

Wykład 16: Indukcja

Dr inż. Zbigniew Szklarski

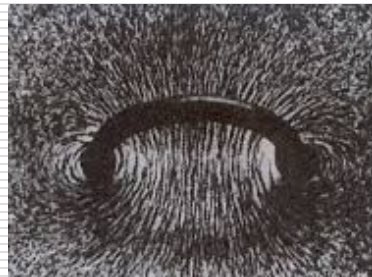
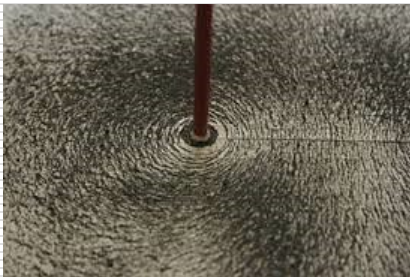
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

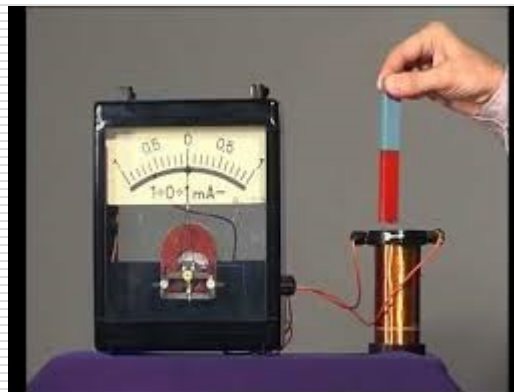
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Pole magnetyczne a prąd elektryczny

- Do tej pory omawiano skutki magnetyczne przepływu prądu:



- A czy pole magnetyczne może wywołać skutki elektryczne ?

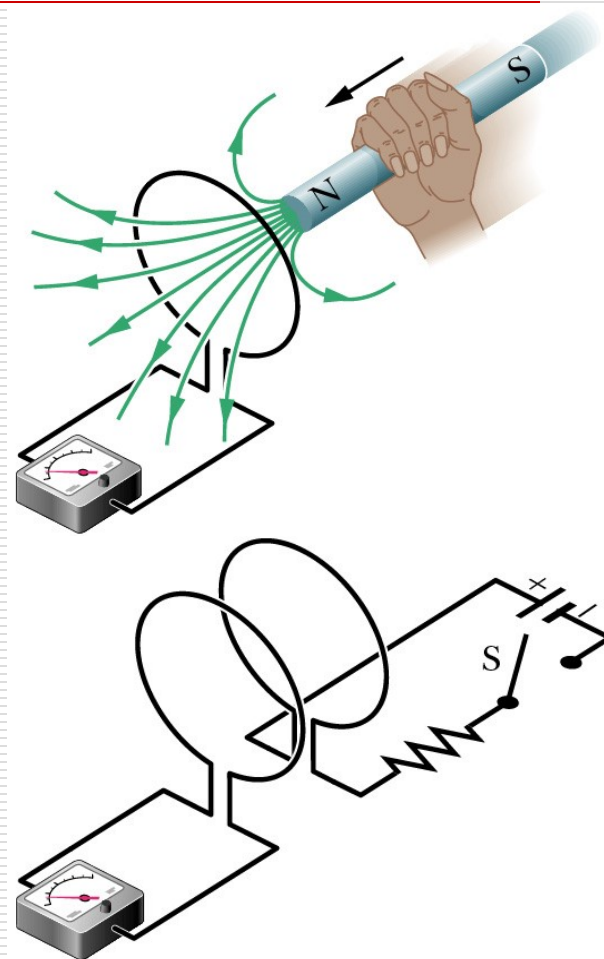


Prawo indukcji Faraday'a

- Czy pole magnetyczne może wywołać powstanie pola elektrycznego?
- Zmienny w czasie strumień pola magnetycznego Φ_B indukuje siłę elektromotoryczną ε .

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

- „-” związany z regułą Lenza
- Im większa szybkość zmian Φ_B , tym większa wartość SEM indukcji.



Przypomnienie:

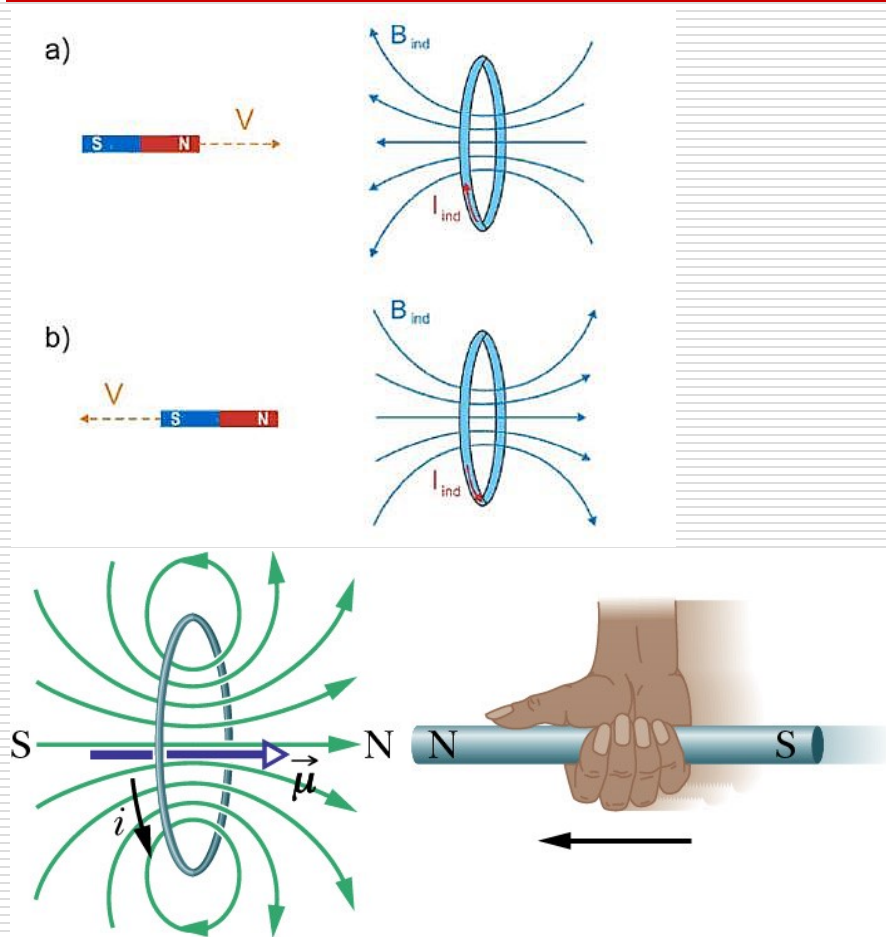
Strumień indukcji pola magnetycznego jest zdefiniowany jako całka po powierzchni S:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

a zatem istnieją trzy zasadnicze sposoby uzyskania indukowanej siły elektromotorycznej:

- ☐ zmiana indukcji pola B,
- ☐ zmiana powierzchni S,
- ☐ zmiana kąta pomiędzy B i wektorem powierzchni (obrót ramki w polu magnetycznym – prądnica)

