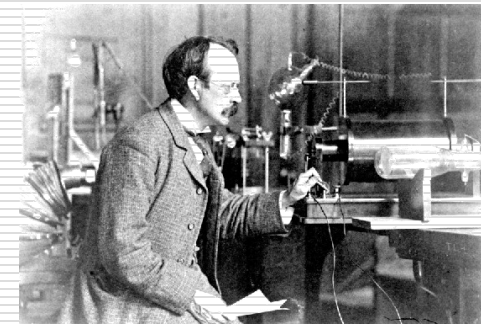
jeżeli $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$

to $vB = E$

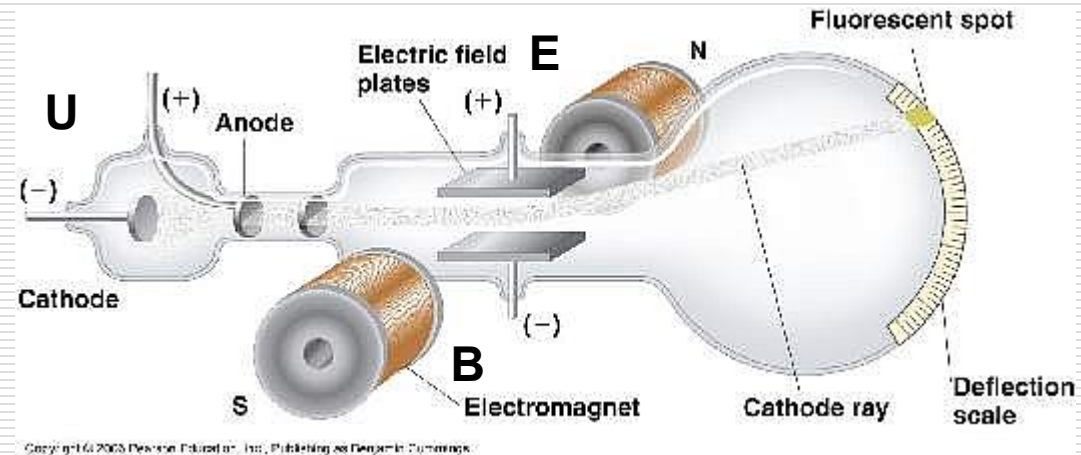
$$v = \frac{E}{B}$$

tor cząstki i jej prędkość nie ulegną zmianie

Doświadczenie Thomsona – wyznaczenie e/m elektronu



- 1897 r. Cambridge, J.J. Thomson, wyznaczył q/m dla elektronu - odkrycie elektronu



- Przyspieszenie napięciem U
- Pole magnetyczne skrzyżowane z polem elektrycznym – tor prostoliniowy:

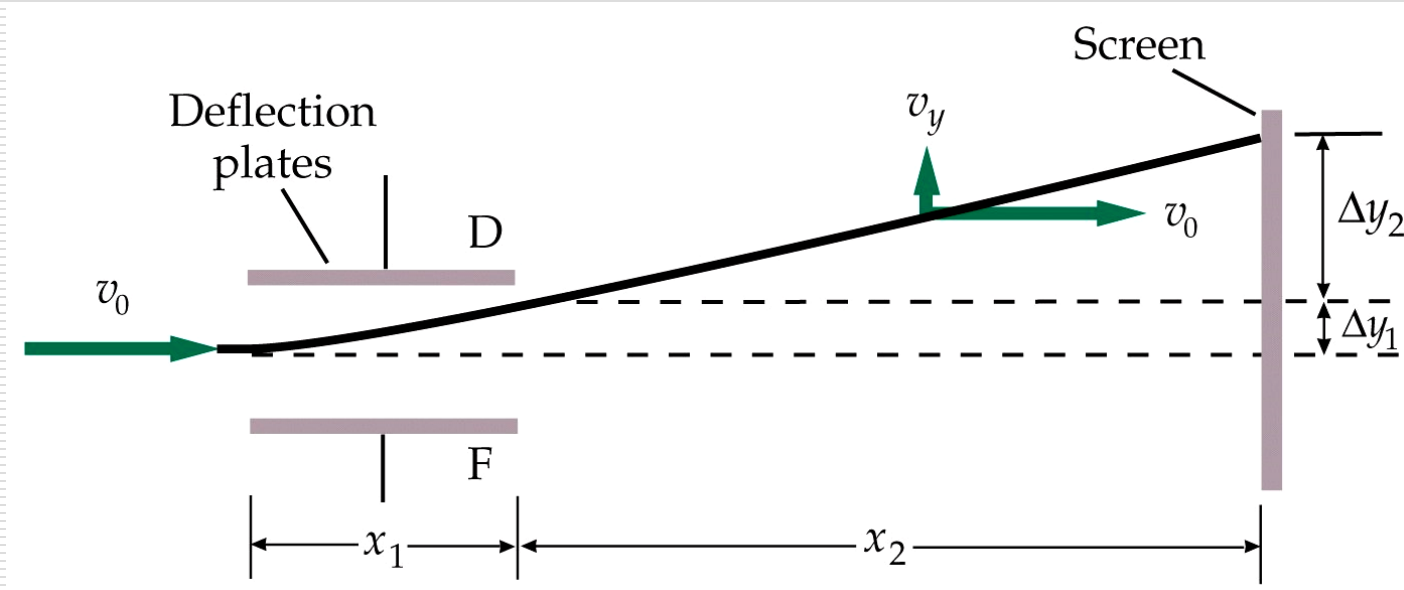
$$eU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$eE = evB \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} B$$

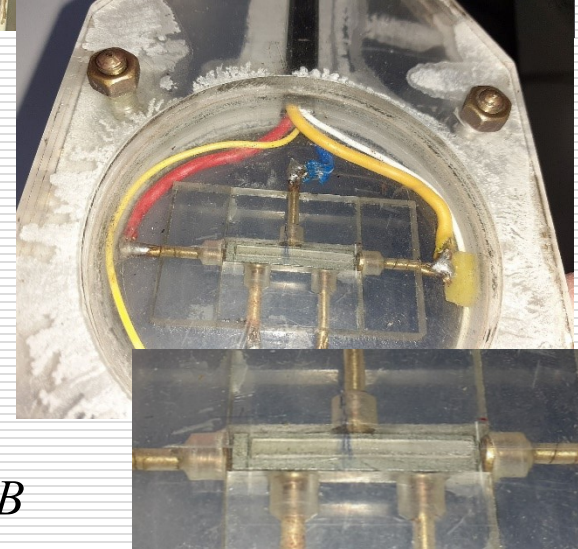
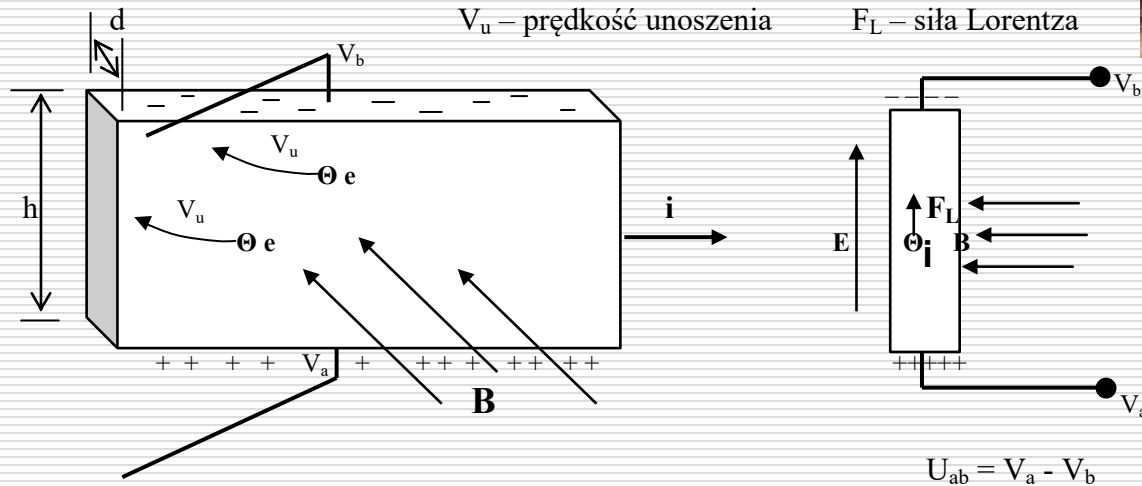
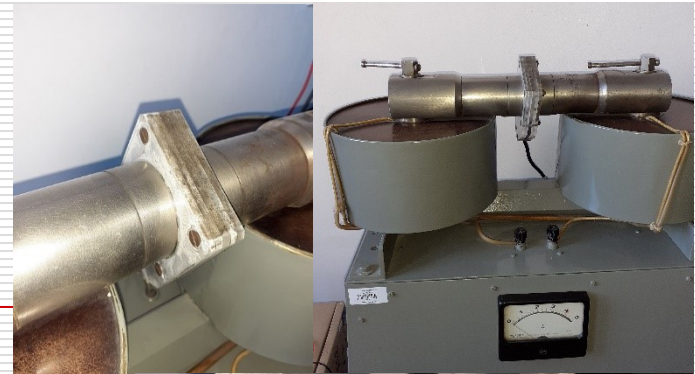
$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2UB^2} = 17,56 \cdot 10^{10} \frac{C}{kg}$$

□ Zadanie

Wiązka elektronów przechodzi bez odchylenia przez lampę oscyloskopową kiedy natężenie pola elektrycznego wynosi 3000 V/m, a indukcja skrzyżowanego z nim pola magnetycznego wynosi 1,4 Gs; 1Gs (gauss) = 10^{-4} T. Długość płytek odchylających wynosi $x_1 = 4$ cm, a odległość od końca płytek do ekranu wynosi $x_2 = 30$ cm. Oblicz pionowe odchylenie wiązki na ekranie przy wyłączonym polu magnetycznym



Efekt Halla



$\vec{F} = e\vec{E} + e(\vec{V}_u \times \vec{B})$ siły się równoważą więc $eE = eV_u B$

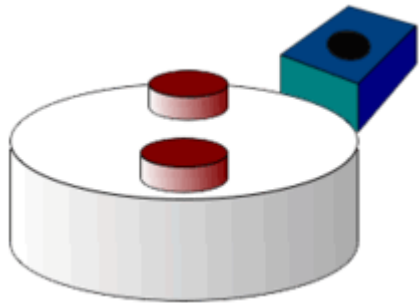
ponieważ $V_u = \frac{j}{ne}$ więc powstałe pole elektryczne $E = \frac{j}{ne} B = \frac{i}{hdne} B$

z pomiaru napięcia Halla U_{ab} : $E = \frac{U_{ab}}{h} = \frac{i}{h \cdot d} \frac{B}{ne}$ stąd $U_{ab} = \frac{i}{d} R_H B$

gdzie $R_H = \frac{1}{ne}$ jest stałą Halla

Z czego zrobić hallotron?

Zastosowanie hallotronów



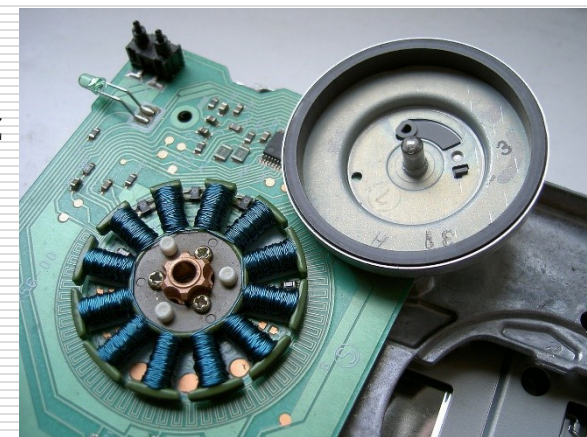
Czujnik położenia/obrotu prędkości obrotowej: dwa magnesy stałe mijające hallotron.

Silniki bezszczotkowe – np. w napędach dysków



Przewaga nad indukcyjnym czujnikiem: wykrywane jest również stałe pole.

