

# Wykład 16: Fala elektromagnetyczna

---

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

[szkla@agh.edu.pl](mailto:szkla@agh.edu.pl)

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

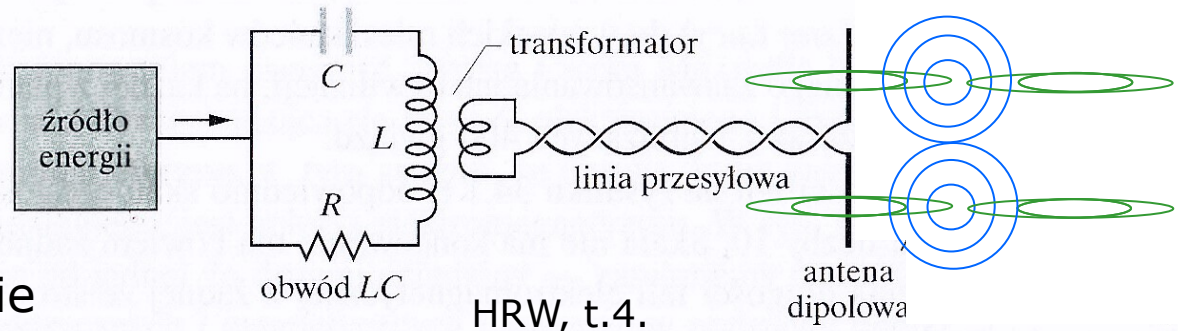
# Równania Maxwell'a

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gausa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Gausa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Ampere'a-Maxwella	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

# Fala elektromagnetyczna w próżni – emisja, propagacja, detekcja

1888r. H. Hertz

Zmienny prąd w obwodzie RLC wywołuje oscylacje ładunku w prętach anteny – związany z tym prąd w antenie sinusoidalnie zmienia swój kierunek i wartość



⇒ pojawia się wirowe pole magnetyczne

⇒ pojawia się wirowe pole elektryczne

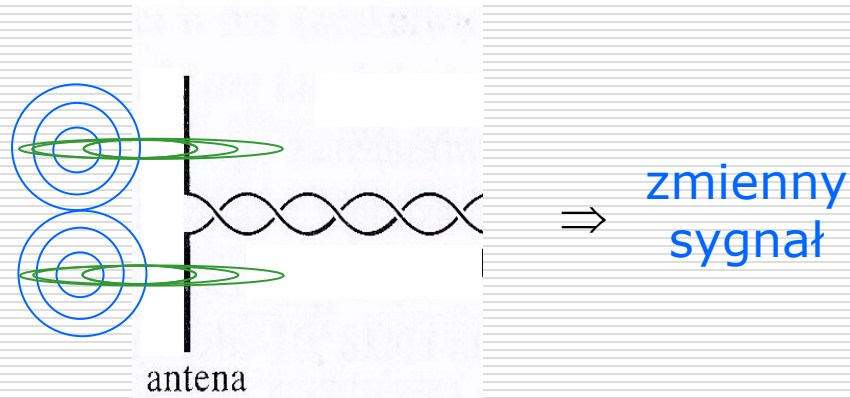
$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$

⇒ pojawia się wirowe pole magnetyczne

⇒ .....



pojawia się  
wirowe pole  
elektryczne



pojawienie się  
wirowe pola  
magnetycznego



pojawienie się  
zmiennego sygnału  
elektrycznego w antenie

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$



# Fala elektromagnetyczna w próżni – równanie falowe

□ Fala elektromagnetyczna opisana jest równaniami:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E(x,t)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B(x,t)$$

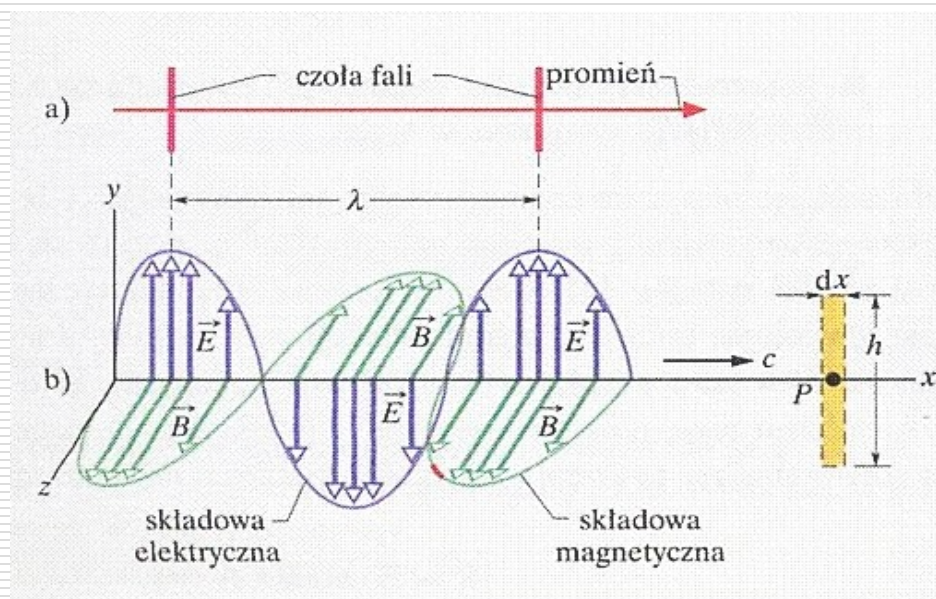
gdzie  $E(x,t) = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

$B(x,t) = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

i rozchodzi się w kierunku osi OX

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \hat{i} \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_0$$



$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{k}$$



$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

obliczamy drugie pochodne po  $t$  oraz  $x$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

Z kolei

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_0 - \hat{j} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow$$

obliczamy drugie pochodne po  $t$  oraz  $x$

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

oraz

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

poprzednio:

stąd



$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$



$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Dla 3 wymiarów

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

jest to „część elektryczna”  
równania falowego.

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

to równanie jest „częścią  
magnetyczną” równania falowego

dla fali elektromagnetycznej w próżni.