Reguła Lenza



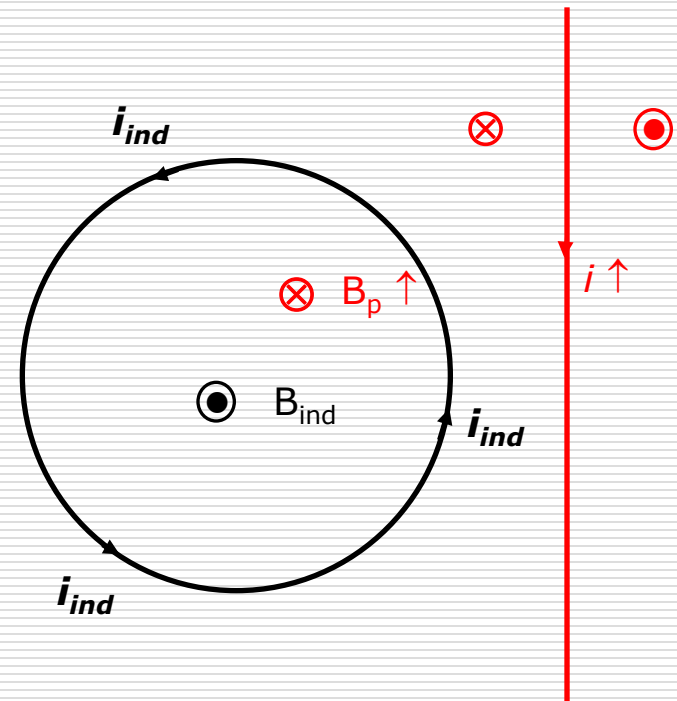
$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Przykład 1.

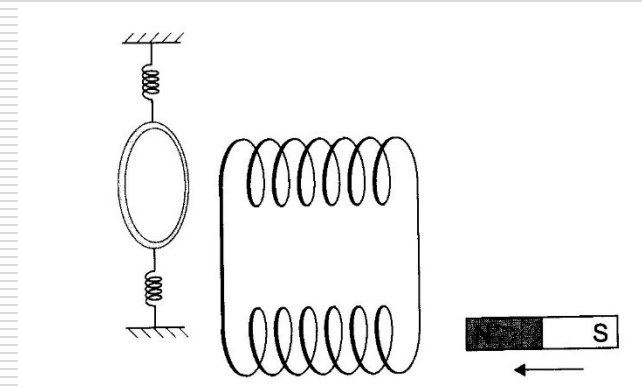
W prostoliniowym przewodniku płynie prąd elektryczny o natężeniu rosnącym liniowo.

Jaki będzie kierunek prądu, który wyindukuje się w kołowym przewodniku leżącym obok?

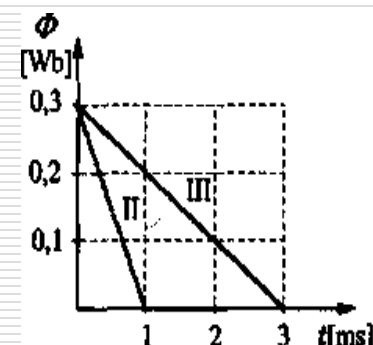
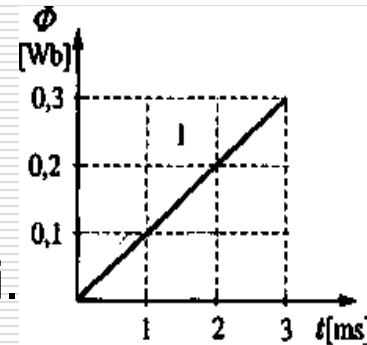


Przykład 2.

□ Dwie zwojnice nawinięte tak jak pokazuje rysunek, tworzą obwód zamknięty. Do dolnej zwojnicy zbliżamy magnes. Określić kierunek prądu indukcyjnego w zwojnicach oraz zachowanie umocowanego na sprężynkach pierścienia.

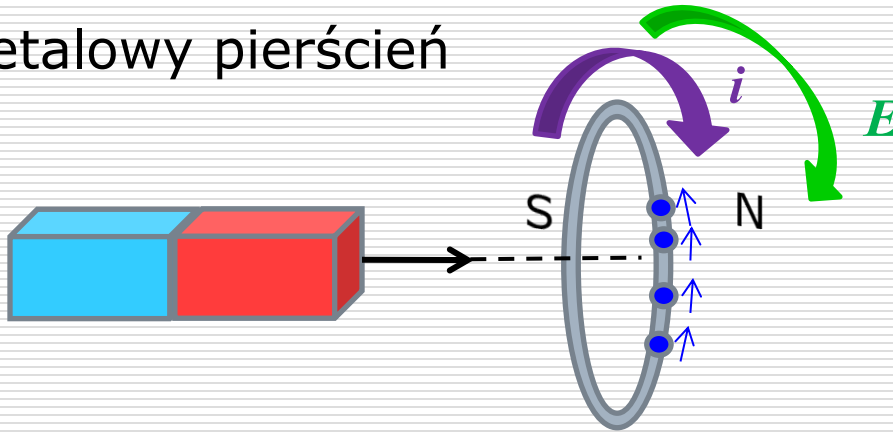


□ Poniższe wykresy przedstawiają zależność strumienia magnetycznego wytwarzanego wewnątrz przewodnika kołowego w funkcji czasu. Oblicz wartości wzbudzonych w przewodniku SEM indukcji.

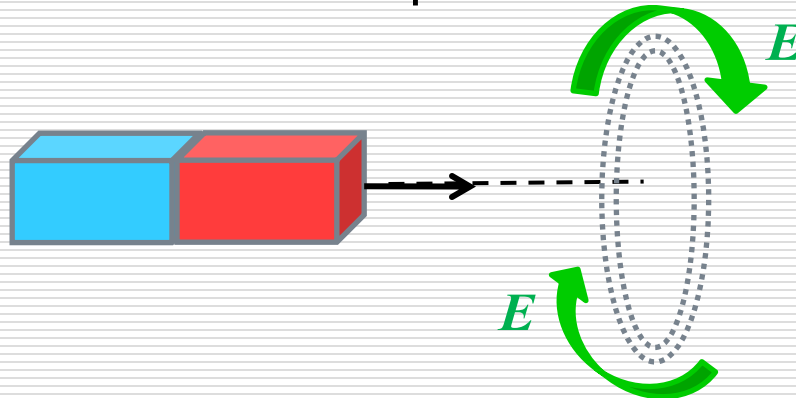


Indukcja bez przewodnika ?

- ❑ Metalowy pierścień



- ❑ A teraz ? Co powodowało ruch elektronów ?



Powstanie wirowe pole elektryczne !!