Silnik napędu 3,5”
Odwrócony rotor z magnesem stałym.
Czujnik wykrywa położenie wirnika sterując prądem w cewkach



Czujnik prędkości obrotowej koła w systemie ABS



źródło zdjęć:
Wikipedia

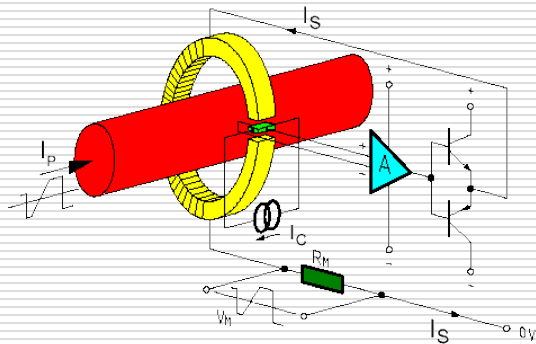


Czujnik pomiaru kąta nachylenia pojazdu – system Hill holder

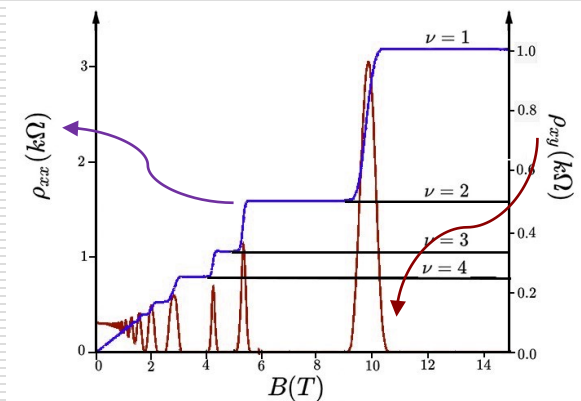


Czujnik zbliżeniowy smart cover – wygaszanie ekranu

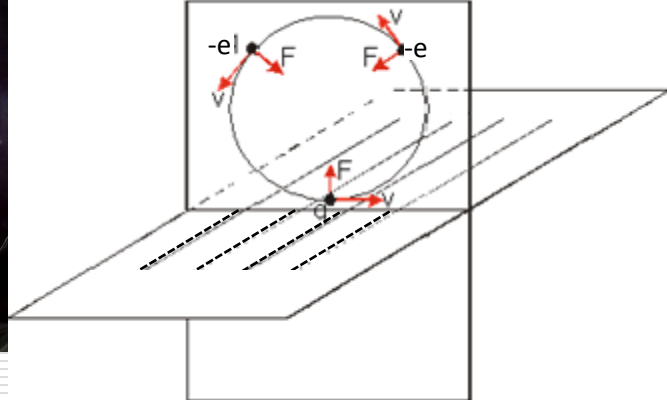
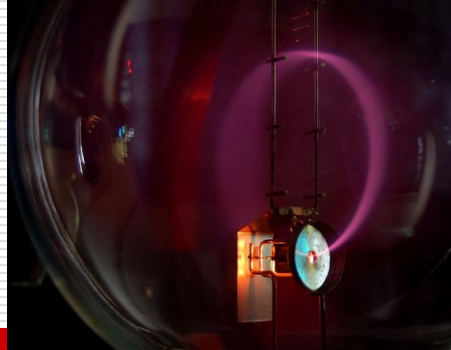
W silnych polach magnetycznych i niskich temperaturach – kwantowy ef. Halla – 1985 nagroda Nobla dla Klause von Klitzinga.



Bezkontaktowy pomiar dużych prądów (rzędu kA)



Spektroskop i cyklotron



- siła Lorentza jest siłą dośrodkową

$$qVB = \frac{mV^2}{r}$$

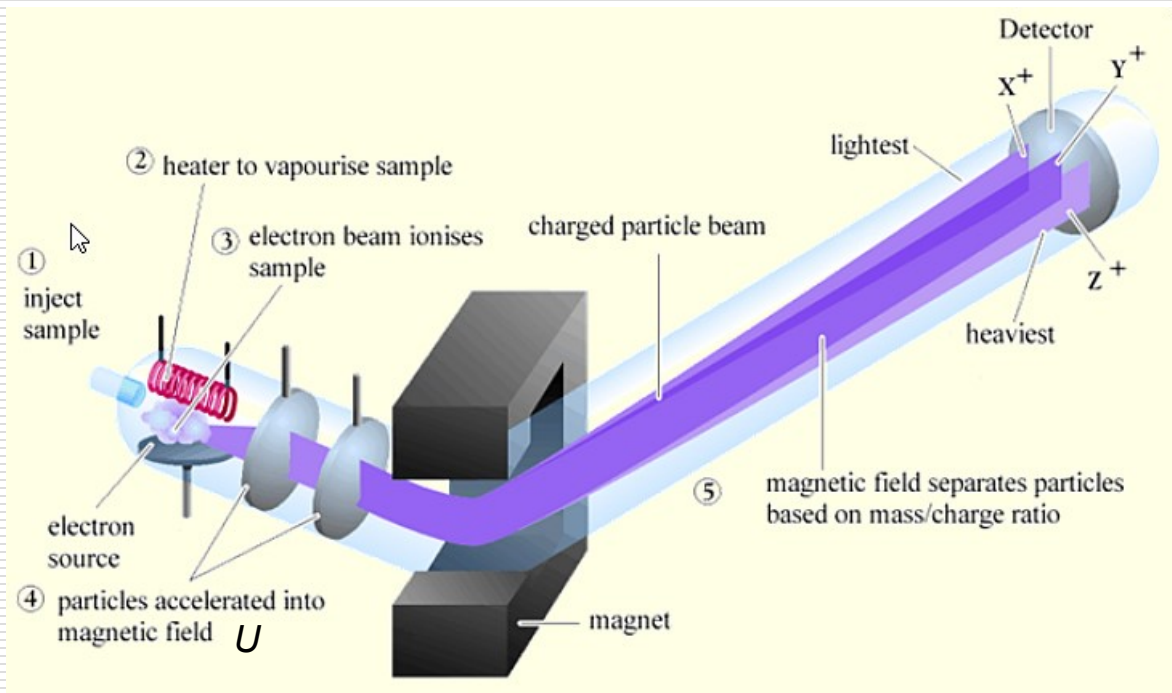
stąd $r = \frac{mV}{qB}$

skoro $\omega = \frac{V}{r} = \frac{qB}{m} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$

jest to tzw. *częstotliwość cyklotronowa*.

- Jeżeli obserwujemy różne promienie torów $r_1 > r_2$ dwóch cząstek o jednakowych ładunkach i prędkościach gdzie

$$r_1 = \frac{m_1}{q} \frac{V}{B} > r_2 = \frac{m_2}{q} \frac{V}{B} \Rightarrow m_1 > m_2 \text{ wykorzystanie} \rightarrow \text{spektroskopia masowa.}$$

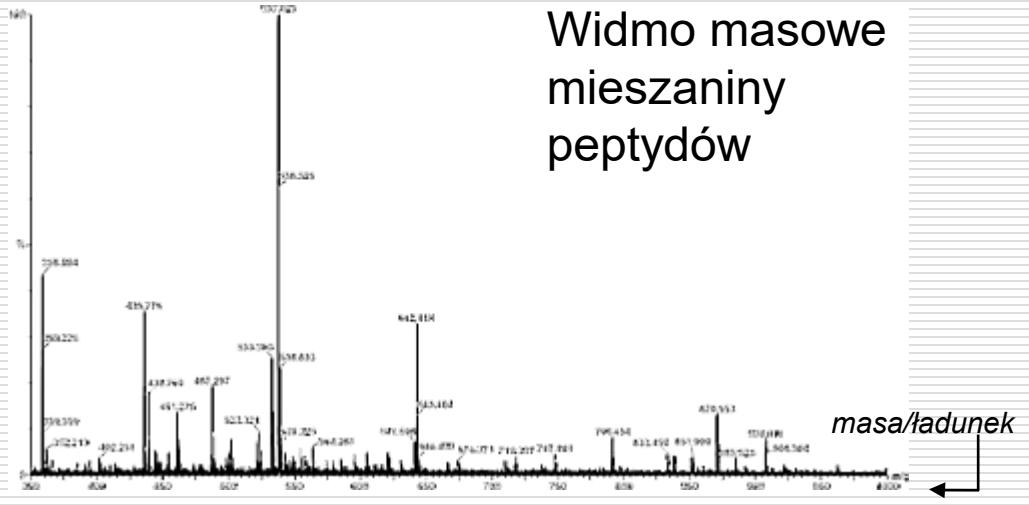


$$\frac{mV^2}{2} = qU$$

$$V = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

$$\frac{mV^2}{R} = qVB$$

$$R = \sqrt{\frac{2U}{qB^2} m}$$



□ Cyklotron (1932r.)

dostrajamy generator napięcia zmiennego do częstotliwości cyklotronowej

$$f_0 = \frac{qB}{2\pi m}$$

energia cząstek zależy od promienia

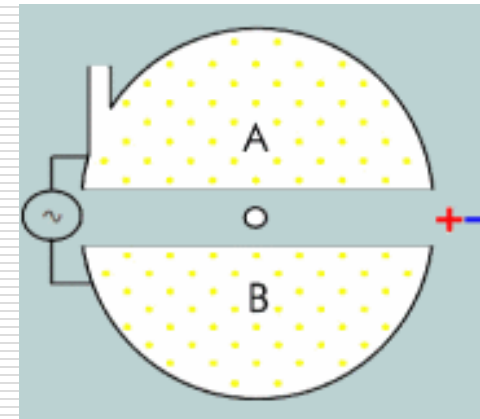
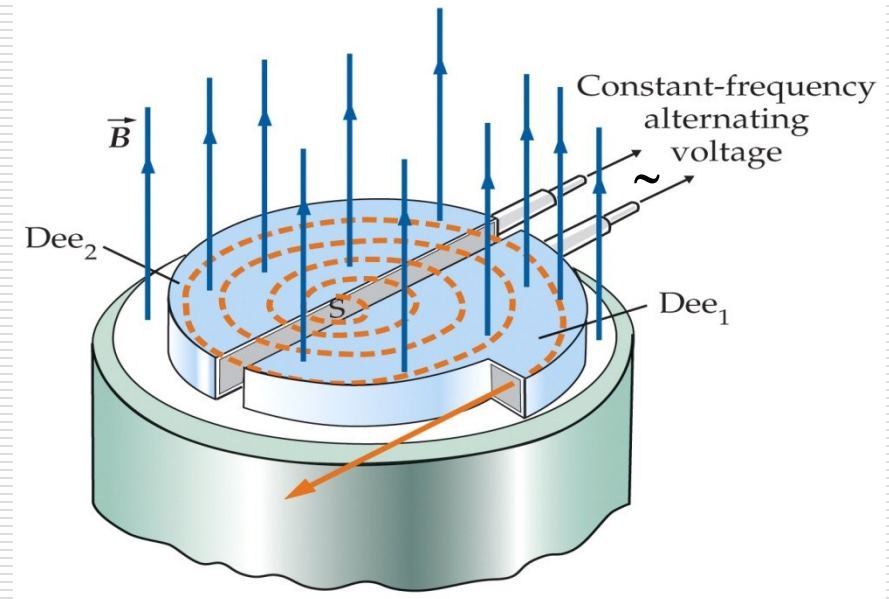
$$R = \frac{mV}{qB}$$

gdzie prędkość cząstki

$$V = \frac{qBR}{m}$$

stąd energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$



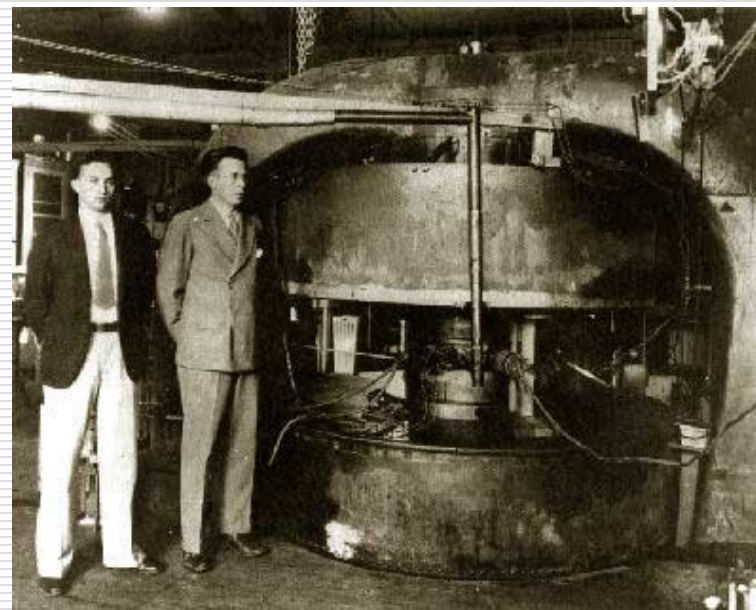
Wykorzystanie:

- reakcje jądrowe
- eksperymenty fizyki wys. energii
- promieniowanie synchrotronowe.