Przypominając równanie 3-wymiarowej fali płaskiej:  $\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$

zauważymy, że dla fali elektromagnetycznej w próżni

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{E_m}{B_m}$$

## Fala elektromagnetyczna w ośrodku

Równania fali dla ośrodka:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

gdzie  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  gdzie  $\epsilon$  — przenikalność ośrodka  
 $\epsilon_r$  — względna przenikalność

zatem  $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r = \mu \epsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left( c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right)$

Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej:  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

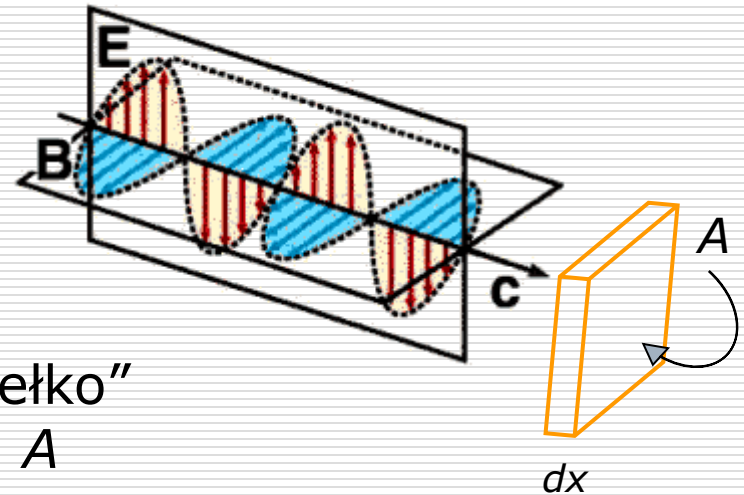


# Energia fali elektromagnetycznej

Gęstość energii pola E  $u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

Gęstość energii pola B  $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Energia fali przechodząca przez „pudełko”  
o grubości  $dx$  i powierzchni czołowej  $A$



$$dW = dW_E + dW_B = (u_E + u_B)A \cdot dx$$

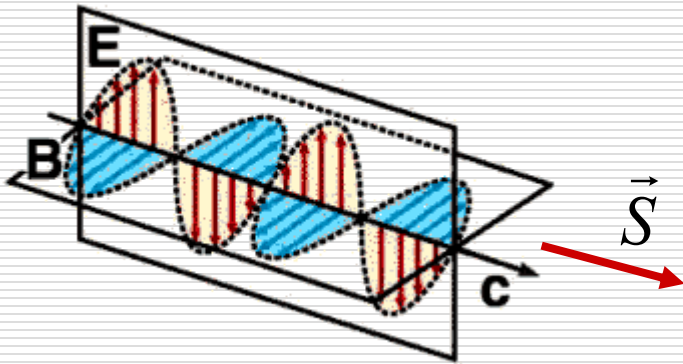
$$dW = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) A \cdot dx \quad dW = \epsilon_0 E^2 A dx = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} EB \cdot A \cdot c \cdot dt$$

Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię  $A$

$$\frac{dW}{dt \cdot A} = \frac{1}{\mu_0} EB = S \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

jest opisana przez wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



jest związana z szybkością przepływu energii przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu, a jego kierunek jest kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w danym punkcie. Wartości wektorów  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  to chwilowe wartości pól w rozpatrywanym punkcie.

Dla dużych częstotliwości  $E$  i  $B$  użyteczna jest *średnia wartość*  $S$ .

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \varepsilon_0 c E^2 \quad \text{zatem} \quad \bar{S} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}$$

Dla sinusoidalnie zmiennych  $E$  i  $B$   $\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}$  podobnie jak dla prądu zmiennego

$$\text{Zatem} \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$$

---

Promieniowanie słoneczne dostarcza do górnych warstw atmosfery z szybkością  $1350 \text{ J}/(\text{s}\cdot\text{m}^2)$ . Zakładając, że jest to pojedyncza fala sinusoidalna obliczyć maksymalne wartości  $E$  oraz  $B$ .

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = 1350 \frac{\text{J}}{\text{sm}^2} \quad \text{stąd} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} = 1,01 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

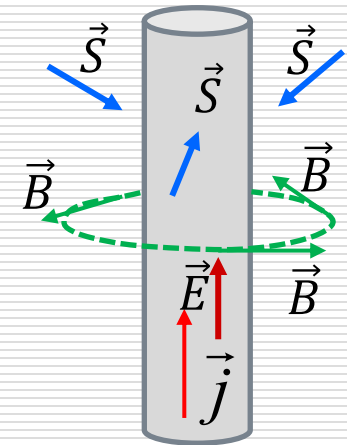
# Zadanie

W nieskończenie długim przewodniku o promieniu  $R$  i przewodnictwie właściwym  $\sigma$ , płynie prąd o gęstości  $j$  (jednakowej w całym przekroju poprzecznym przewodnika). Oblicz:

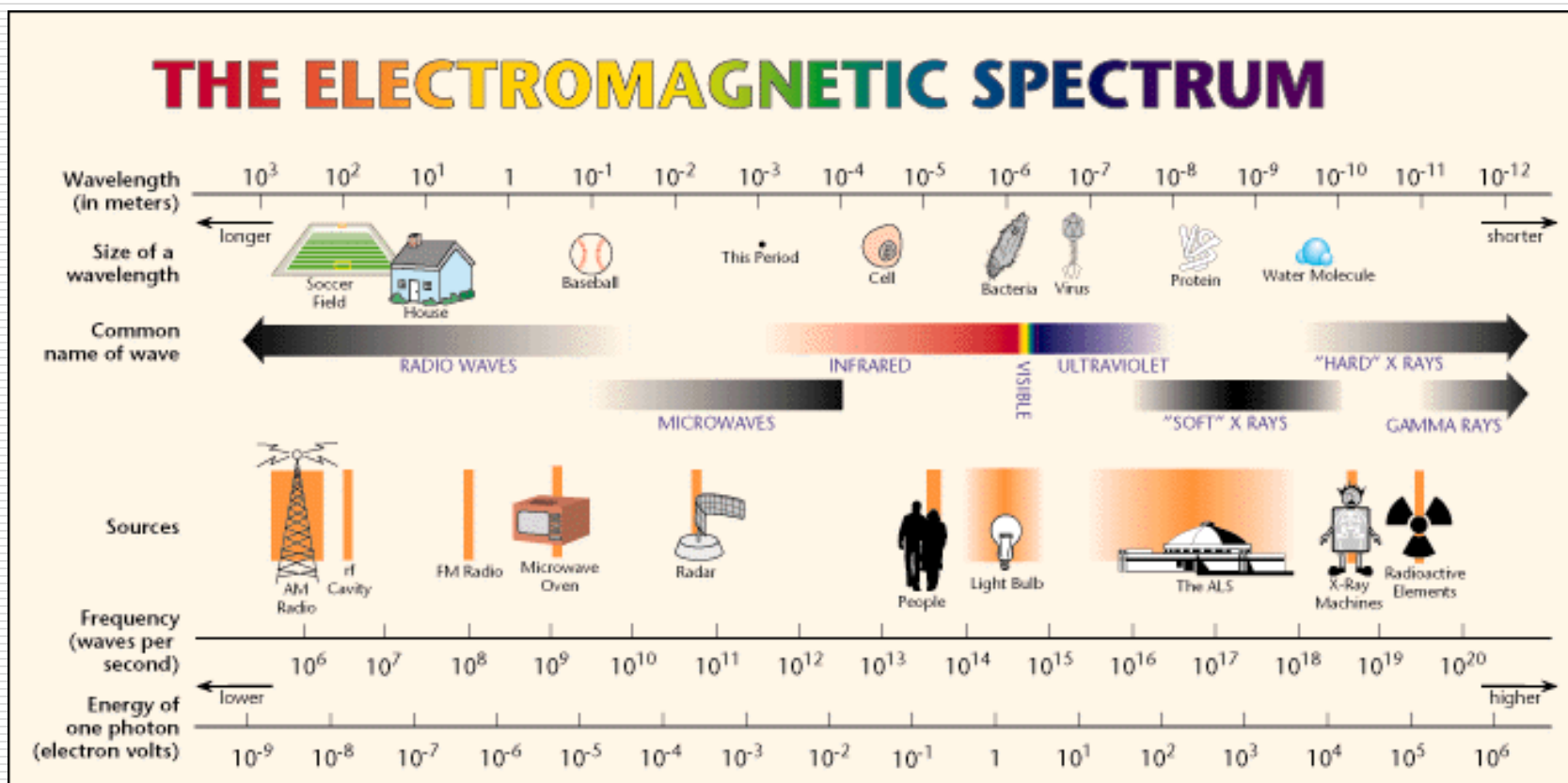
- natężenia pól  $E$  i  $B$  na powierzchni tego przewodnika.
- wartość wektora Poyntinga na powierzchni tego przewodnika.
- Uzupełnij rysunek przewodnika z prądem o wektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{S}$