Przypomnienie: siła elektromotoryczna jest pracą przypadającą na jednostkowy ładunek wykonaną przez pole elektryczne (pole magnetyczne nie wykonuje pracy)

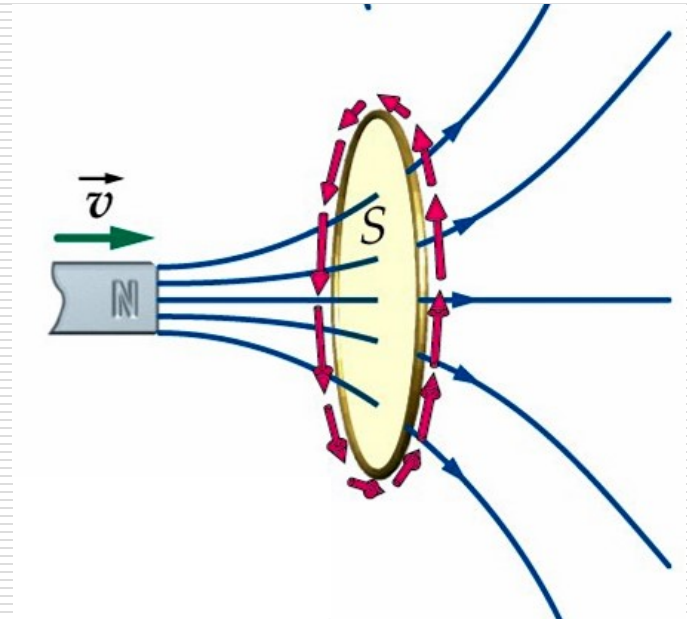
$$\varepsilon = \oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}}$$

Indukowana siła elektromotoryczna jest związana z pracą indukowanego pola elektrycznego a zatem

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

oraz
$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{S}}$$

Taka postać prawa Faraday'a stanowi kolejne z równań Maxwella w postaci całkowej



Podsumujmy dotychczasowe równania:

Prawo:	dla ośrodka	dla próżni
Gausa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$
Gausa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$
Ampere'a	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_o i$	?
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Własności SEM indukcji

- Indukowana SEM nie jest zlokalizowana, (np. pomiędzy biegunami źródła napięcia), lecz jest rozłożona w całym obwodzie.
- Można ją przedstawić jako całkę krzywoliniową po zamkniętym konturze z indukowanego pola elektrycznego.
- Całka ta jest różna od zera, więc indukowane pole elektryczne nie jest zachowawcze.
- Pole to nie ma potencjału ani powierzchni ekwipotencjalnych.
- Jeżeli w obszarze indukowanego pola elektrycznego umieścimy przewodnik i obwód zamkniemy, to zaobserwujemy indukowany prąd elektryczny. W przeciwnym przypadku można mówić tylko o sile elektromotorycznej.

Postać różniczkowa prawa Faraday'a

- Z twierdzenia Stokes'a

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \underline{(\mathbf{rot} \vec{\mathbf{E}})} \circ d\vec{\mathbf{S}}$$

- Z postaci całkowej prawa Faraday'a

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = - \frac{d}{dt} \int_S \underline{\vec{\mathbf{B}}} \circ d\vec{\mathbf{S}}$$

Porównując prawe strony równań otrzymujemy:

$$\mathbf{rot} \vec{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Zmienne w czasie pole magnetyczne indukuje pole elektryczne (wirowe, zmienne w czasie, nie zachowawcze)

Przypomnienie:

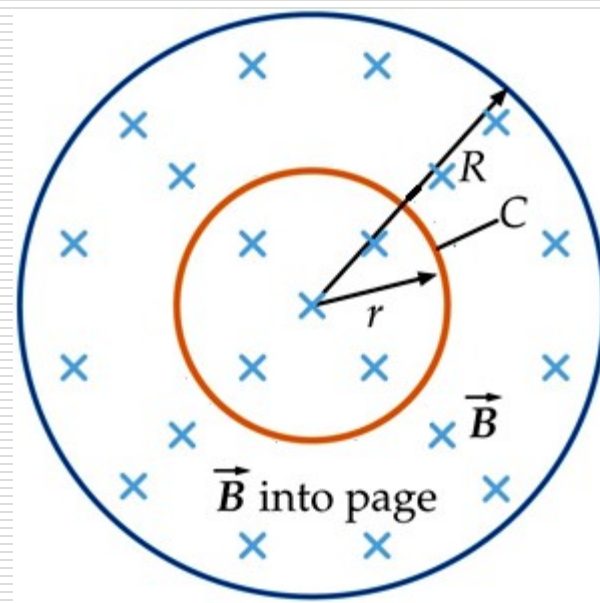
Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gausa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Gausa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Ampere'a	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	?
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Przykład 3.

W kołowym obszarze o promieniu R istnieje jednorodne pole magnetyczne, którego wektor indukcji jest prostopadły do płaszczyzny rysunku. Wartość indukcji pola magnetycznego zmienia się w czasie z szybkością $dB/dt > 0$.

Jaka jest wartość i kierunek wektora pola elektrycznego indukowanego na płaszczyźnie tego obszaru kołowego w odległości r od jego środka?

Rozważyć przypadki $r < R$ i $r > R$.



Rozwiązanie:

Z prawa Faraday'a

$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

dla $r < R$ strumień pola magnetycznego

$$\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = B \pi r^2$$

obliczamy krążenie pola elektrycznego

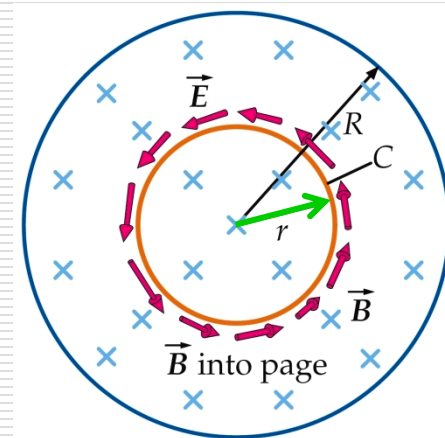
$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = E 2 \pi r$$