Środowiskowe Laboratorium Ciężkich
Jonów w Warszawie:
2 m \emptyset , 10 MeV/ jedn. masy

Ernest O. Lawrence (USA)
1931 r. – 10 cm \emptyset , 80 keV
1933 r. – 70 cm \emptyset , 1,2MeV



Przykład

Napięcie U przyspiesza proton w cyklotronie o promieniu R .

Indukcja pola magnetycznego wynosi B . Oblicz:

- a) wartość końcowej energii (nierelatywistycznej) jaka uzyska proton,
- b) ile razy proton przejdzie między duantami,
- c) ile okrążeń cyklotronu on wykona,
- d) częstotliwość zmian przyspieszającego pola elektrycznego,
- e) czas pobytu protonu w cyklotronie.

Jak zwiększyć energię nie zwiększając rozmiarów urządzenia?

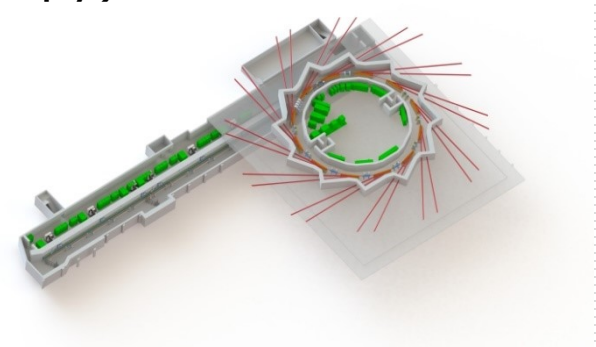
Od czego zależy energia przyspieszanych w cyklotronie cząsteczek?

Synchrotron – zwiększamy pole magnetyczne!

$$E_k = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

Synchrotron SOLARIS w Krakowie:

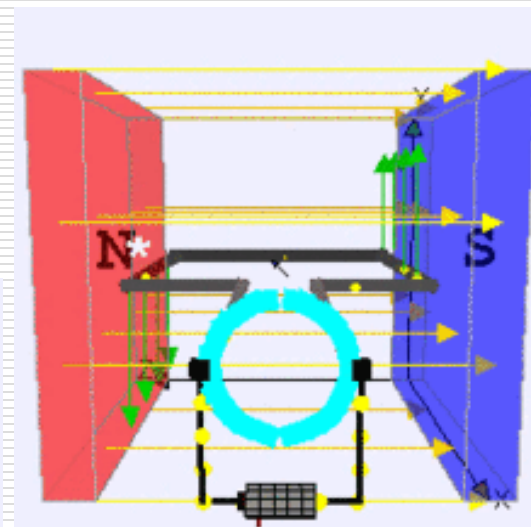
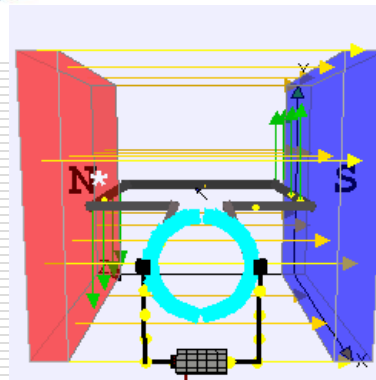
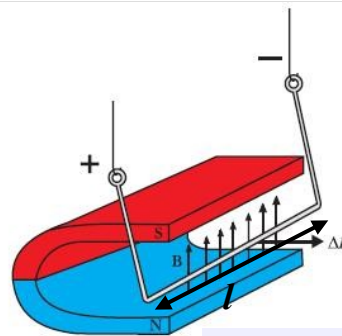
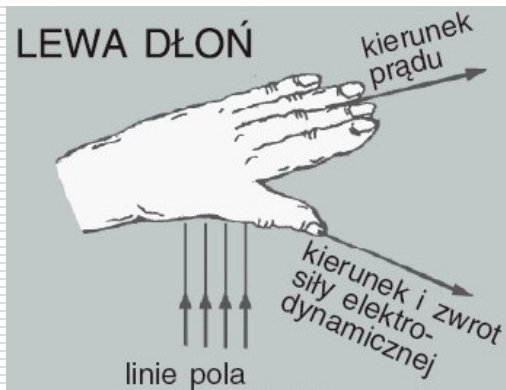
- 96 metrowy akcelerator kołowy,
- 6 linii badawczych z promieniowaniem synchrotronowym, 3 dalsze w budowie, planowane kilkanaście linii,
- badania w zakresie materiałoznawstwa, fizykochemii powierzchni, badania biomedyczne, mikroskopia rentgenowska i elektronowa (2 kriomikroskopy)



Siła elektrodynamiczna

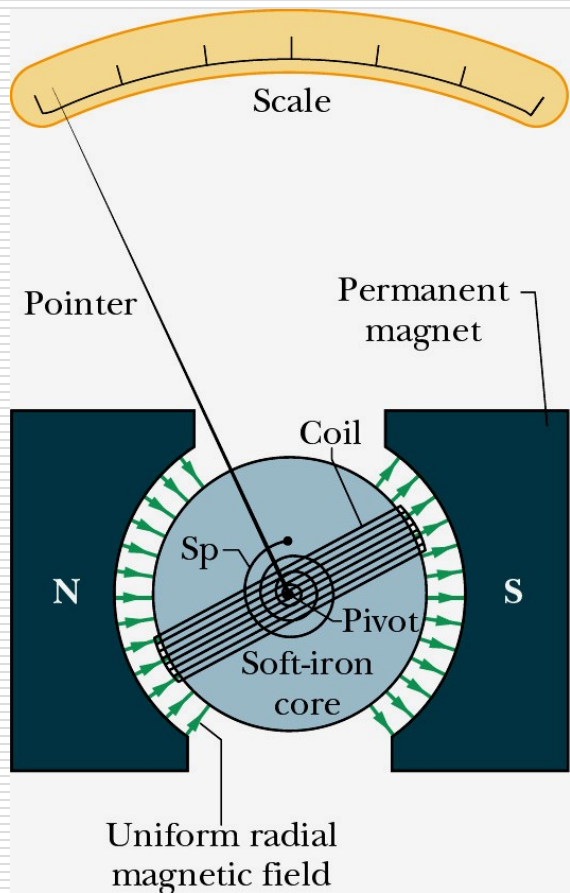
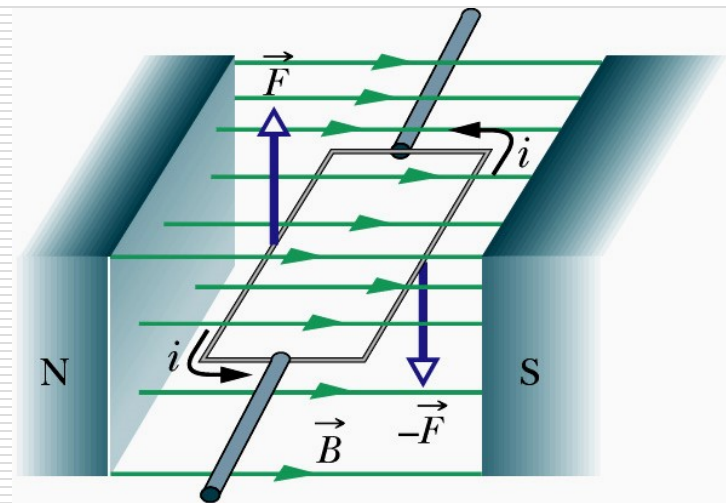
- Przewodnik z prądem w polu magnetycznym \Leftrightarrow ruch dużej ilości ładunków, na które działają siły Lorentza – ich wypadkowa to **siła elektrodynamiczna**

$$\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B})$$



- Zastosowanie:
 - Silnik elektryczny
 - Mierniki analogowe

- Silnik elektryczny ramka z prądem w polu magnetycznym.



- Analogowy miernik – woltomierz, amperomierz, galwanometr.

Na ramkę z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym działa moment siły

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \vec{\mu} - \text{moment magnetyczny}$$

Dla porównania: dla dipola elektrycznego

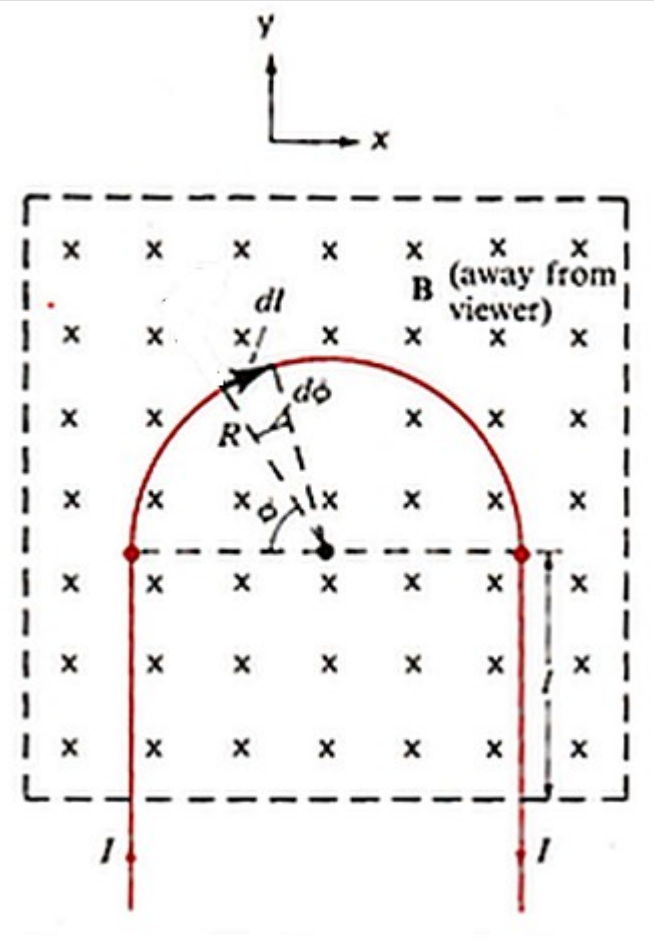
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Przykład

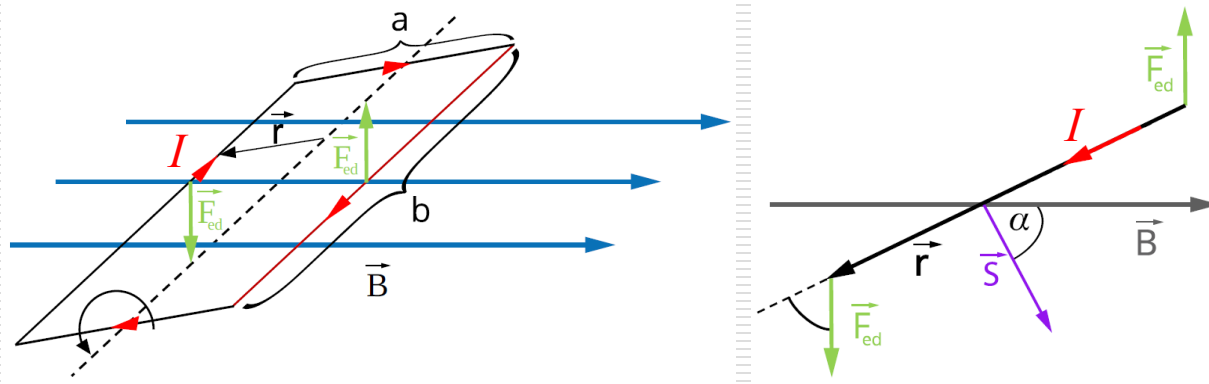
Przez wygięty, sztywny drut o wymiarach jak na rysunku, przepuszczono prąd I . Drut znajduje się w polu magnetycznym o indukcji B_0 skierowanym **za płaszczyznę**.