$$\rho = \frac{E}{j} \Rightarrow E = \frac{j}{\sigma} \quad \oint B dl = \mu_0 i \quad i = \pi R^2 j \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j R}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad S = \frac{1}{\mu_0} \frac{j}{\sigma} \frac{\mu_0 j R}{2} = \frac{j^2 R}{2\sigma}$$



# Widmo fali elektromagnetycznej



# Mikrofale

Popularnie:

3 mm – 0,3 m

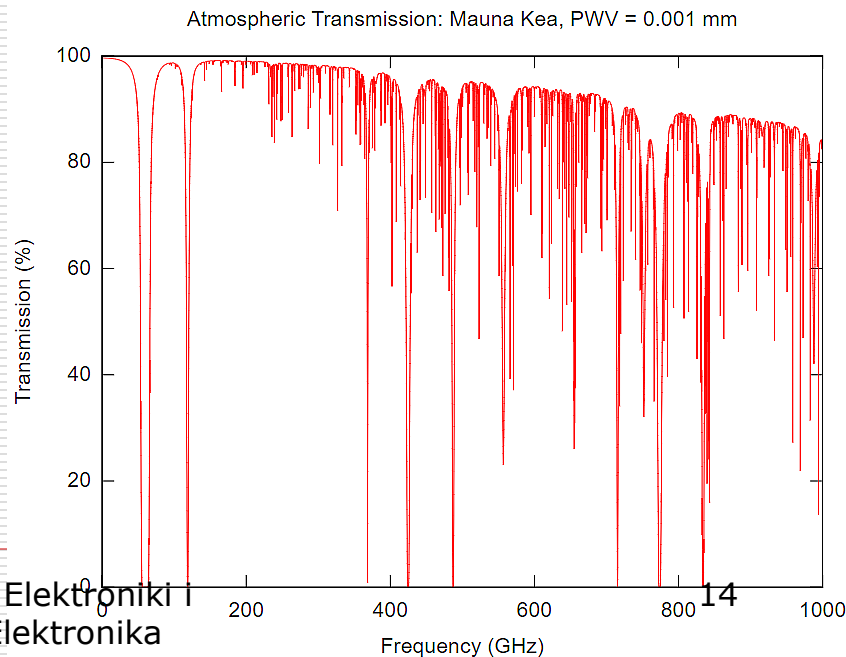
Przewidziane przez

J.C.Maxwella, odkryte przez H.Hertza (1886), szersze badania – dopiero XX w – radary.

Zastosowanie:

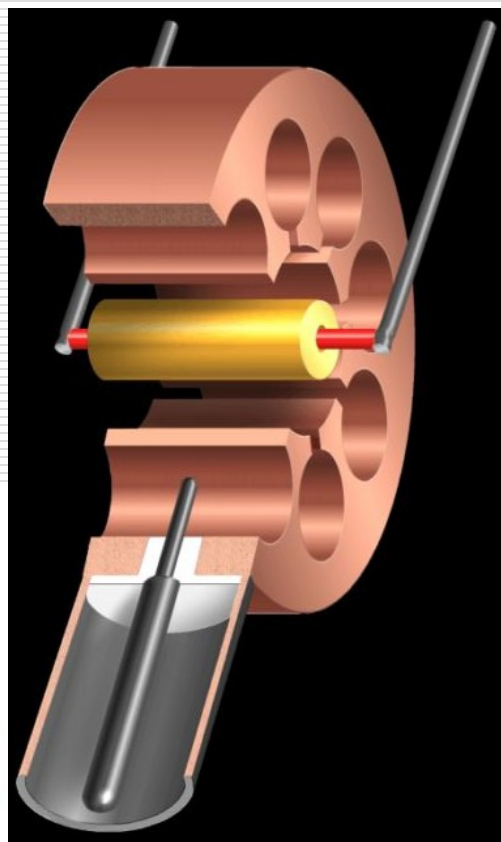
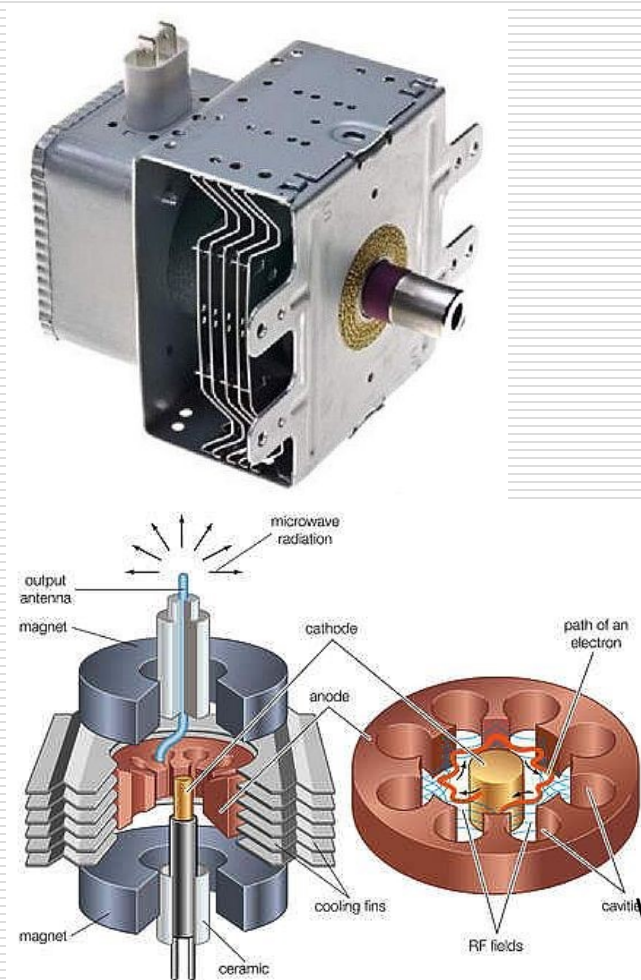
Radary (militarne, meteo, antykolizyjne), łączność radioliniowa punkt-punkt (b.słaba dyfrakcja), radioastronomia, nawigacja, energetyka, kuchenki mikrofalowe.