a zatem

$$E 2 \pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

stąd

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$



Dla $r > R$

strumień pola magnetycznego

$$\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = B \pi R^2$$

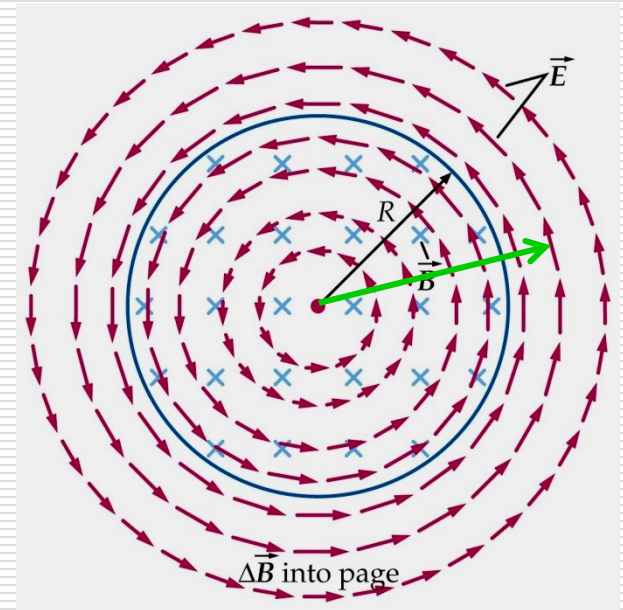
krążenie

pola elektrycznego

$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = E 2 \pi r$$

a zatem

$$E 2 \pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

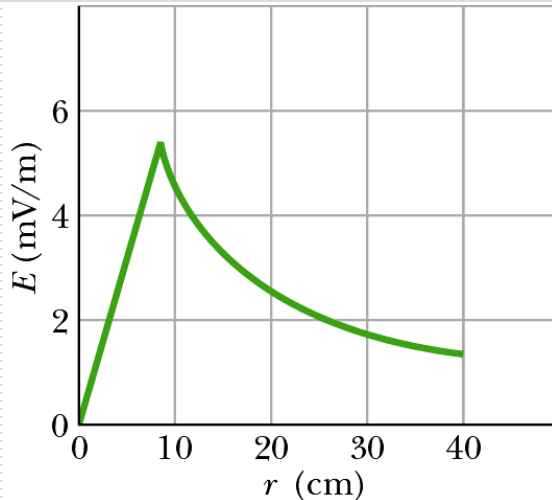


stąd

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

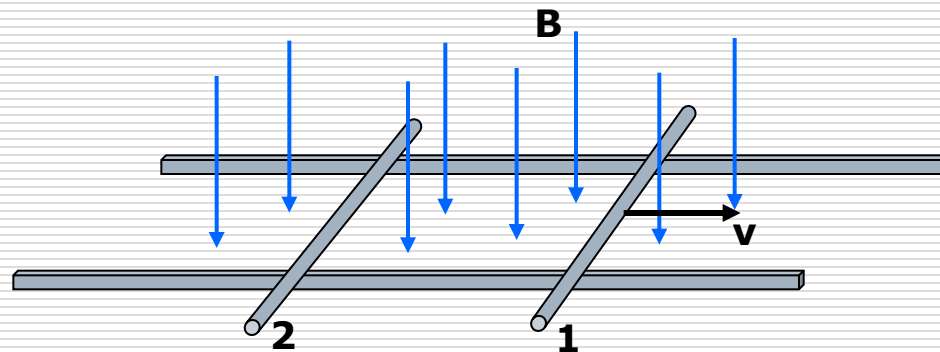
(dla $r < R$)

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$



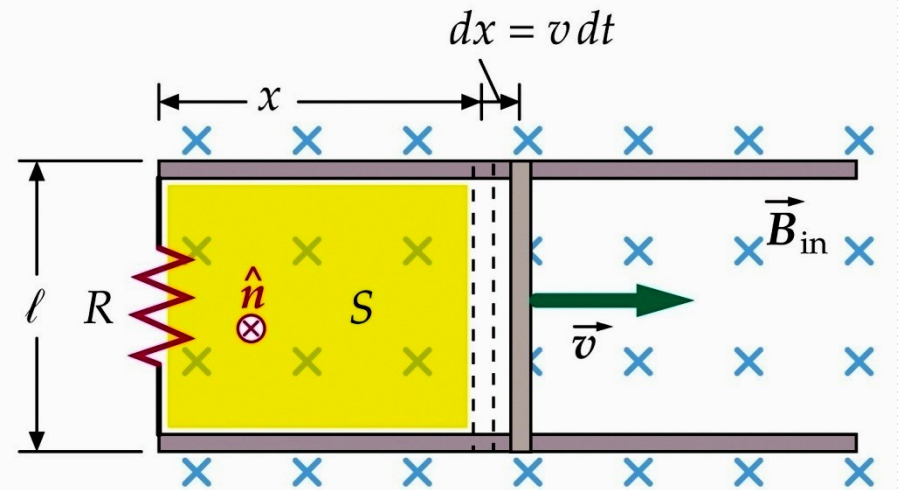
Zadanie 1.

- Na metalowych szynach znajdujących się w prostym doł polu magnetycznym leżą dwie metalowe poprzeczki – jak na rysunku. Poprzeczka **1** jest przesuwana w prawo ze stałą prędkością.
- Określ jak zachowa się poprzeczka **2**.
- Co się z nią stanie, gdy poprzeczka **1** będzie się przesuwac w lewo ?



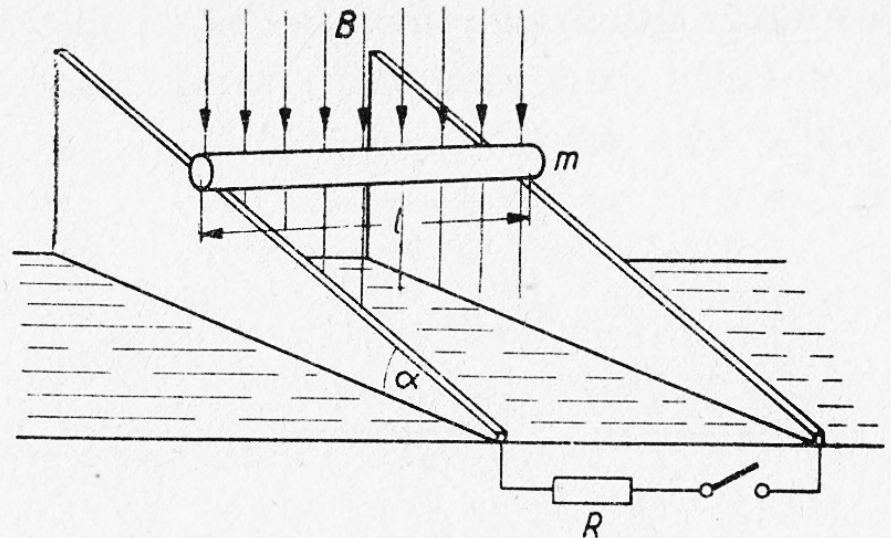
Zadanie 2.

- Obliczyć wartość siły elektromotorycznej indukowanej w obwodzie przedstawionym na rysunku. Pręt przesuwany jest w jednorodnym, stałym w czasie polu magnetycznym, ze stałą prędkością v . Pozostałe dane – na rysunku.
- Obliczyć wartość prądu płynącego w obwodzie.
- Obliczyć moc wydzielaną na rezystancji R .



Zadanie 3.

- Pręt o długości L i masie m położono na dwóch równoległych, nachylonych pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu szynach. Szyny znajdują się w pionowym, skierowanym **do** podłoża polu magnetycznym o indukcji B .
- Rozpatrzyć ruch pręta w przypadku, kiedy szyny są zwarte na jednych końcach oporem R
- oraz w przypadku szyn rozwartych.
Dane g , tarcie i rezystancję pręta pominąć.