Określ kierunek i oblicz wartość siły działającej na drut.

Odp.: $F = 2IB_0R$, kierunek \uparrow



Moment magnetyczny



Pod wpływem momentu siły ramka ustawia się prostopadle do kierunku wektora indukcji pola magnetycznego: tak aby $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$

$$M = I \cdot S \cdot B \cdot \sin\alpha = \mu \cdot B \cdot \sin\angle(\vec{\mu}, \vec{B})$$

Można zatem zdefiniować moment magnetyczny dla każdego zamkniętego obwodu, przez który płynie prąd I : $\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$

Dla N zwojów: $\vec{\mu} = NIS\hat{n}$

liczba zwojów

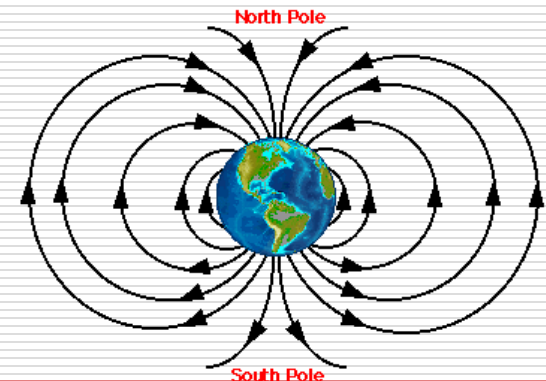
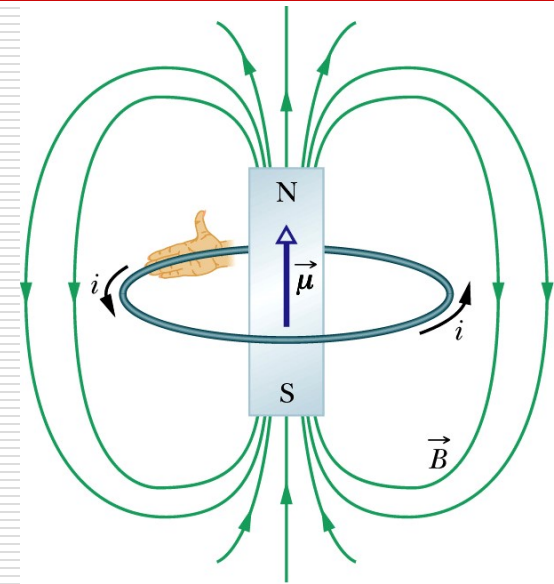
pole powierzchni

wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni S

Dipol magnetyczny

Moment magnetyczny charakteryzuje każdy dipol magnetyczny. Dipolem magnetycznym jest nie tylko ramka (pętla, cewka), przez który płynie prąd lecz również:

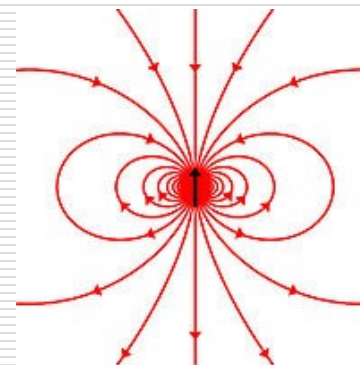
- magnes sztabkowy ($\mu \approx 5 \text{ J/T}$)
- Ziemia (w przybliżeniu $\mu \approx 8,0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$)
- większość cząstek elementarnych, np.
elektron ($\mu \approx 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$),
proton ($\mu \approx 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$),
neutron ($\mu \approx -0,9 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$).



- Moment magnetyczny cząstki mikroskopowej powstaje na skutek jej ruchu w przestrzeni (np. ruch orbitalny elektronu w atomie) lub jest to tzw. *wewnętrzny moment magnetyczny*, nie związany z żadnym ruchem – mają go cząstki obdarzone *spinem* (przy czym moment magnetyczny jest związany ze spinem poprzez czynnik giromagnetyczny).

Neutron ma ujemny moment magnetyczny, co oznacza, że gdy spin neutronu jest skierowany w górę, to linie pola magnetycznego w środku dipola są skierowane w dół.

Na moment magnetyczny atomu składają się: wypadkowy moment magnetyczny elektronów oraz moment magnetyczny jądra.

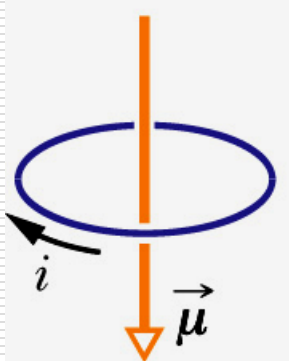


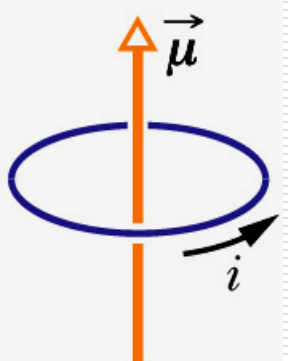
strzałka symbolizuje rzut spinu na kierunek zewnętrznego pola magnetycznego

- Energia potencjalna dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym.

$E_p = -\vec{\mu} \circ \vec{B}$

najwyższa energia E_p





najniższa energia E_p

Dipol oddziałując z zewnętrznym polem magnetycznym przyjmie minimum energii potencjalnej, tzn., że jego biegun N znajdzie się bliżej bieguna S ciała wytwarzającego zewnętrzne pole magnetyczne, a wektor $\vec{\mu}$ będzie zgodny z wektorem \vec{B} .

Dla porównania: energia dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym

$$E_p = -\vec{p} \circ \vec{E}$$

Dipol - podsumowanie

Własności dipola	typ dipola	wzór
moment siły w polu zewnętrznym	elektryczny magnetyczny	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ $\vec{\tau} = \vec{\mu}_m \times \vec{B}$
energia w polu zewnętrznym	elektryczny magnetyczny	$E_p = -\vec{p} \circ \vec{E}$ $E_p = -\vec{\mu}_m \circ \vec{B}$
pole w odległych punktach na osi dipola	elektryczny magnetyczny	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$ $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu_m}{x^3}$

Materiały magnetyczne

Pierwszy znany materiał magnetyczny – magnetyt Fe_3O_4 - Chiny 4 000 p.n.e.
W Europie od XII w – kompas, wyjaśnienie jego działania – 1600 r. William Gilbert.

1820 r. Hans Christian Oersted – obserwacje

1820-23 r. André Marie Ampère - prawo

1831 r. Michael Faraday – indukcja magnetyczna

1873 r. James Clark Maxwell – ogólna teoria elektromagnetyzmu.

Każdy elektron w atomie ma wypadkowy moment magnetyczny (orbitalny + spinowy), który wektorowo sumuje się w ramach atomu i próbki.

Moment magnetyczny przypadający na jednostkę objętości próbki zwany jest namagnesowaniem **M**.

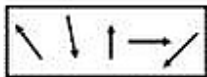
Materiały magnetyczne charakteryzuje wielkość χ zwana *podatnością magnetyczną*.

$$\chi = \frac{M}{H} = \mu_0 \frac{M}{B}$$

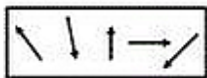
$$B = \mu_0 H \quad \rightarrow \text{zewnętrzne pole magnetyczne}$$

Zero external field

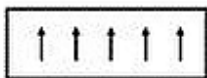
Paramagnets



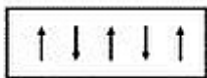
Diamagnets



Ferromagnets



Antiferromagnets

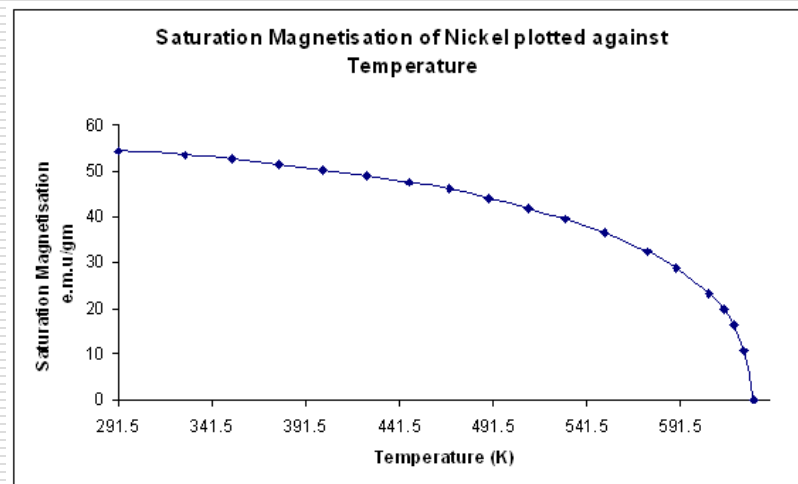
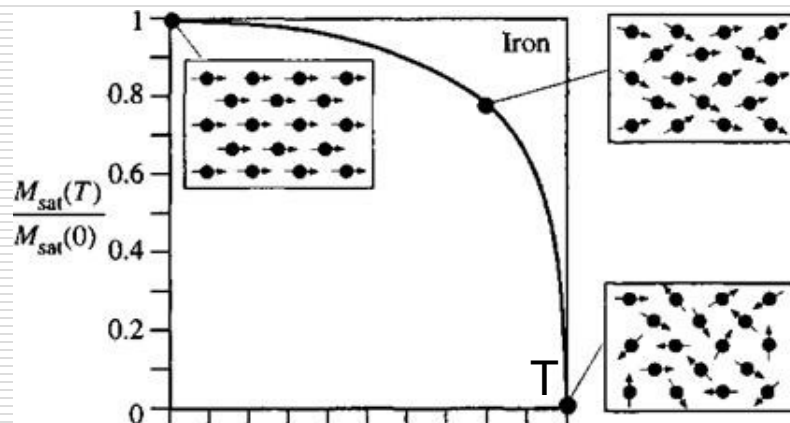


Ferrimagnets



$$\chi = \frac{M}{H} = \mu_0 \frac{M}{B}$$

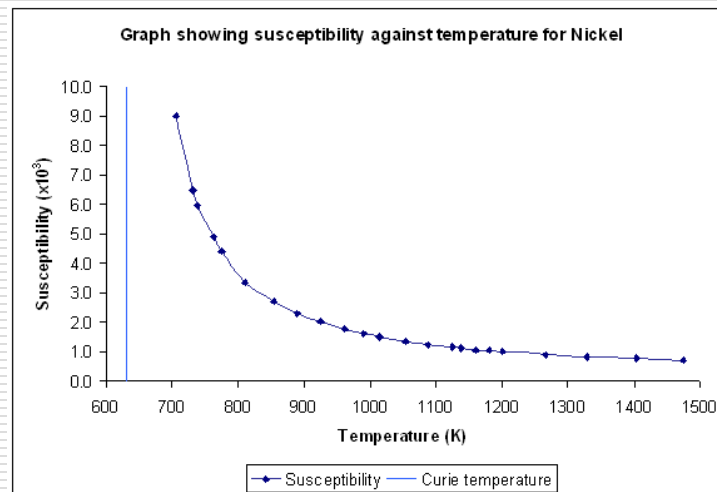
$\chi < 0$ – substancja jest *diamagnetykiem*, co oznacza że pole magnetyczne jest "wypychane" z takiego ciała (maleje gęstość strumienia pola magnetycznego w porównaniu z próżnią),
 $\chi = 0$ – brak podatności, np. dla próżni,
 $\chi > 0$ – substancja jest *paramagnetykiem*, co oznacza że pole magnetyczne jest "wciągane" do takiego ciała (rośnie gęstość strumienia pola magnetycznego w porównaniu z próżnią),
 $\chi \gg 0$ – substancja jest *ferromagnetykiem*.