Electromagnetic spectrum			
Name	Wavelength	Frequency (Hz)	Photon energy (eV)
Gamma ray	< 0.02 nm	> 15 EHz	> 62.1 keV
X-ray	0.01 nm – 10 nm	30 EHz – 30 PHz	124 keV – 124 eV
Ultraviolet	10 nm – 400 nm	30 PHz – 750 THz	124 eV – 3 eV
Visible light	390 nm – 750 nm	770 THz – 400 THz	3.2 eV – 1.7 eV
Infrared	750 nm – 1 mm	400 THz – 300 GHz	1.7 eV – 1.24 meV
<b>Microwave</b>	1 mm – 1 m	300 GHz – 300 MHz	1.24 meV – 1.24 $\mu$ eV
Radio	1 m – 100 km	300 MHz – 3 kHz	1.24 $\mu$ eV – 12.4 feV



# Emisja mikrofal.

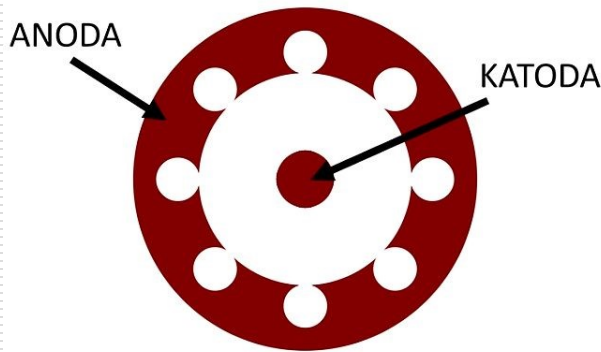
Źródła mikrofal wykorzystują ruch balistyczny elektronów w próżni pod wpływem pól elektrycznych i magnetycznych. Są to np. magnetrony (stosowane w kuchenkach mikrofalowych), czy klistrony (wąskopasmowa lampę mikrofalowa).



400 kW klistron

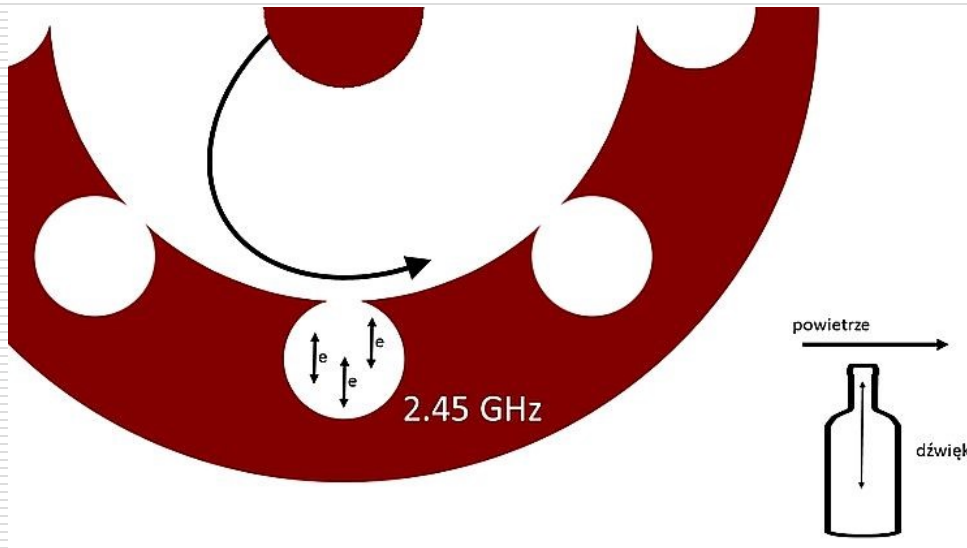
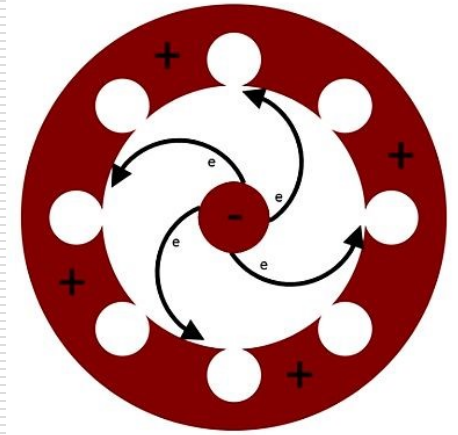


# Zasada działania magnetronu



Tor elektronów jest zakrzywiany polem magnetycznym.

Gdy elektrony omiatają te szczeliny, indukują pole radiowe wysokiej częstotliwości w każdej wnęce rezonansowej.



Prądy oscylacyjne przepływające wokół wnęk powodują powstawanie dużych ilości energii mikrofalowej o częstotliwości radiowej we wnękach. Wnęki są otwarte na jednym końcu, więc cały mechanizm tworzy pojedynczy, większy oscylator mikrofalowy.



Część energii o częstotliwości radiowej jest wydobywana przez krótką antenę, która jest podłączona do falowodu (metalowa rura, zwykle o przekroju prostokątnym). Falowód kieruje wydobytą energię RF do obszaru, którym może być komora gotowania w kuchence mikrofalowej lub antena w przypadku radaru.



## Źródła mikrofalowe małej mocy

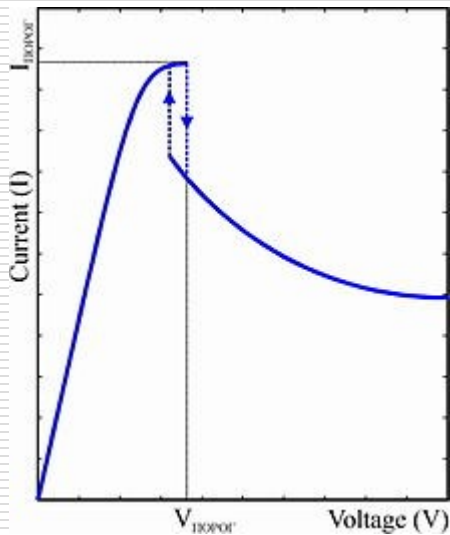
Tranzystory polowe, diody tunelowe, diody Gunna, diody IMPATT, masery.



Radarowy miernik szybkości z diodą Gunna

„Dioda” Gunna (GaAs) składa się z dwóch bardzo silnie domieszkowanych obszarów typu „n” i cienkiego obszaru między nimi o niskiej koncentracji domieszek.

Gdy natężenie pola elektrycznego w osiągnie wartość krytyczną na elektrodzie ujemnej, wtedy tworzony jest obszar z niską ruchliwością elektronów - o ujemnej rezystancji: wzrost  $U \Rightarrow$  spadek  $I$ .