Indukcyjność

Definicja: $L = -\frac{\varepsilon_L}{\frac{di}{dt}}$ Przypomnienie: pojemność $C = \frac{Q}{U}$

dla idealnego solenoidu

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S$$

dla kondensatora płaskiego

$$C = \varepsilon_o \frac{S}{d}$$

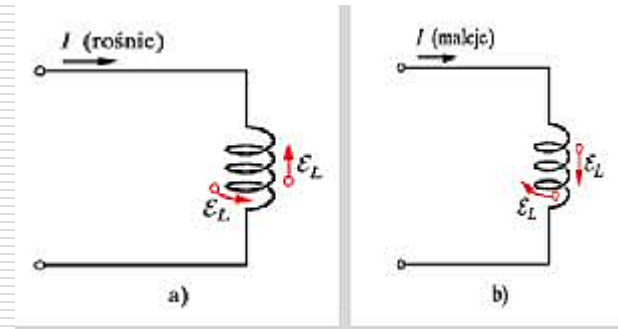
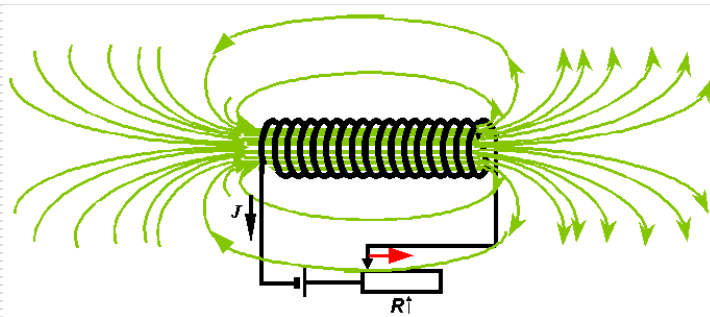
Indukcyjność podobnie jak pojemność zależy wyłącznie od parametrów geometrycznych cewki.

Można ją zwiększyć przez wprowadzenie rdzenia ferromagnetycznego o przenikalności magnetycznej μ .

$$L = \mu_o \mu \frac{N^2}{l} S = \mu_o \mu n^2 l S$$

Samoindukcja

Jeżeli prąd w obwodzie zmienia się w czasie, strumień pola magnetycznego w cewce też jest zmienny i indukowana siła elektromotoryczna przeciwdziała zmianom prądu.



wewnątrz idealnego
solenoidu o N zwojach i
długości l

$$B = \mu_o \frac{N}{l} i$$

Skoro $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$ to

strumień pola magnetycznego przez powierzchnię $N \cdot S$ (gdzie S -powierzchnia jednego zwoju) $\Phi_B = B \cdot N \cdot S$

$$\Phi_B = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2}{l} S}_{L} \cdot i$$

indukcyjność

$$\Phi_B = L \cdot i \quad \Leftarrow$$

Jednostka indukcyjności: 1H (henr) = 1Wb/A

Skoro występuje zmiana strumienia: $\frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

Jest to **Siła Elektromotoryczna Samoindukcji**

Obwód LC

- Z zasady zachowania energii:

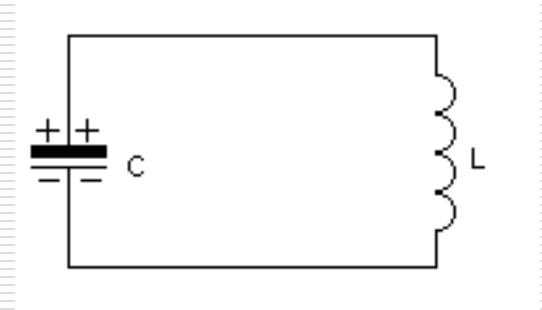
$$E = E_L + E_C = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0$$

$$\frac{2Li}{2} \frac{di}{dt} + \frac{2q}{2C} \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{skoro} \quad \frac{dq}{dt} = i \quad \text{oraz} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$Li \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$q = q_o \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



Obwód RC zasilany z ogniwa o SEM ε

□ Patrz wykład „Prąd elektryczny”
z zasady zachowania energii

do równania Kirchhoffa:

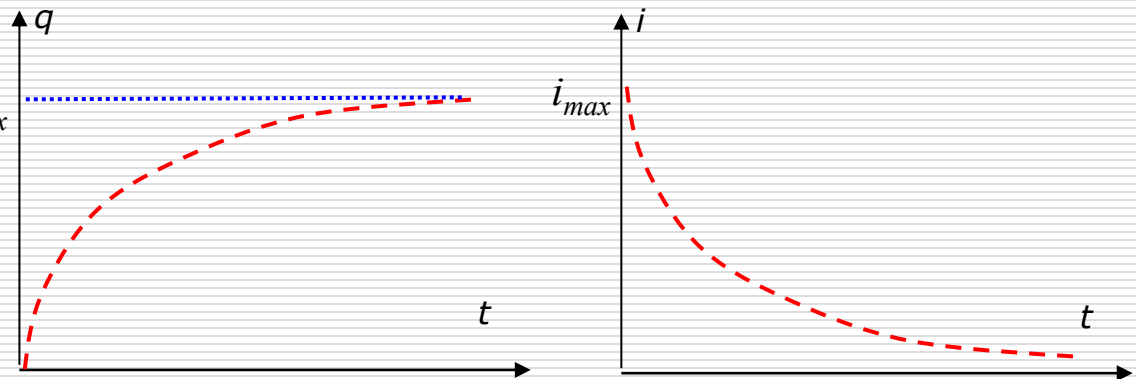
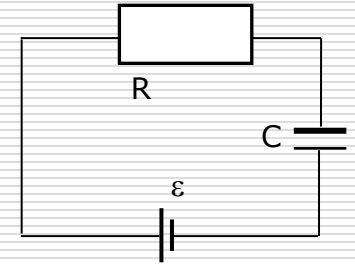
$$\varepsilon = iR + \frac{q}{C}$$
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

stąd $q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

oraz $i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

gdzie $q_{\max} = C\varepsilon$

$$i_{\max} = \frac{\varepsilon}{R}$$



Obwód RLC

□ z II prawo Kirchhoffa:

$$U_c + U_R + U_L = 0 \Rightarrow \frac{q}{c} + iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

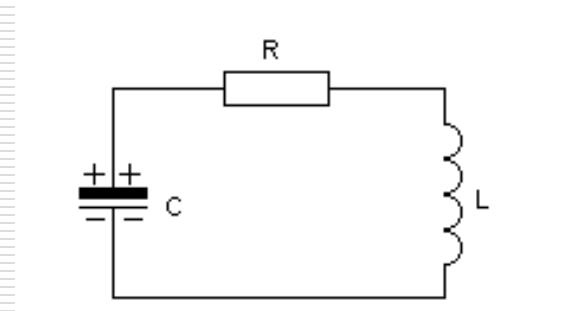
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

podstawiając $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\beta = \frac{R}{2L}$ otrzymujemy

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Rozwiązanie: $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

gdzie $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$



logarytmiczny dekrement
tłumienia:

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\lambda = \ln \frac{q_0 e^{-\beta \cdot t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta \cdot T$$