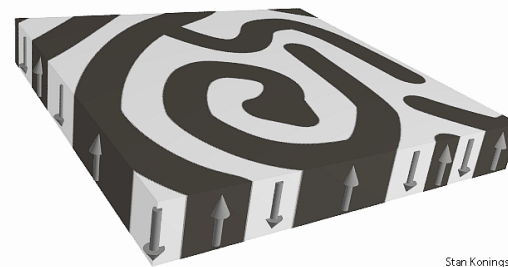
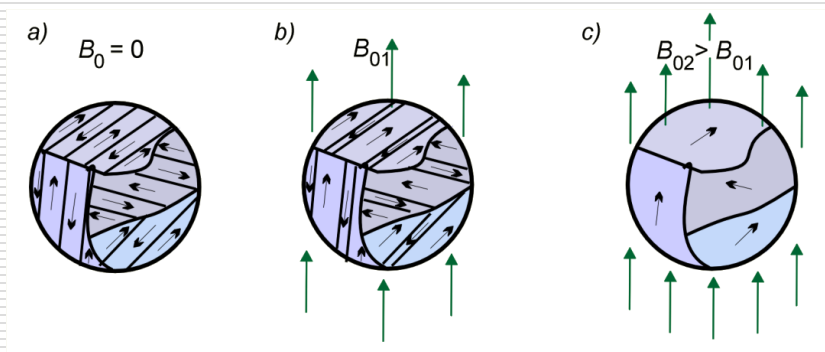
Paramagnetyki – niekompletne orbitale
 ⇒ niesparowane elektrony ⇒ atom ma
 niezerowy, wypadkowy moment magn.

W zewnętrznym polu – uporządkowanie
 momentów magnetycznych zgodnie z \vec{B}
 Gdy $\vec{B} = 0$ – drgania termiczne niszczą
 uporządkowanie.

Prawo Curie:
$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

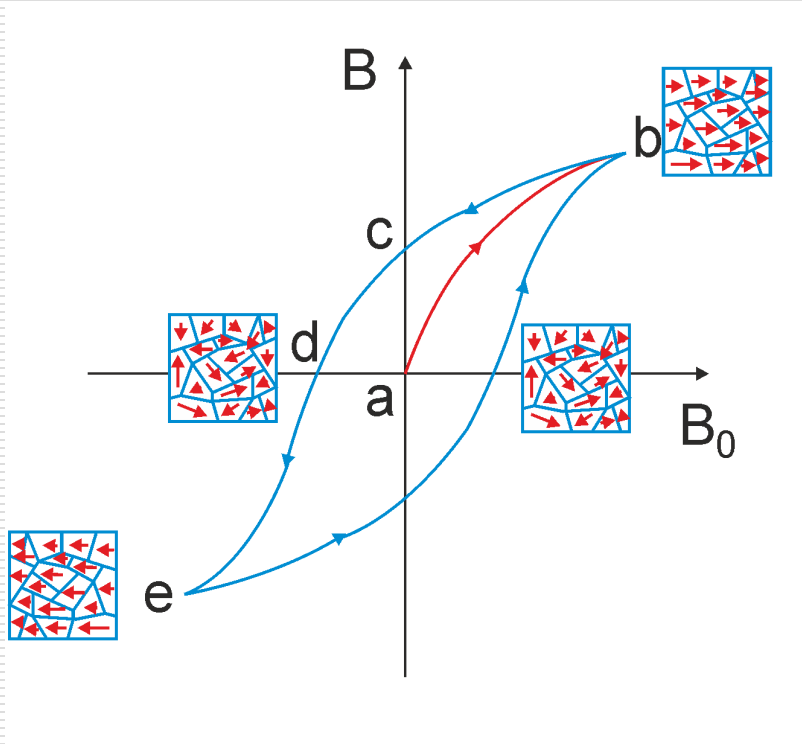


Domeny magnetyczne

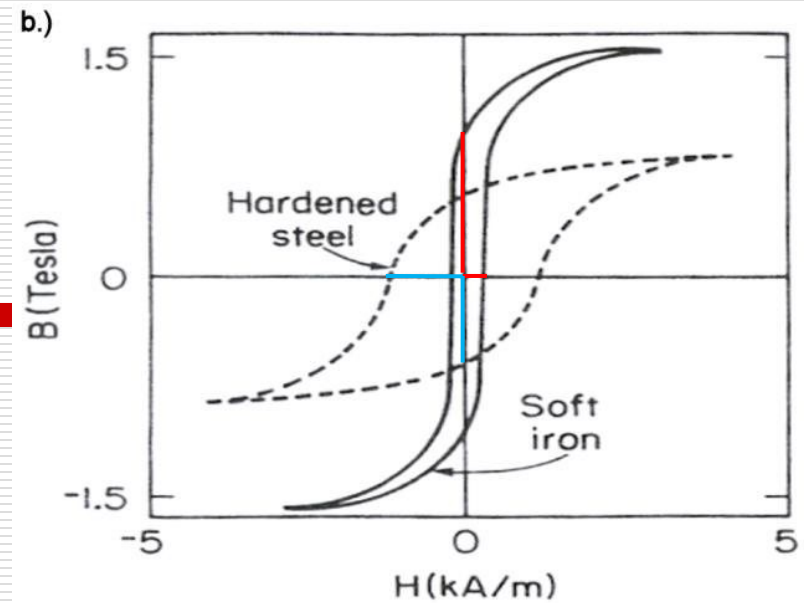


Stan Konings 2007

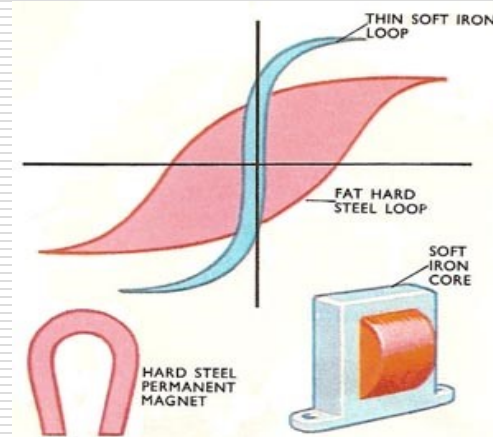
Pętla histerezy magnetycznej



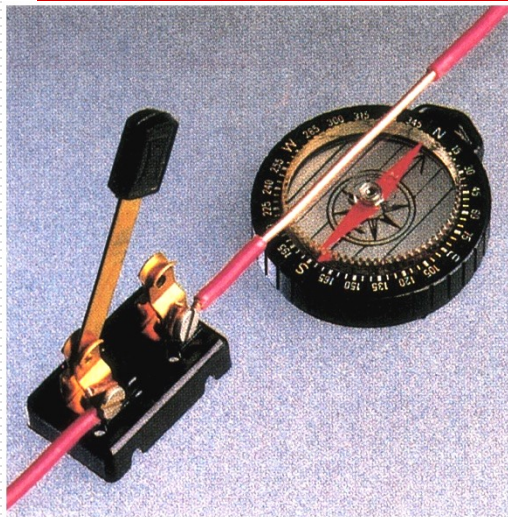
ac – pozostałość magnetyczna
 ad – koercja magnetyczna



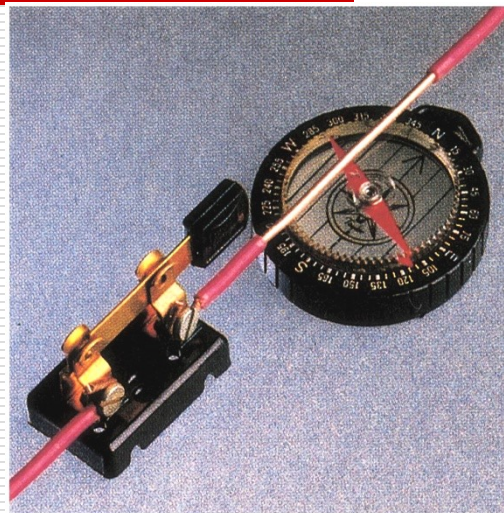
Silny magnes – duża pozostałość magn.
 Łatwy do przemagnesowania – mała koercja
 Trwały magnes – duża koercja magnetyczna



Prąd elektryczny jako źródło pola magnetycznego - doświadczenie Oersteda



Kiedy przez przewodnik nie płynie prąd, igła ustawia się wzdłuż kierunku pola magnetycznego ziemskiego



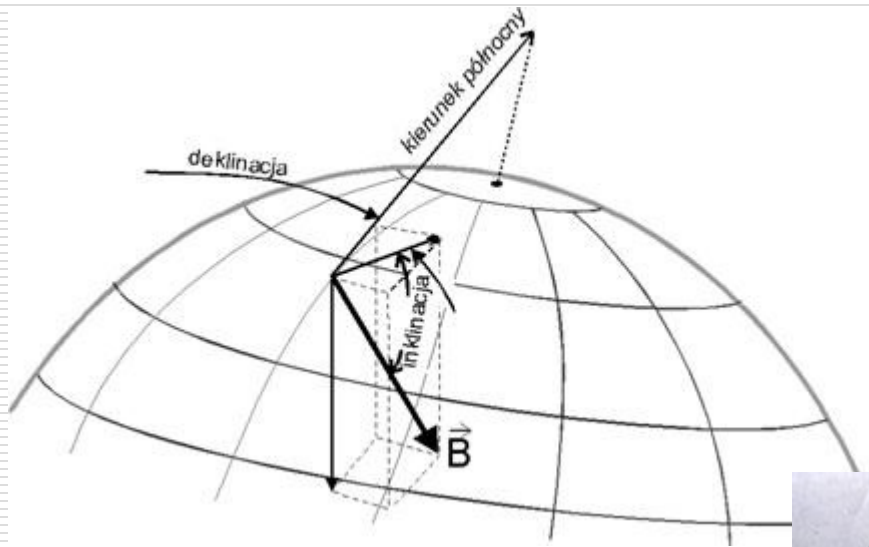
Kiedy przez przewodnik płynie prąd, igła odchyła się od kierunku pola magnetycznego Ziemi. Dlaczego?