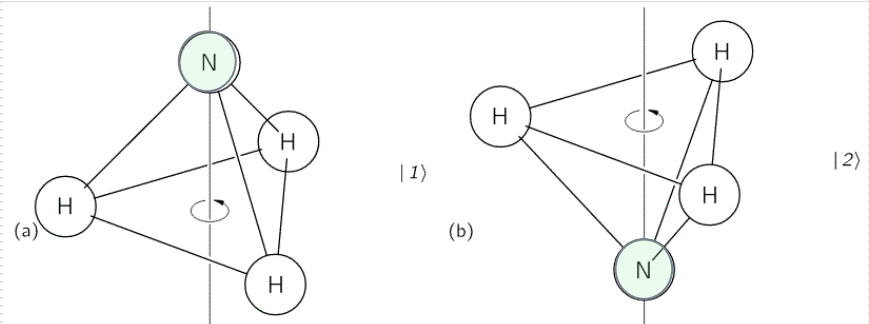


Po dotarciu tego obszaru do elektrody dodatniej, proces kolejnego tworzenia się obszaru o małej ruchliwości elektronów następuje cyklicznie, dzięki czemu są wytwarzane drgania, których częstotliwość może dochodzić do 100 GHz.

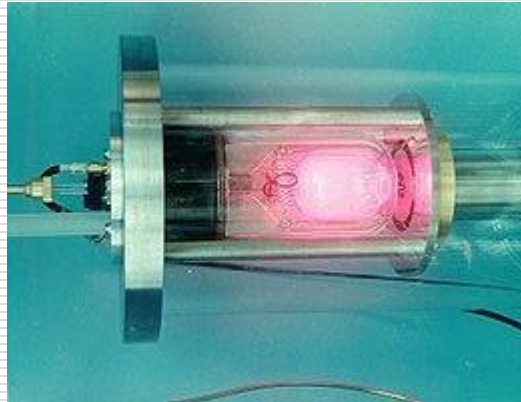
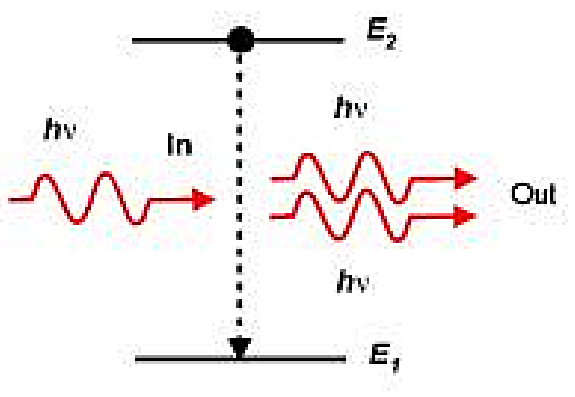


## Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

W maserze gazowym gaz podgrzewany jest do wysokiej temperatury. Cząsteczki w procesie wzbudzenia uzyskują różne wartości energii. Konieczne jest odseparowanie cząstek wzbudzonych od tych w stanie podstawowym. W silnym, zmiennym polu elektrostatycznym cząsteczki w stanie podstawowym są odchylane, a te wzbudzone przemieszczają się okresowo w kierunku rezonatora dostrojonego do częstotliwości 24 GHz.



W rezonatorze następuje emisja fotonów i przejście do stanu podstawowego  $\text{NH}_3$  i inicjując proces emisji samopodtrzymującego się promieniowania mikrofalowego.

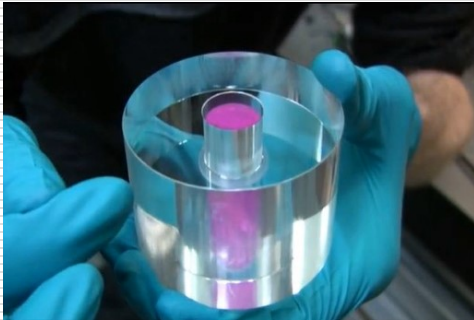


Maser wodorowy



C.Townes, J.P.Gordon  
1951 – amoniak,  
 $\lambda=1,26$  mm

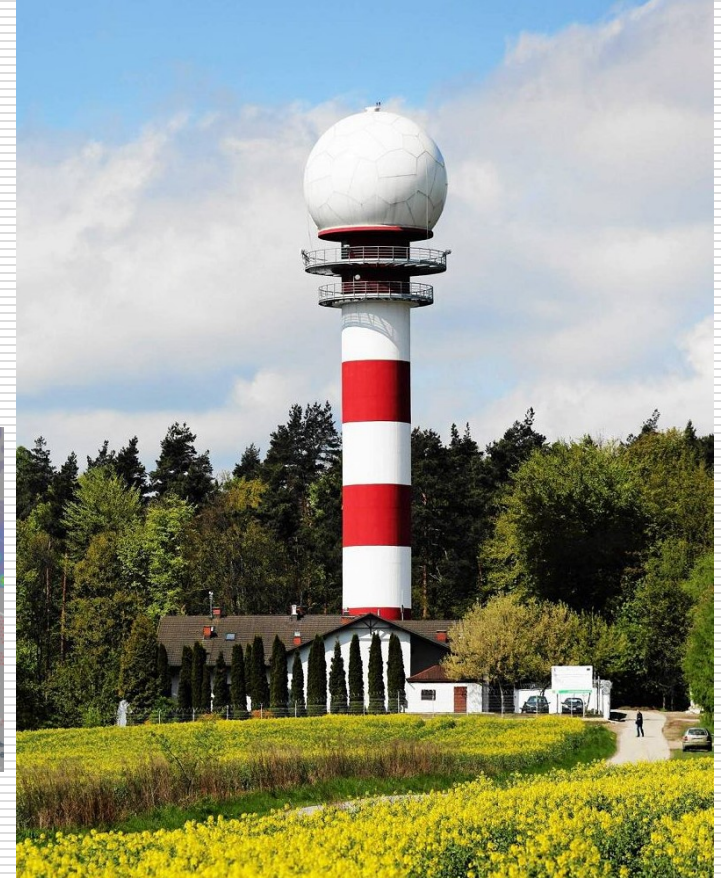
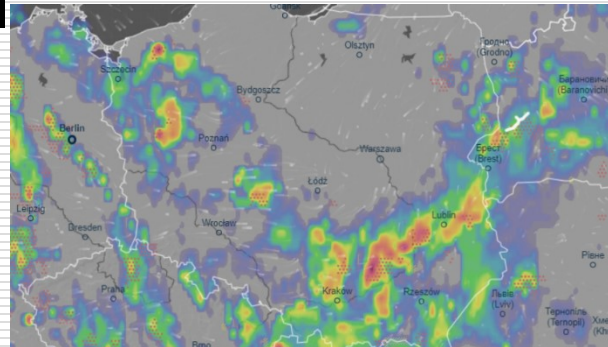
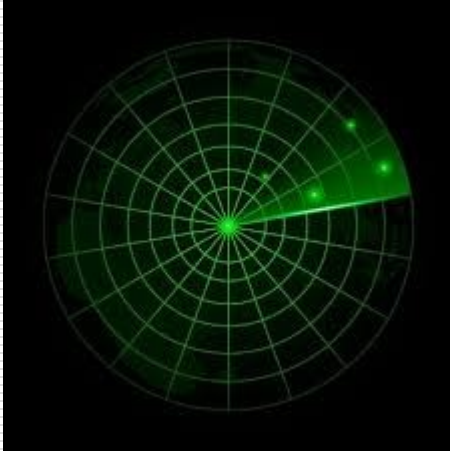
Maser amoniakalny – wąskie pasmo przenoszenia, bardzo mały zakres przestrajanania i moc wyjściowa  $< 10^{-9}$  W