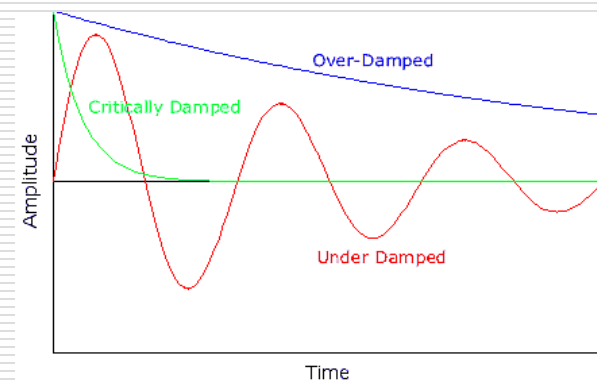
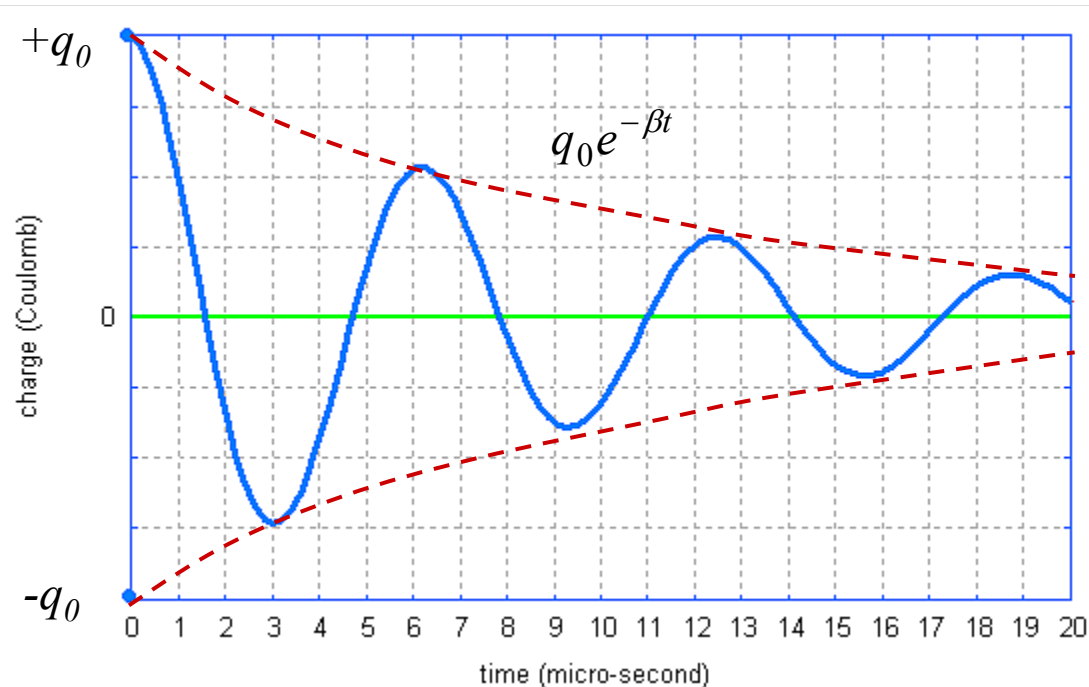
$$\lambda = \frac{R}{2L} T \quad \text{gdzie}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

czyli

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\text{gdy } \omega_0 \geq \beta \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} \geq \frac{R}{2L} \Rightarrow R_{kryt} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Dygresja „dekrementowa”

□ Co to znaczy, że $\lambda = 2/100$?

czyli amplituda drgań zmniejszy się po 100 drganiach k razy:

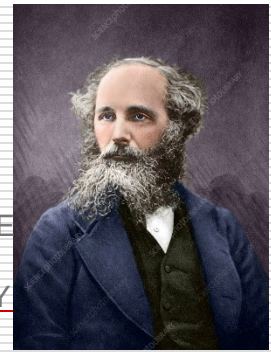
skoro $\lambda = \text{const}$ to dla dwóch dowolnych drgań m i n (np. 1 i 101):

$$\lambda = \frac{1}{m-n} \ln \frac{A_n}{A_m} \Rightarrow \ln \frac{A_n}{A_m} = \lambda(m-n)$$
$$\Rightarrow \frac{A_n}{A_m} = k = e^{\lambda(m-n)} = e^{0,02 \cdot 100} = e^2 \approx 7,39$$

Po 100 drganiach amplituda zmniejszy się 7,39 razy

Prawo Amper'a-Maxwella

SCIENCE
PHOTO
LIBRARY



1831-1879

- Czy podczas ładowania kondensatora coś przepływa między okładkami ?

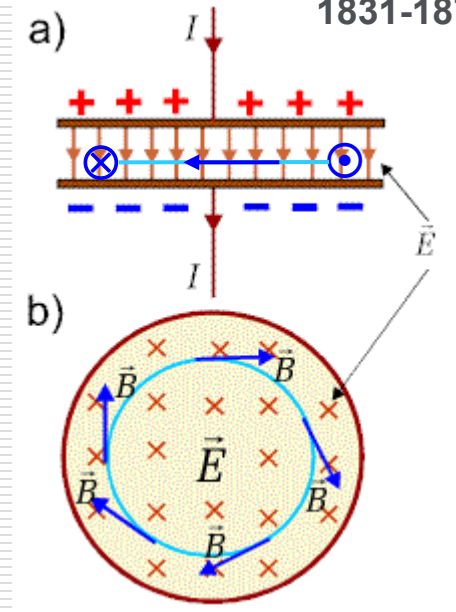
Z prawa Gaussa wynika że $\rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$

- Zmiana ładunku w kondensatorze

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dt} \Rightarrow i_{prz} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

prąd przesunięcia

- Prąd płynący przez kondensator to zmiana w czasie strumienia pola elektrycznego – zachowana jest ciągłość prądu w obwodzie z kondensatorem
- Mogą istnieć równocześnie oba typy prądów – prąd uogólniony $i_u = i + i_{prz}$



- Podstawiając prąd uogólniony do prawa Amper'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_u \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- w postaci różniczkowej $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Powodem powstania wirowego pola magnetycznego jest prąd elektryczny i/lub zmienne pole elektryczne

- Gdy kondensator zawiera dielektryk

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i + \mu \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

μ, ε - przenikalności ośrodka

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Równania Maxwell'a

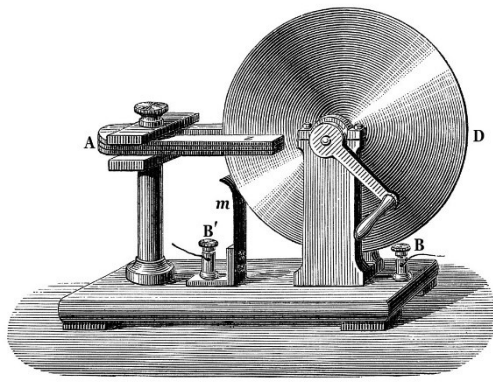
Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gausa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Gausa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Ampere'a-Maxwella	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Praktyczne zastosowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej

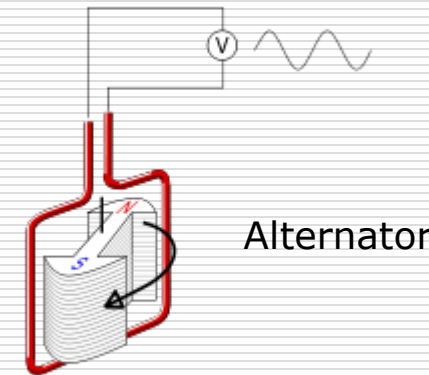
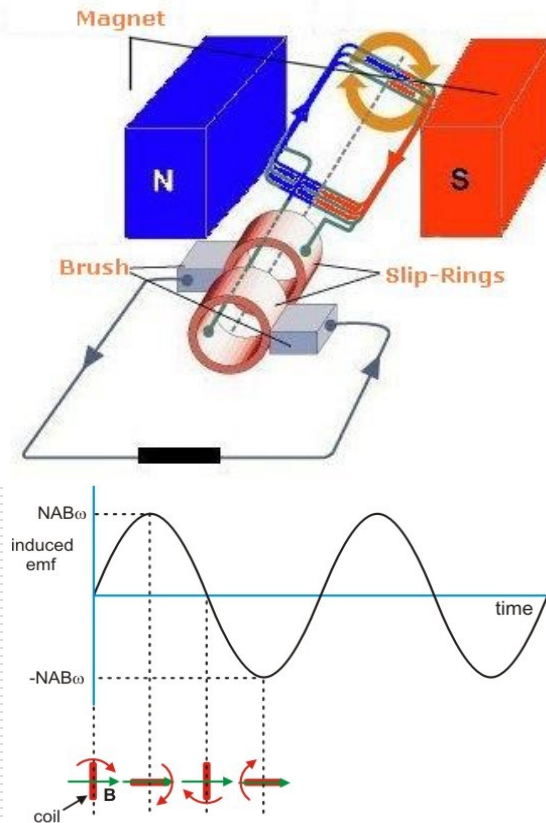
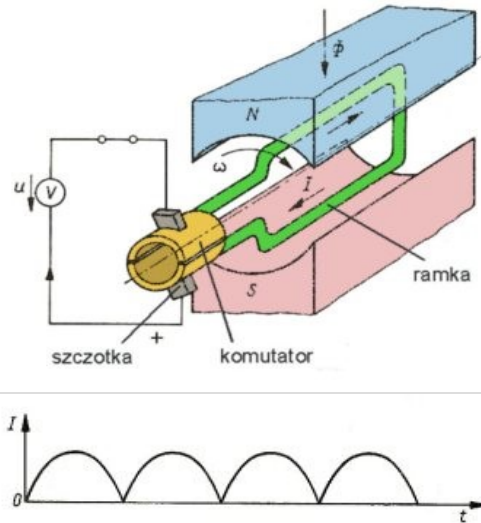
- Prądnice, generatory AC
- Transformatory
- Prądy wirowe:
 - Płyty, piece indukcyjne
 - Ładowarki telefonów, szczoteczki elektrycznych
 - Wykrywacze metali
 - Bramki na lotniskach, w sklepach, zabezpieczenia towaru.

Dysk Faraday'a

A- podkowa magnesu
B-odprowadzenie prądu od osi
B'-odprowadzenie prądu od tarczy
D- tarcza metalowa



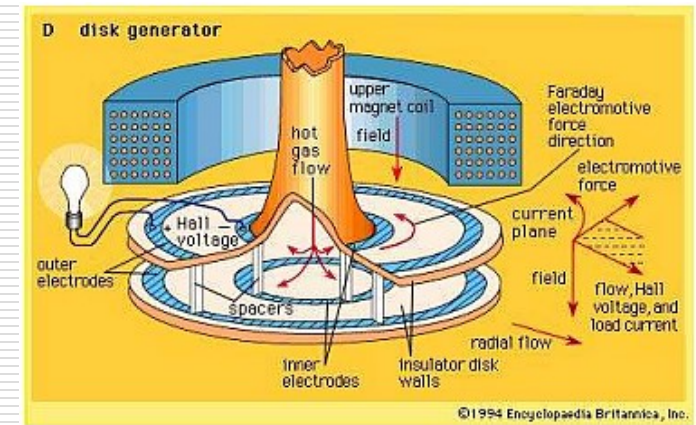
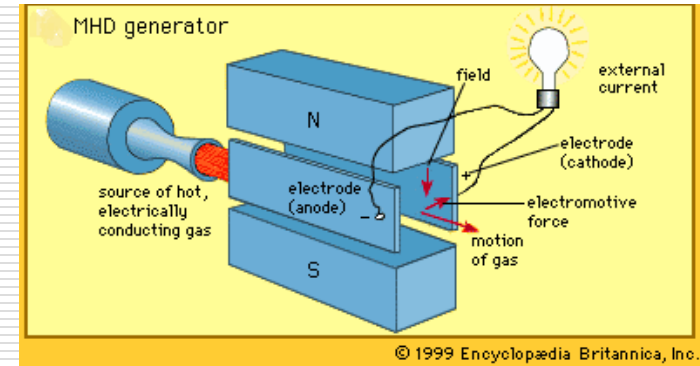
Prądnicą prądu stałego



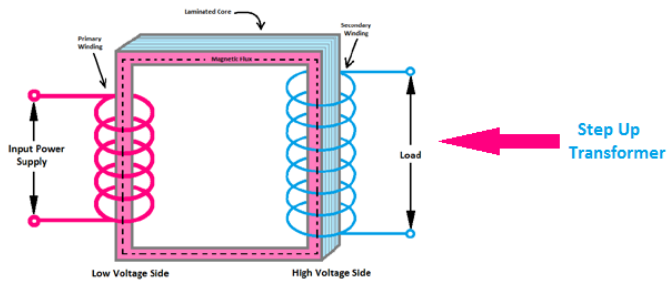
Alternator

Prądnicą prądu przemiennego

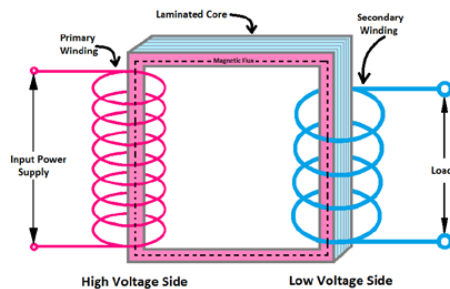
Generator MHD (temp. plazmy ok 1800 K; sprawność 60-65%; kilkadziesiąt MW mocy)



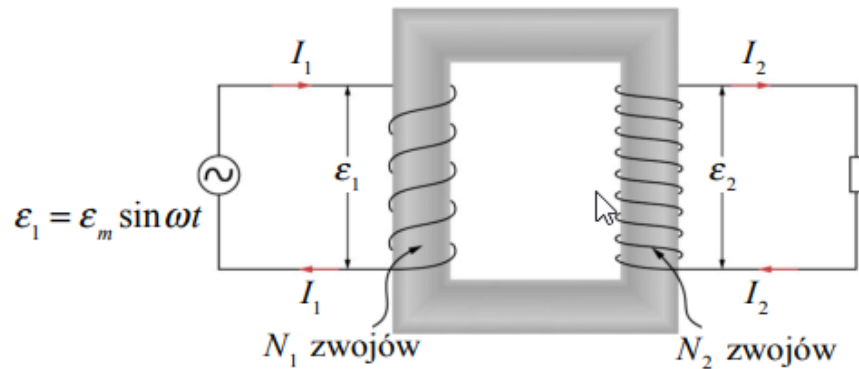
Basic Two Types of Transformer



Step Down Transformer



ETechnoG



$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Droga energii elektrycznej od wytwórcy do odbiorcy