Hans Christian Ørsted
(1777-1851)

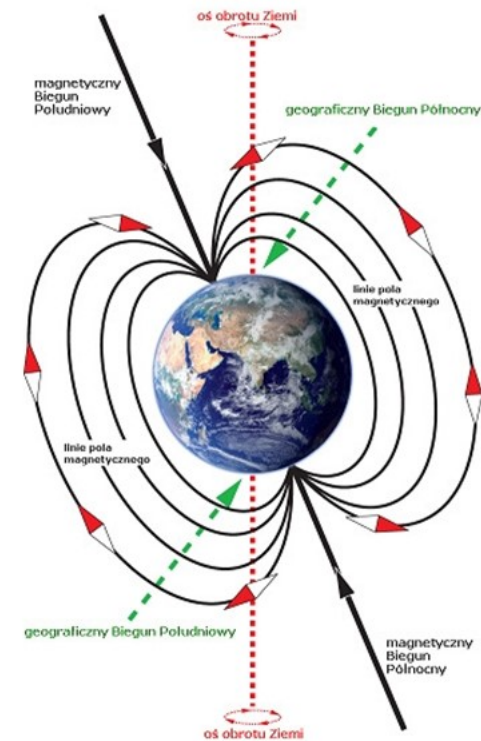


Wyznaczanie składowych pola magnetycznego ziemskiego



Busola stycznych

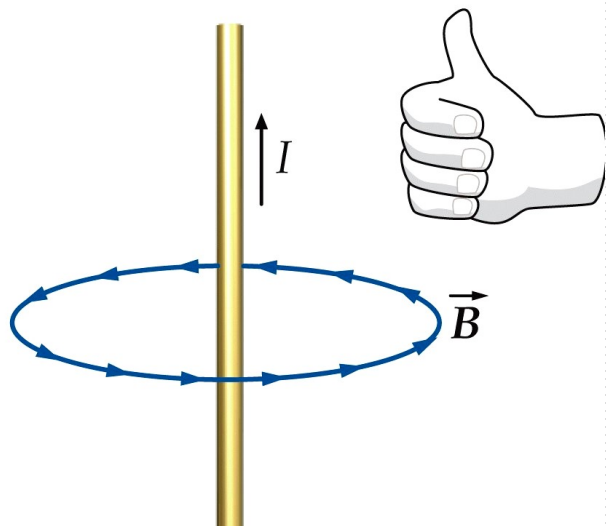
Instrument został po raz pierwszy opisany przez francuskiego fizyka Claude Pouillet'a w 1837 roku



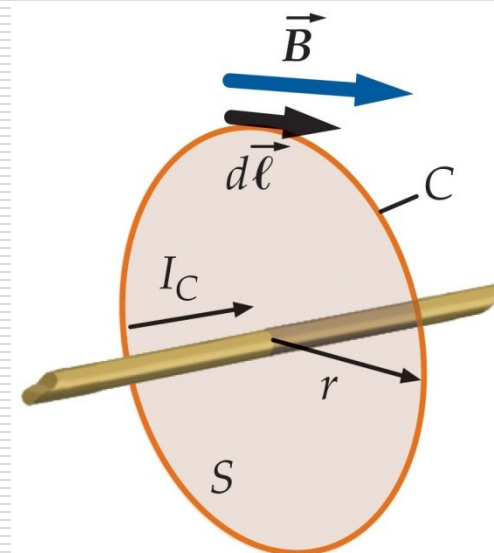


André-Marie Ampère
(1775-1836)

Prawo Amper'a



$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

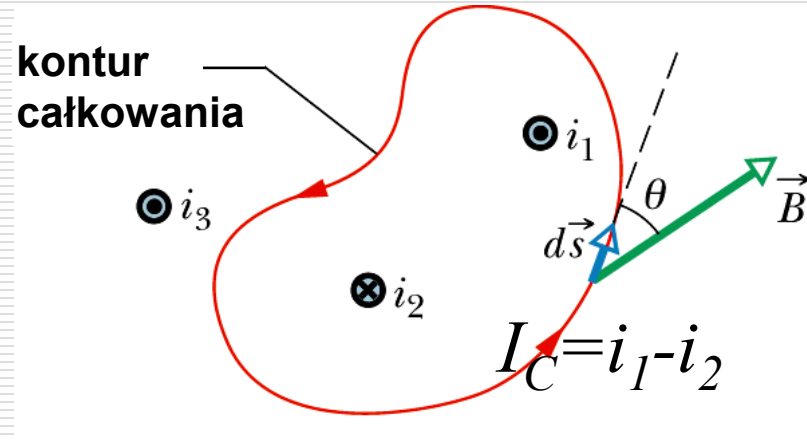


krążenie pola
magnetycznego

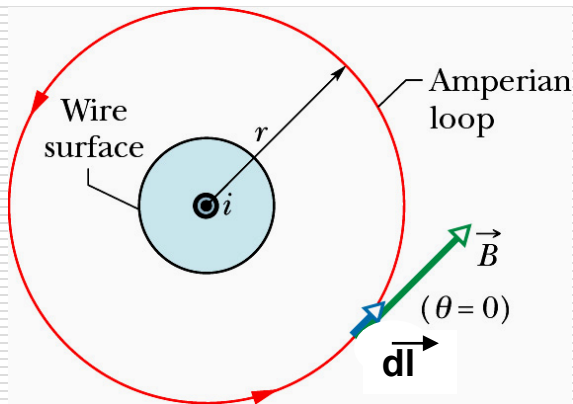
prąd wewnątrz
konturu całkowania C

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni, stała uniwersalna

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$$



□ Pole magnetyczne wokół przewodnika prostoliniowego



$\vec{B} \parallel d\vec{l}$ $B = \text{const}$ na krzywej C (kontur całkowania jest okręgiem)

krążenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu r

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B$$

korzystając z prawa Ampère'a

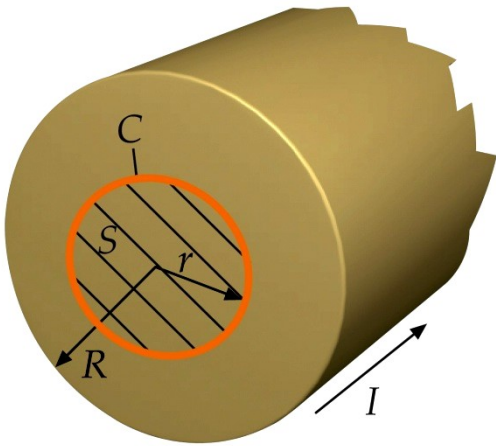
$$2 \pi r B = \mu_o i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_o i}{2 \pi r}$$

Pole magnetyczne w odległości r od przewodnika

Czy istnieje pole magnetyczne wewnątrz przewodnika ?

□ Przewodnik o promieniu R , przez który płynie prąd I :



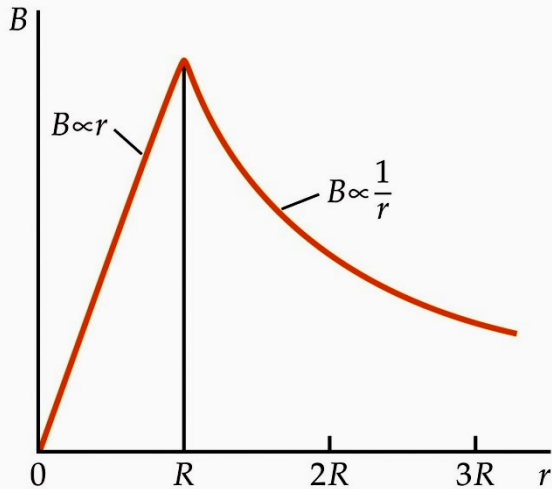
krążenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu r wyraża się tym samym wzorem dla $r < R$ i $r > R$

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = 2 \pi r B$$

Obliczamy natężenie prądu I_C wewnątrz konturu ($r < R$):

gęstość prądu j jest stała $j = \frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$ $\Rightarrow I_C = \frac{I}{R^2} r^2$

Z prawa Ampère'a



$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad 2\pi Br = \mu_0 \frac{I}{R^2} r^2$$

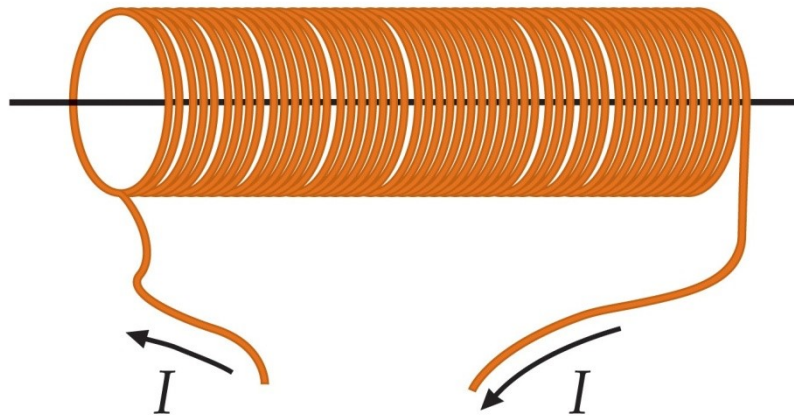
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

pole magnetyczne wewnątrz przewodnika

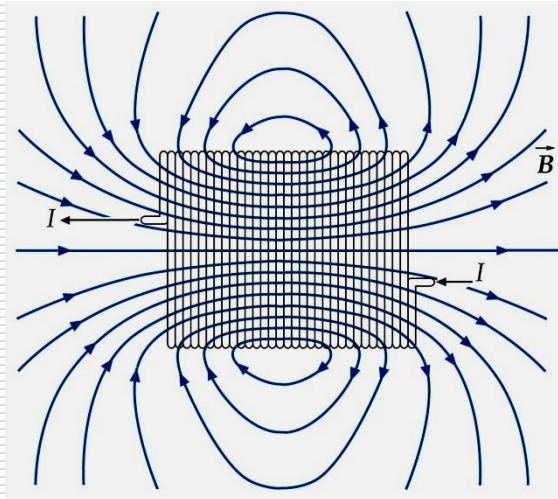
pole magnetyczne na zewnątrz przewodnika:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

□ Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu



Solenoid wytwarza jednorodne pole magnetyczne i pełni podobną rolę jak kondensator płaski w elektrostatyce

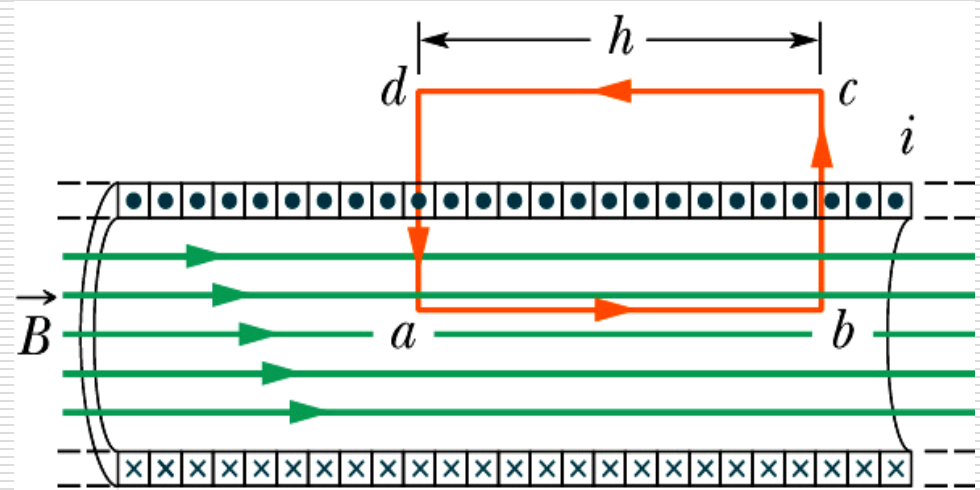
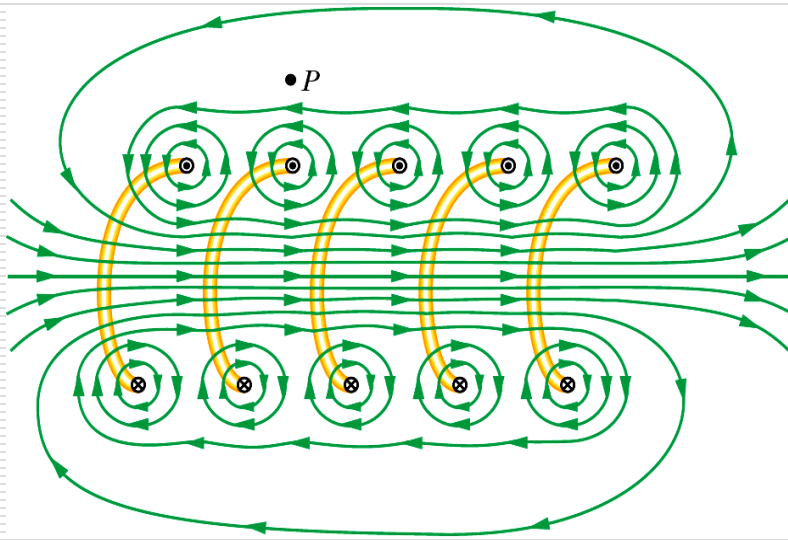
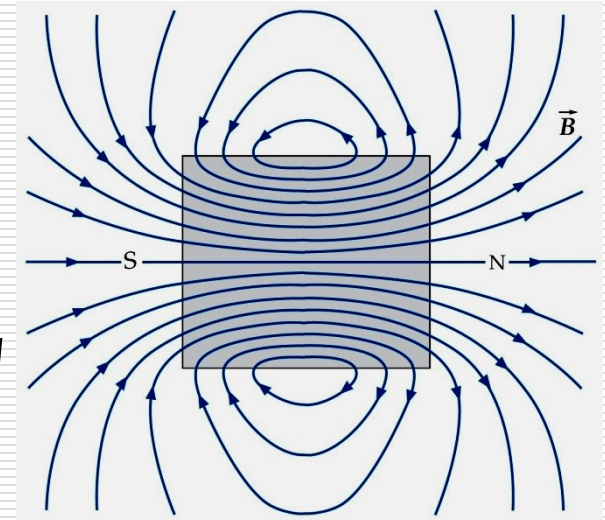