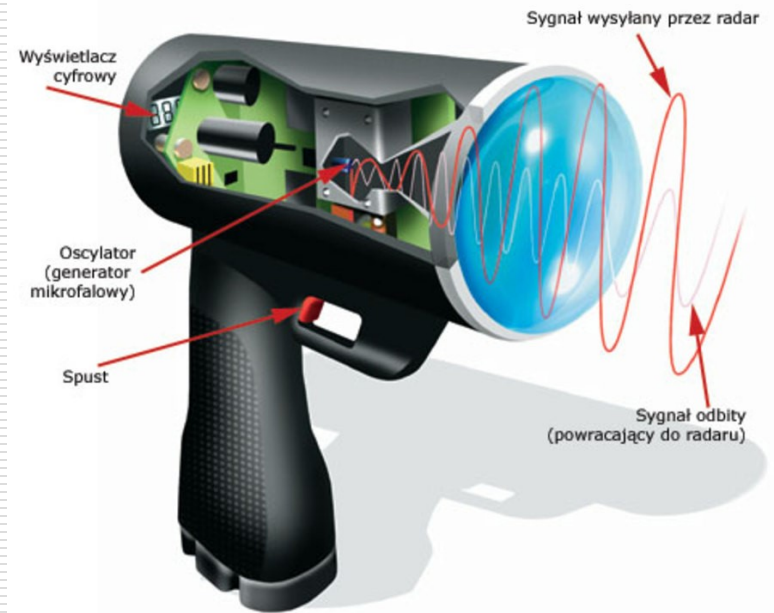
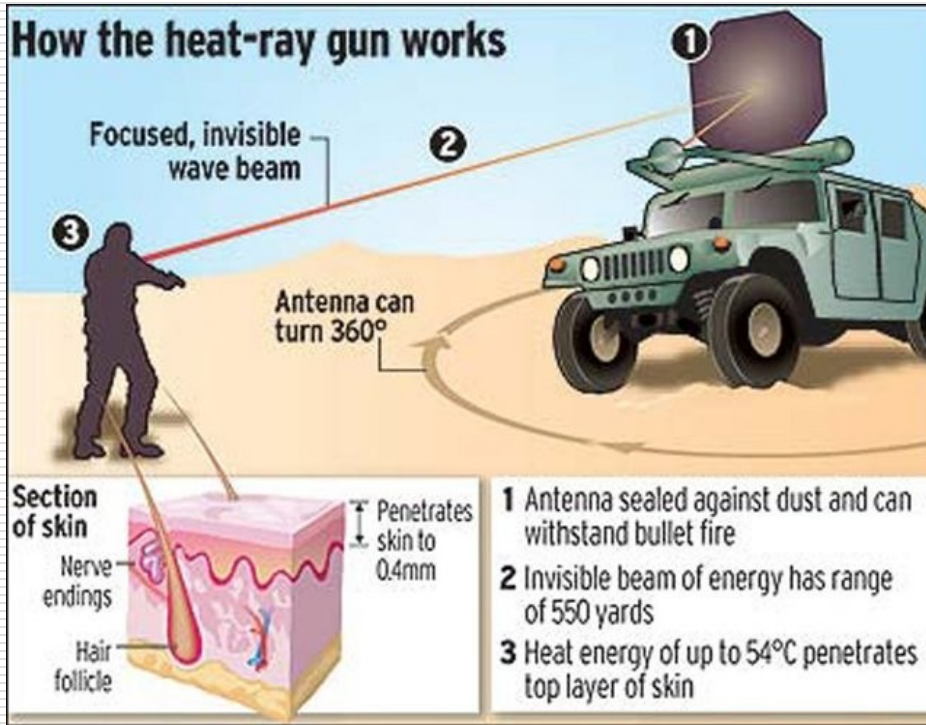
2012 r. - maser krystaliczny zamiast rubinu, kryształ p-terfenylu wzbogaconym pentacenenem – pracujący w temp. pokojowej, nie wymaga pola magnetycznego jak maser rubinowy – podobne własności jak rubin w temp. kilku Kelwinów.

# Niektóre zastosowania mikrofal

- Radary ( $f = 300 \text{ MHz} \div 300 \text{ GHz}$ ;  $\lambda \approx 300 \div 7,5 \text{ mm}$  )