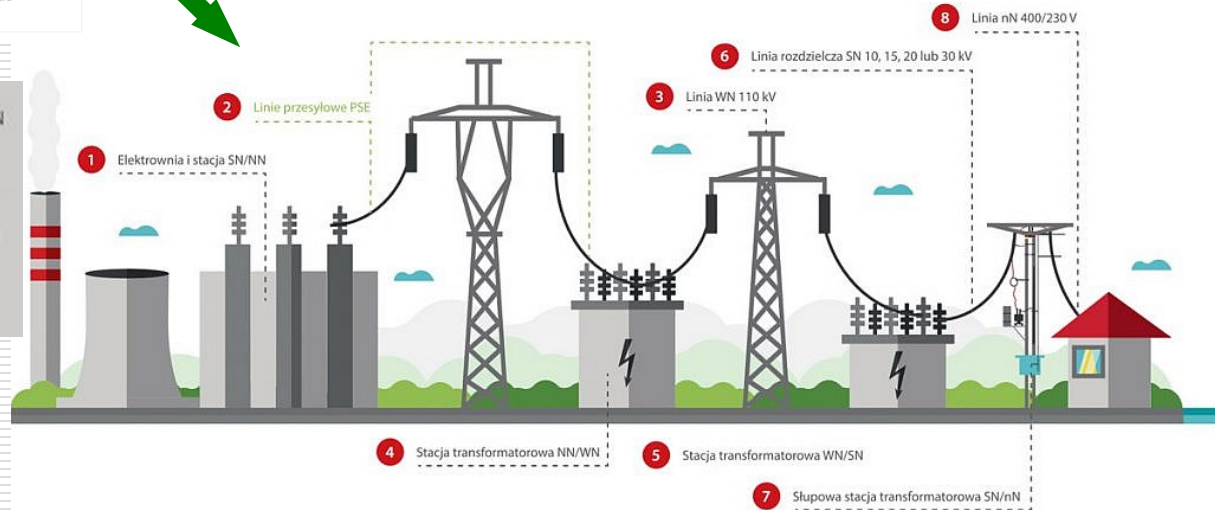
- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1 źródła wytwarzania | 5 stacja transformatorowa WN/SN |
| 2 linie przesyłowe NN | 6 linie rozdzielcze SN |
| 3 linie wysokiego napięcia | 7 stacja transformatorowa SN/nN |
| 4 stacja transformatorowa NN/WN | 8 linia niskiego napięcia 0,4 kV |

NN najwyższych napięć (220 kV, 400 kV, 750 kV)

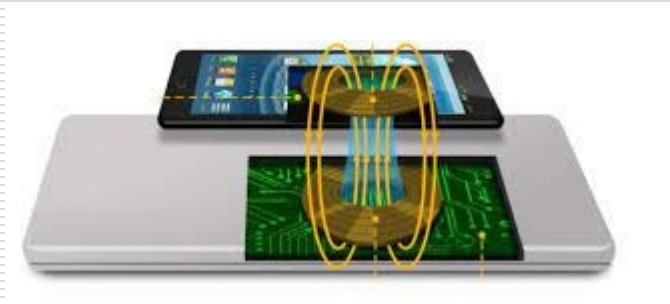
WN wysokich napięć (110 kV)

SN średnich napięć (15 kV, 20 kV)

nN niskich napięć (400/230 V)

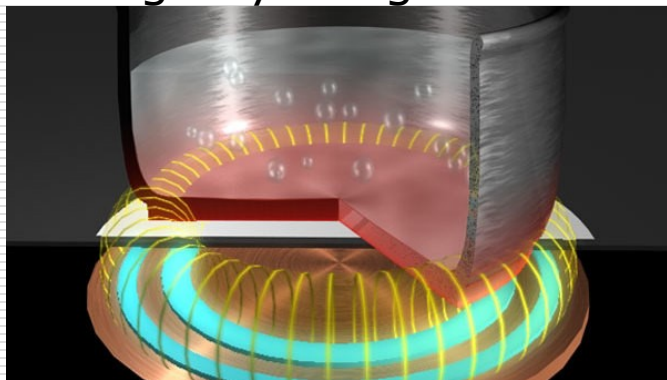


<https://teoriaelektryki.pl/jak-prad-dociera-do-gniazdka/>



Zmienny prąd w cewce podkładki indukuje w smartfonie SEM, która ładuje akumulator.

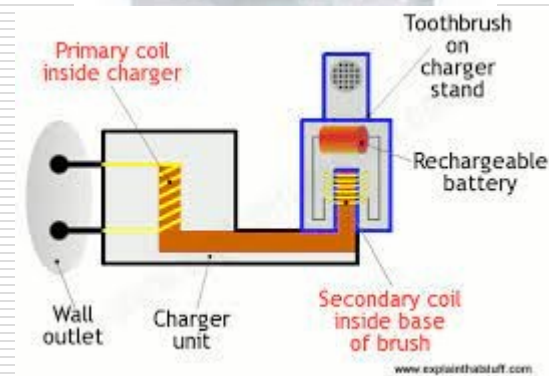
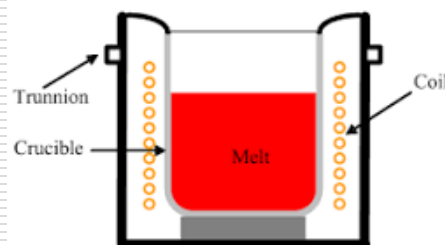
Prądy wirowe powstają w materiałach przewodzących pod wpływem zmiennego pola magnetycznego.



Krążą one w całej objętości materiału przewodzącego – garni, patelni, stopionego metalu.



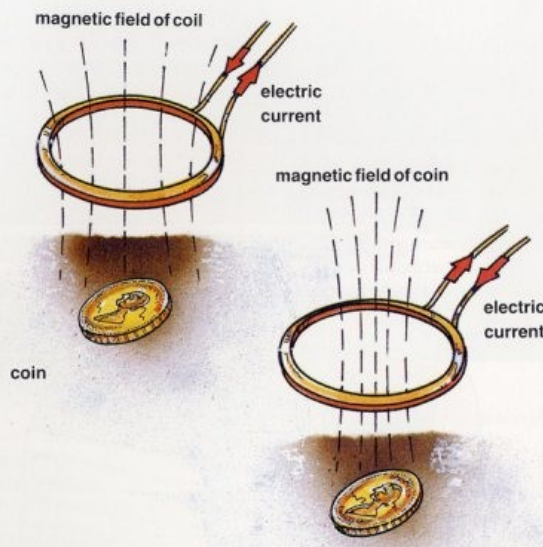
Coreless induction furnace



W cewce w obudowie szczoteczki indukuje się SEM wywołana przez zmienne pole cewki bazy.



Impuls prądu w cewce generuje pole magnetyczne. Koniec impulsu generuje w cewce odbiornika pole magnetyczne o odwrotnej biegunowości dając mikrosekundowy impuls elektryczny. Metalowy obiekt wydłuża trwanie impulsu



Prąd w cewce wykrywacza wytwarza pole magnetyczne. Gdy detektor przesunie się nad metalowym obiektem to wywoła w nim powstanie prądu powodującego powstanie słabego pola metalowego obiektu w ziemi – wykrywanego przez cewkę odbiornika detektora.