solenoid

↻

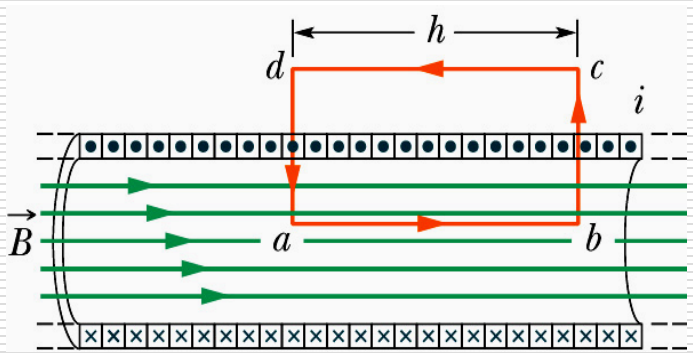
magnes sztabkowy

↻



nieskończony solenoid

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \circ d\vec{l}$$



$\underbrace{\int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l}}_{B \cdot h}$
 $\underbrace{\int_b^c \vec{B} \circ d\vec{l}}_0$
 $\underbrace{\int_c^d \vec{B} \circ d\vec{l}}_0$
 $\underbrace{\int_d^a \vec{B} \circ d\vec{l}}_0$

dłaczego?

$\vec{B} \parallel d\vec{l}$
 $\vec{B} \perp d\vec{l}$
 $\vec{B} = 0$
 $\vec{B} \perp d\vec{l}$

pole jednorodne

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = Bh = \mu_o I_C$$

gdzie

$$I_C = (nh)i$$

liczba zwojów na jednostkę długości

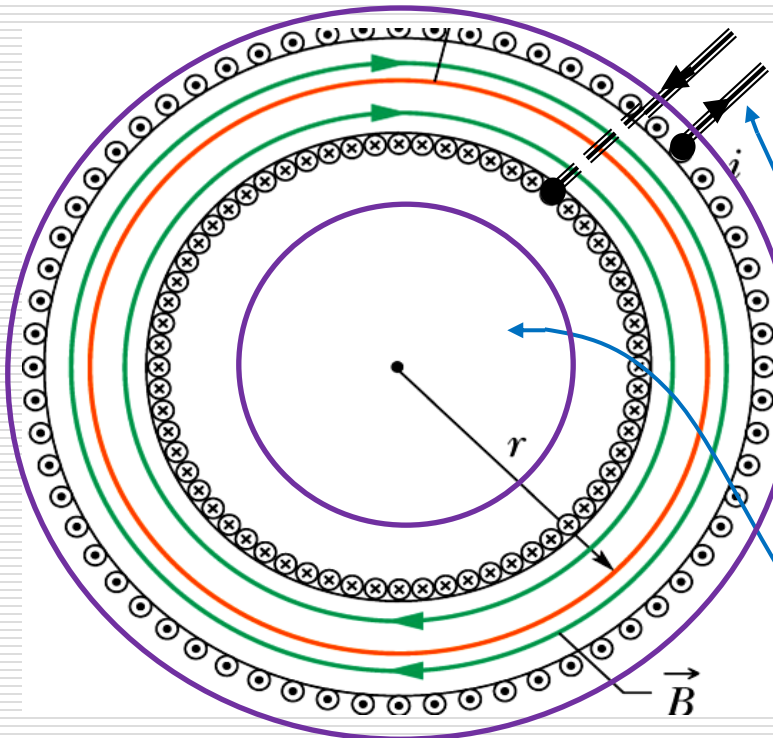
natężenie prądu w uzwojeniu solenoidu

solenoid idealny $B = \mu_o ni$

□ Zadanie.

Wykorzystać prawo Ampère'a do znalezienia wartości wektora indukcji wewnątrz toroidu, przez który płynie prąd o natężeniu I .

N - liczba zwojów toroidu



wewnątrz toroidu:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

na zewnątrz toroidu:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{wpr\u0142y}} - I_{\text{wypr\u0142}}) = \underline{0} \text{ lub}$$

w środku toroidu:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \underline{0}$$

Oddziaływanie równoległych przewodników z prądem

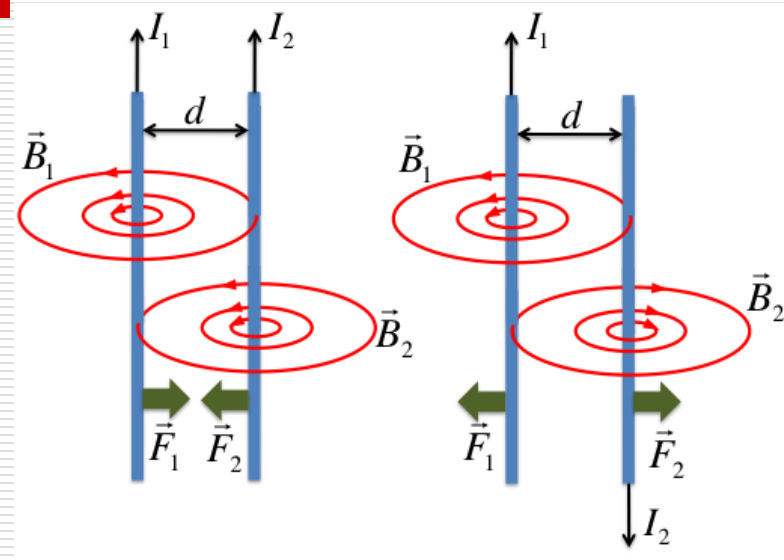
pole magnetyczne
wytworzone przez
prąd I_1

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2 \pi d}$$

siła działająca na
przewód z
prądem I_2 ma
wartość

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 L \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \pi d}$$

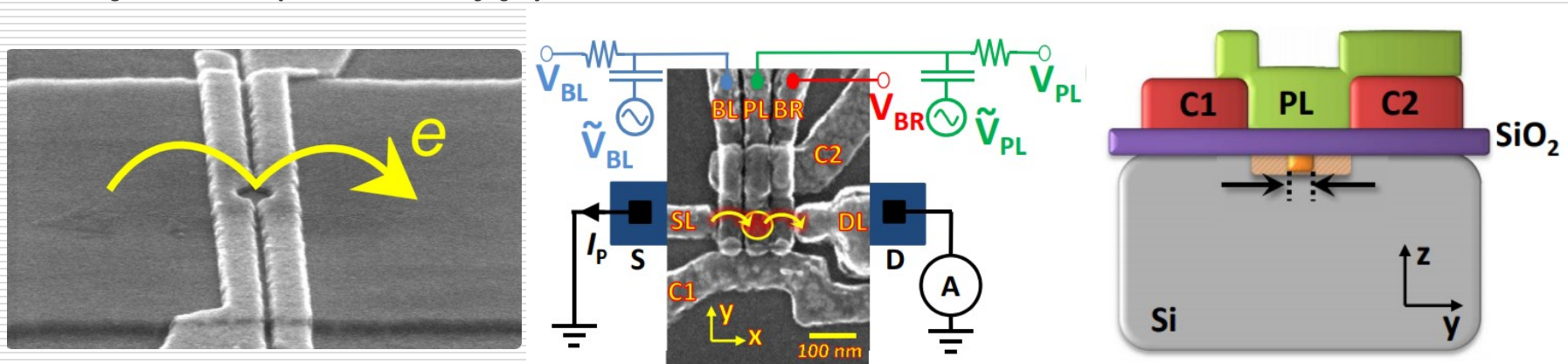


Definicja **ampera**: 1A jest to natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu.

Nowa definicja ampera – oparta na kwantowych urządzeniach nanometrycznych używanych w temperaturach bliskich zera absolutnego. Urządzenia te nazywane są *pompami jednoelektronowymi* (SEP), ponieważ precyzyjnie emitują jeden elektron na raz i zapewniają większą dokładność i stabilność przy wytwarzaniu prądu elektrycznego niż jakiegokolwiek inne urządzenie.

Nanotranzystory krzemowe, wykorzystujące tzw. *Kropki kwantowe* dają możliwości dokładnego dostrojenia wielkości kropki kwantowej, co skutkuje znacznym zwiększeniem dokładności prądu elektrycznego – 80 pA z niepewnością 50 ppm (*parts per milion*).

Oznacza to, że co sekundę udaje się wyizolować i przenieść 1 miliard elektronów z błędem nieprzekraczającym 500 elektronów !



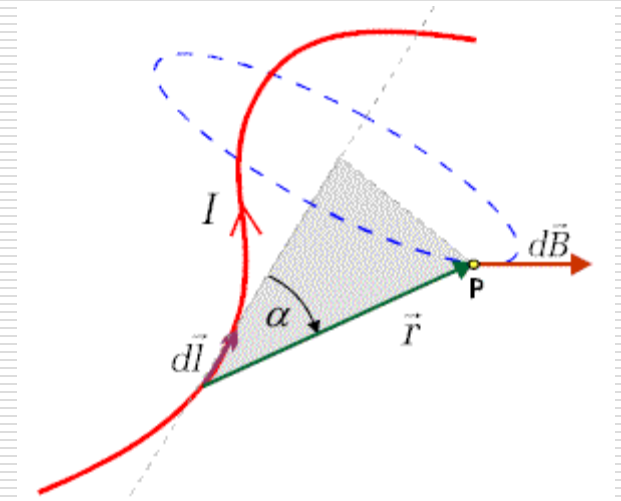
A. Rossi, T. Tantt, et al.. [arXiv:1406.1267](https://arxiv.org/abs/1406.1267) [cond-mat.mes-hall]

Prawo Biota-Savarta

Zasada superpozycji obowiązuje nie tylko w elektrostatyce:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin \theta}{r^2} \quad \vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



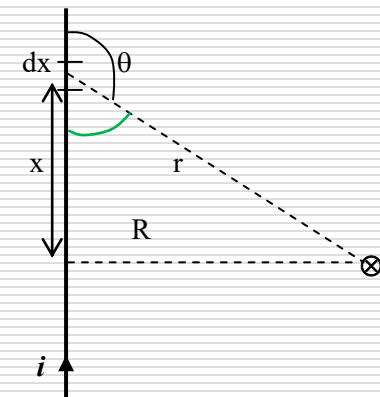
□ Przykład – przewodnik prostoliniowy

$$\int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \cdot \sin \theta}{r^2}$$

gdzie

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

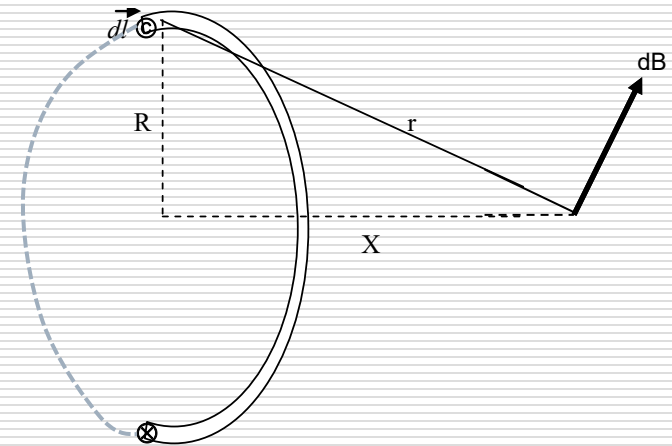


$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \cdot dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