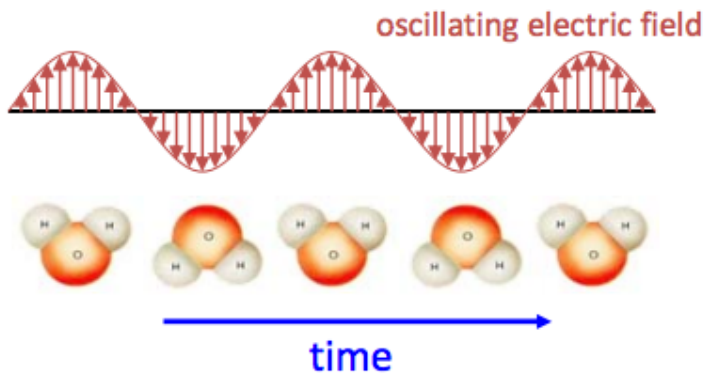
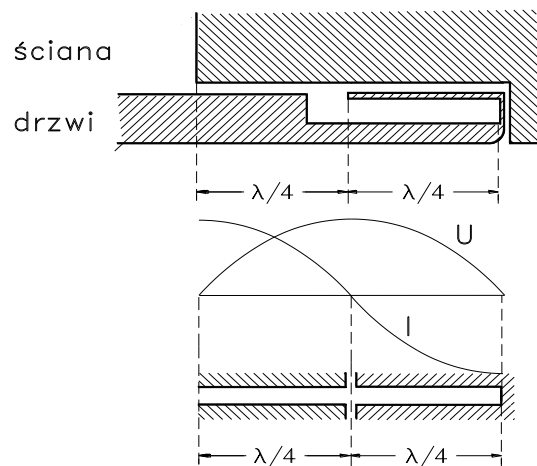
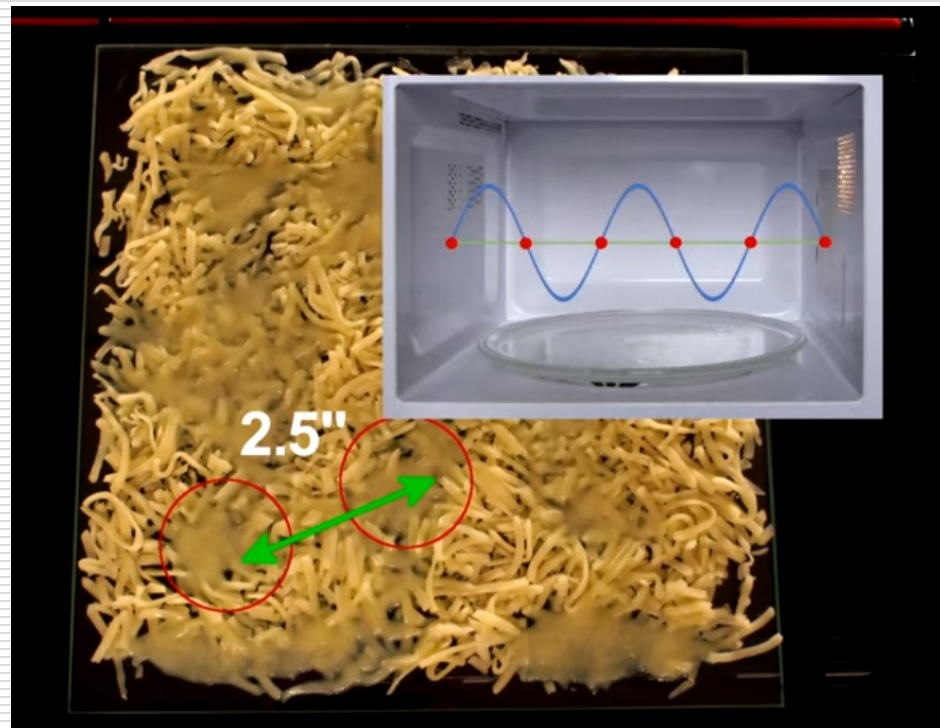
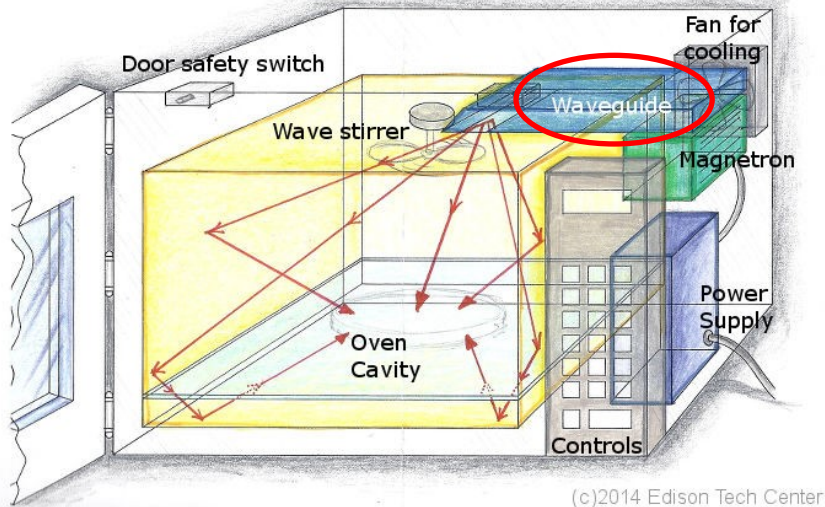
- Pomiar prędkości ( $f = 24,125 \text{ GHz}$ ;  $\lambda \approx 12,5 \text{ mm}$ ; zasięg max.ok. 800 m).
- Broń mikrofalowa ( $f = 94 \text{ GHz}$ ;  $\lambda \approx 3 \text{ mm}$ ; zasięg ok. 500 m).
- Kuchenka mikrofalowa ( $f = 2,45 \text{ GHz}$ ;  $\lambda \approx 12,2 \text{ cm}$ ; wnikanie ok. 2,5 cm).



1933 r. Westinghouse na Wystawie Światowej w Chicago. (60 MHz, 10 kW)

Komercyjna z lat `60  
moc 1,6 kW, 1,7 m wys.,  
cena ówczesna 3 000\$  
(odpowiada ok. 20 000\$  
w 2019)





$$\lambda/2 = 2,5 \cdot 2,54 \text{ cm}$$

$$f = 2,45 \text{ GHz}$$

$$V = f \cdot \lambda =$$

$$2,45 \cdot 12,7 \cdot 10^7 \text{ m/s} =$$

$$3,11 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx c$$

# Fala elektromagnetyczna - podsumowanie

---

□ Przykładowe równania fali elektromagnetycznej:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

□ Równania falowe (dla próżni):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{E_m}{B_m}$$

□ Równania falowe (dla ośrodka):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

□ Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

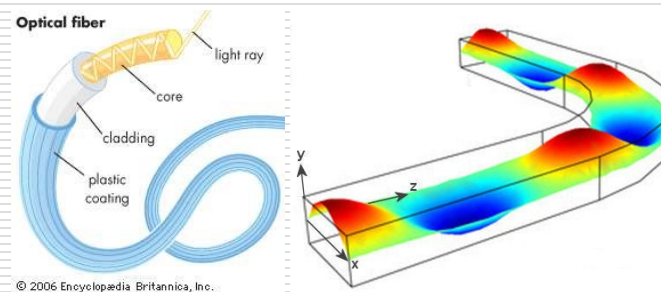
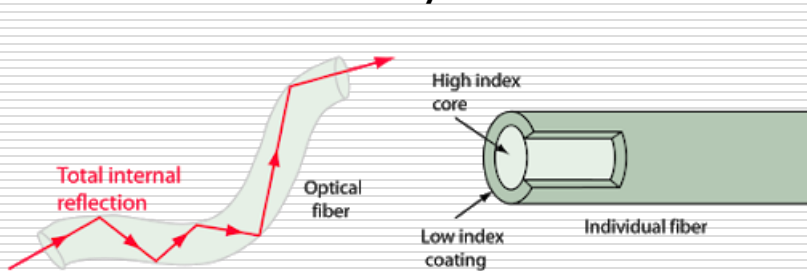
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

# Falowód

kanał do prowadzenia w przestrzeni **fal** mechanicznych lub elektromagnetycznych wzdłuż określonej drogi.

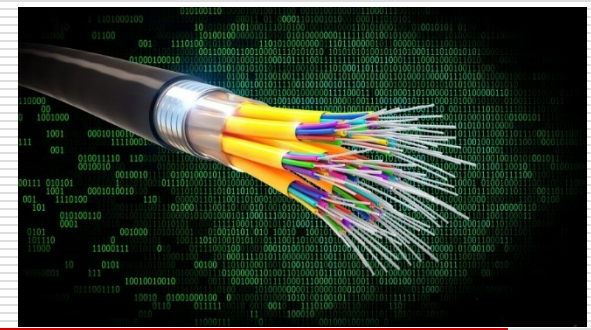


- akustyczny: mniejsze tłumienie, możliwa koncentracja energii gdy przekrój maleje. Istnieją naturalne falowody np. w oceanach – propagacja fal o małych częstotliwościach na setki kilometrów.
- fal elektromagnetycznych – gdy poprzeczne rozmiary falowodu  $\geq \lambda$ 
  - zamknięte – rury, - otwarte – przewód metalowy, pręt/rurka z dielektryka
  - dla dużych częstotliwości (radar, niskie radiowe/mikrofałe) – metalowe rury
  - dla wysokich częstotliwości radiowych – falowody dielektryczne
  - dla fal świetlnych – włókna światłowodowe.

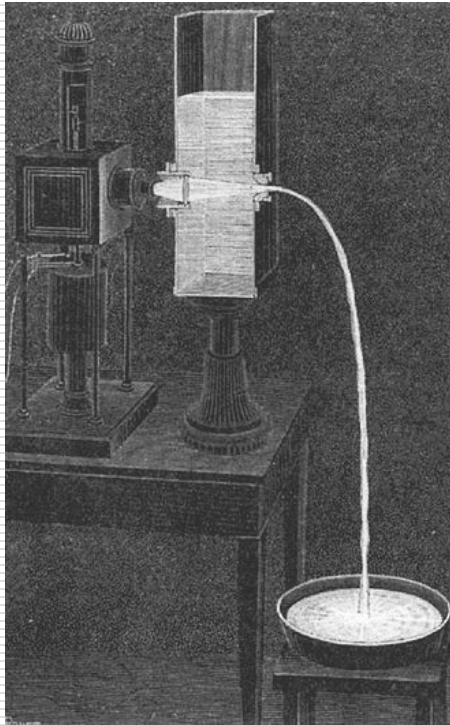




# Światłowód



1842 – D. Colladon  
– „*light pipe*”



1930 – pierwsza próba wykorzystania światłowodu do badań medycznych, ale dopiero w 1956 – pierwszy gastroskop.

1970 – zmniejszono tłumienie do 20 db/km, a 1977 – pierwszy światłowód telekomunikacyjny dł. 9 km w Turynie.

W Polsce – wytworzono pierwszy kabel światłowodowy w 1978r.

Szybkość przesyłu danych: 2013r. – 1,05 Pbit/s ( $10^{15}$  !)  
Najdłuższy światłowód – 39 000 km Europa-Azja-Australia.

W Polsce największa sieć – Orange – o długości ponad 100 tys. km.

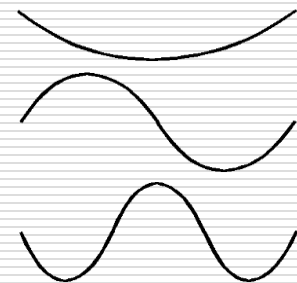


# Zasada działania:

Modulowana wiązka z lasera rozchodzi się wewnątrz włókna – szklanego, plastikowego lub półprzewodnikowego w sposób zależny od średnicy włókna:

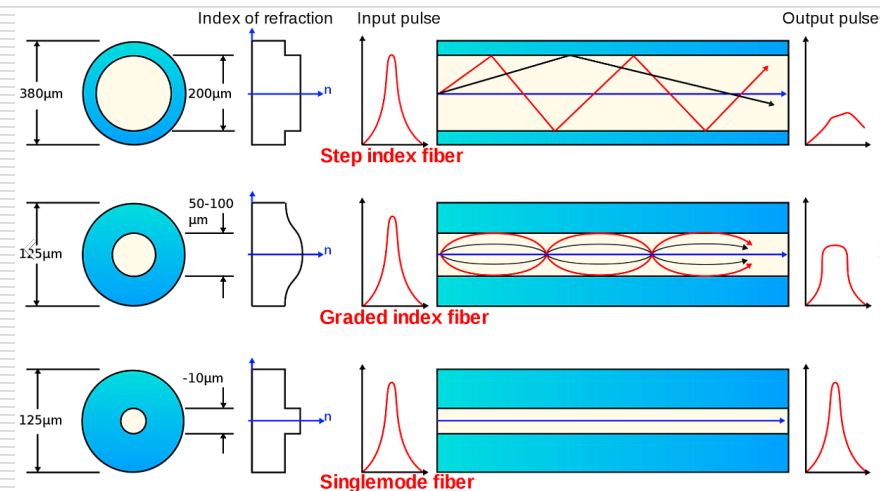
- średnica większa od długości światła (powyżej  $50\ \mu\text{m}$  – współczynnik załamania światłowodu jest większy niż osłony  $\Rightarrow$  bieg prostoliniowy wiązki tzw. światłowód wielomodowy – *MMF* (skokowy)
- jw. ale współczynnik załamania rdzenia o budowie warstwowej zmienia się w sposób ciągły (największy na osi), co powoduje krzywoliniowy bieg światła – światłowód gradientowy (też wielomodowy)
- średnica porównywalna lub mniejsza od długości światła ( $8\div 10\ \mu\text{m}$ ) – światło rozchodzi się jak fala rozchodząca się prawie równoległe do osi światłowodu – jednomodowego – *SMF*.

Mod fali - określona długość wzbudzonej fali, gdy rezonator pobudzany jest do drgań przez fale z pewnego zakresu długości.

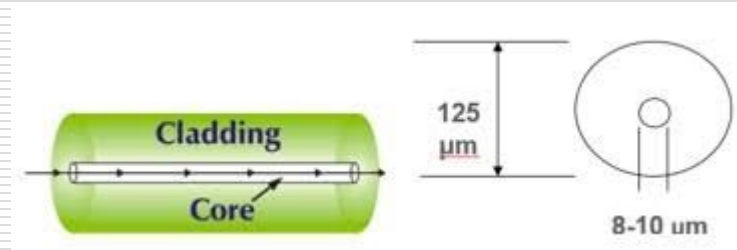


W światłowodzie wielomodowym fala o takiej samej długości fali może rozchodzić się wieloma drogami, zwanymi modami.

Różna prędkość modów w falowodzie  $\Rightarrow$  rozmycie paczki falowej – zniekształcenie i ograniczenie szybkości transmisji.



Rozchodzenie się światła w światłowodzie jednomodowym opisują równania Maxwell'a a nie prawa optyki geometrycznej.



Światłowody te stosowane są w dalekosiężnej telekomunikacji, bo do 100 km sygnał nie musi być regenerowany. Tłumienie w światłowodzie ze szkła Corning dla  $\lambda = 1500 \text{ nm}$  jest rzędu 0,17 dB/km.

## Ograniczenia transmisji światłowodowej:

- rozproszenie światła – fluktuacje gęstości rdzenia;
- uszkodzenia – mikro i makrozgięcia
- dyspersja (tzn.  $n$  zależy od  $f$ ) – rozmycie impulsu