□ Przykład – przewodnik kołowy

Zauważmy że: $d\vec{B} \perp \vec{r}$

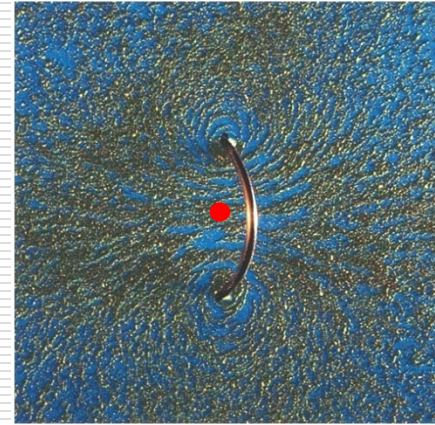
ze względu na symetrię $\sum dB_{\perp} = 0$



$$B = \int dB_{\parallel} \quad dB_{\parallel} = dB \cdot \cos \alpha \quad \text{gdzie} \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl \cdot \sin 90^\circ \quad \Rightarrow \quad B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} \int dl \quad \int dl = 2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



w środku przewodnika
kołowego • - dla $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

jeżeli $x \gg R$ to $B = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \Rightarrow B \sim \frac{1}{x^3}$ - jak pole od dipola

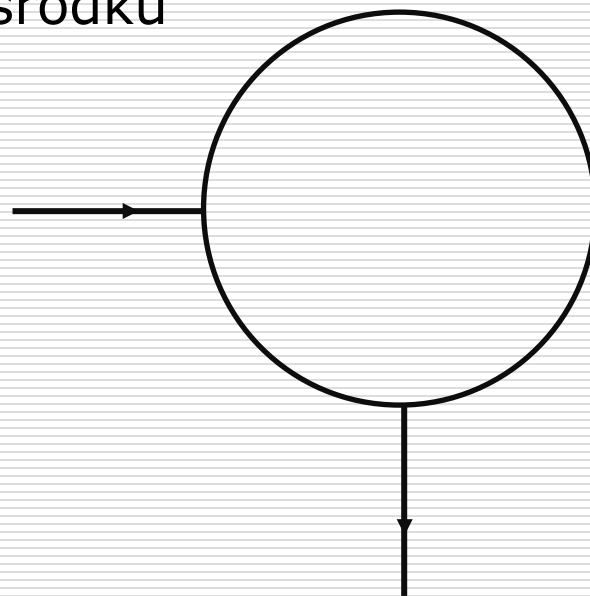
Jeżeli mamy N zwojów, każdy o powierzchni $S = \pi R^2$ to pole od cewki:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiS}{x^3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu_m}{x^3}$$

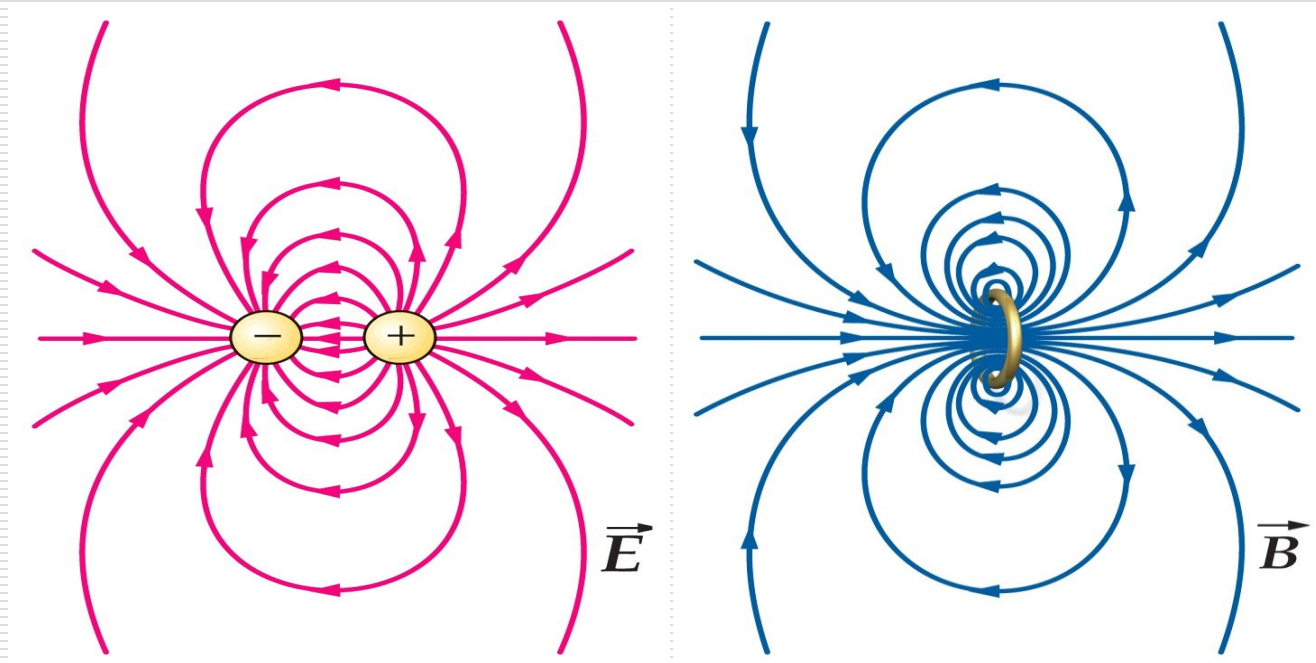
gdzie μ_m jest magnetycznym momentem dipolowym cewki o N -zwojach.

Przykład

- Do przewodzącej pętli o promieniu L dołączono dwa przewodniki o długości L przez które przepływa prąd o natężeniu I . Obliczyć indukcję w środku kołowej pętli.



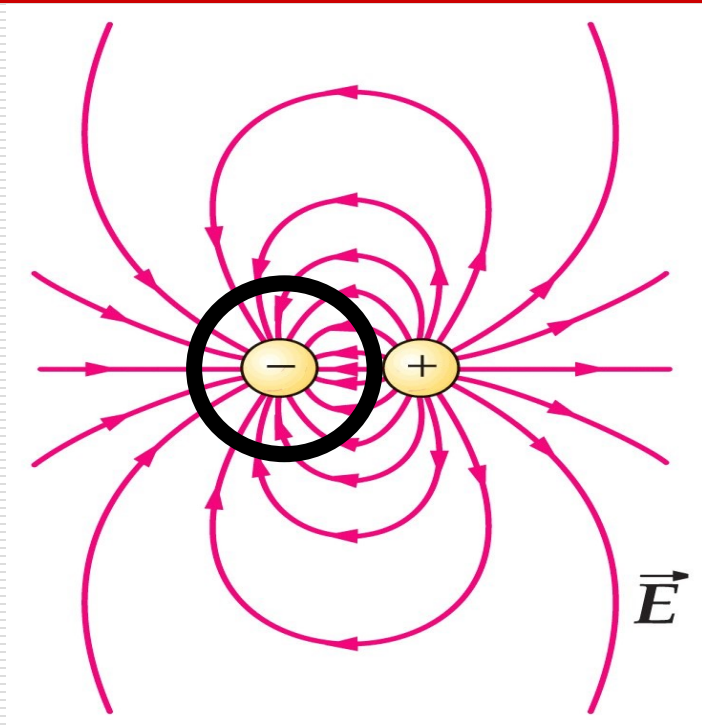
Pole magnetyczne a elektryczne



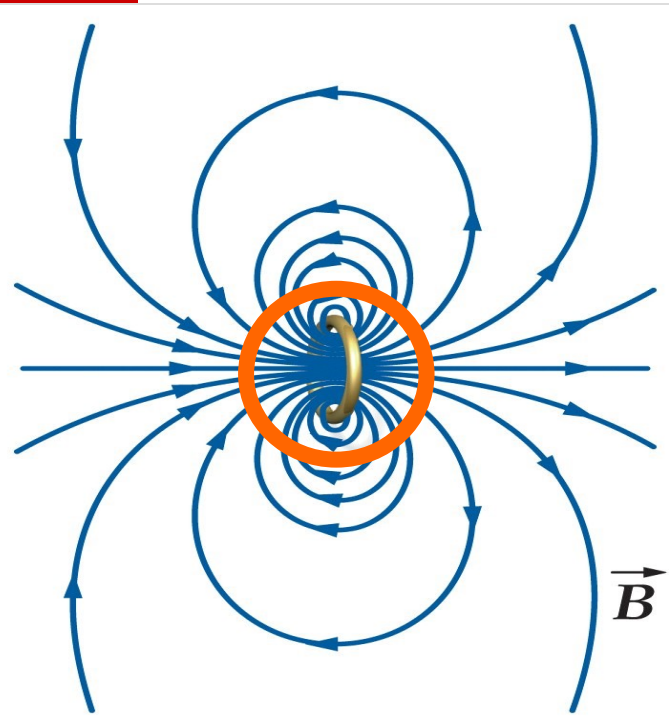
Linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunku elektrycznym

Linie pola magnetycznego tworzą zamknięte pętle. Na niczym się nie zaczynają i nie kończą

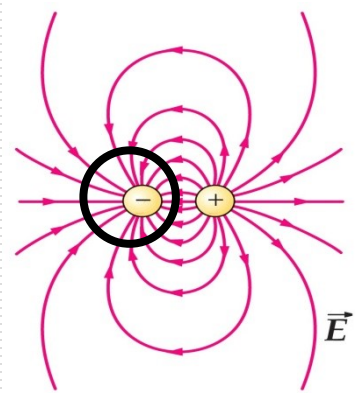
Prawo Gaussa dla magnetyzmu



Istnieje pojedynczy ładunek punktowy – monopol elektryczny



Brak monopoli magnetycznych. Magnes czy pętla z prądem stanowią dipol magnetyczny

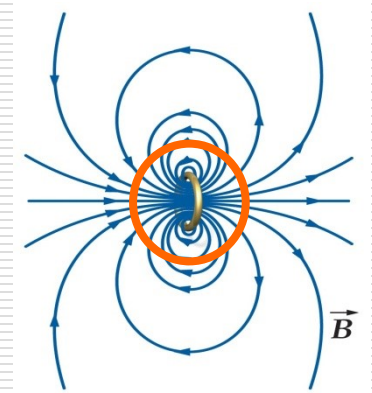


$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$



Treścią prawa Gaussa dla magnetyzmu jest fakt, że pole magnetyczne jest **beźródłowe**. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zero. Nie można wyodrębnić pojedynczego bieguna magnetycznego – **nie istnieją monopole magnetyczne**.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$$

Przypomnienie - operatory

Pole	Funkcja pola	Działanie na funkcji pola	Oznaczenie działania i określenie	Wynik działania
skalarne	skalar φ	gradient skalara	$\text{grad}\varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$	wektor
wektorowe	wektor	dywergencja wektora	$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	skalar
		rotacja wektora	$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	wektor

Twierdzenie Stokes'a

- Dla pola elektrycznego: podobnie jak twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego wiązało strumień pola przechodzący przez powierzchnię z dywergencją w punkcie:

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dV$$

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV$$

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

to twierdzenie Stokes'a wiąże krążenie wektora po krzywej C z rotacją w punkcie:

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{l} = \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \circ d\vec{S}$$

całka powierzchniowa, po powierzchni S ograniczonej krzywą $C \Leftrightarrow$ strumień!

□ Twierdzenie Stokes'a dla pola elektrycznego :

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \circ d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \circ d\vec{S}$$

□ Analogicznie twierdzenie Stokes'a dla pola magnetycznego:

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \circ d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} \circ d\vec{S}$$

Z prawa Ampera: $\int \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i$ oraz $i = \int_S \vec{j} \circ d\vec{S}$

a więc: $\int \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \circ d\vec{S}$



W zapisie różniczkowym $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Prawo Gaussa i Ampera w postaci całkowej i różniczkowej

	Pole elektrostatyczne	Pole magnetyczne
Prawo Gaussa	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \bigg \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \bigg \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$
Prawo Ampera		$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad \bigg \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Podsumowanie

- Pole magnetyczne w próżni:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{pole jest bezźródłowe}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{jest to pole wirowe}$$

- Pole magnetyczne w ośrodku:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j}$$

- Nie istnieją monopole magnetyczne – nie ma jednobiegunowości!