Wykład 17: Fala elektromagnetyczna

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

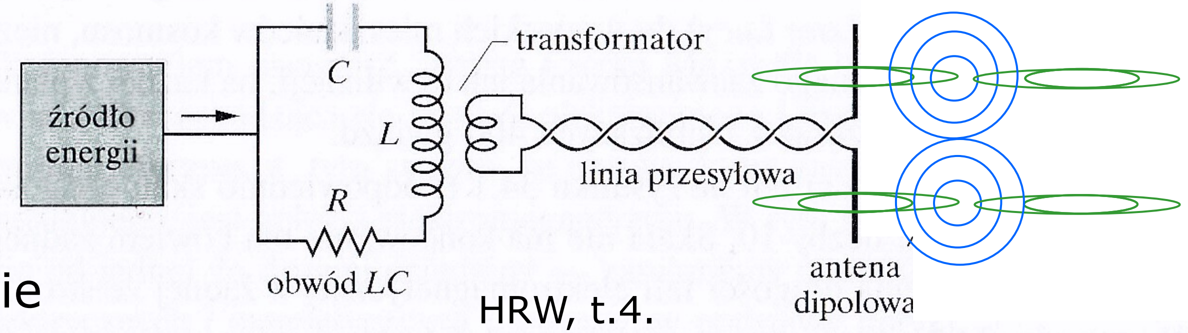
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Równania Maxwell'a

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gaussa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$	$div\,\vec{E} = 0$
Gaussa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{S} = 0$	$div\,\vec{B} = 0$	$div\,\vec{B} = 0$
Ampere'a-Maxwella	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_o \left(i + \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$rot\ \vec{B} = \mu_o (\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$	$rot\ \vec{B} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Fala elektromagnetyczna w próżni – emisja, propagacja, detekcja 1888r. H. Hertz

Zmienny prąd w obwodzie RLC wywołuje oscylacje ładunku w prętach anteny – związany z tym prąd w antenie sinusoidalnie zmienia swój kierunek i wartość $\Rightarrow$ pojawia się wirowe pole magnetyczne $\Rightarrow$ pojawia się wirowe pole elektryczne



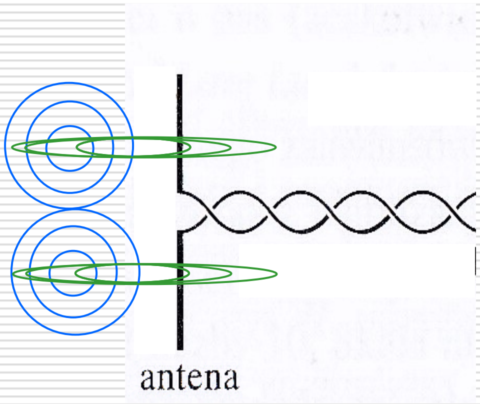
HRW, t.4.

$$\boxed{\mu_0 \vec{j} = rot\vec{B}}$$

$$\boxed{-\frac{d\vec{B}}{dt} = rot\vec{E}}$$

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = rot\vec{B}}$$

$\Rightarrow$ pojawia się wirowe pole magnetyczne $\Rightarrow$ ......



$\Rightarrow$ zmienny sygnał

pojawia się wirowe pole elektryczne $\Rightarrow$ pojawienie się wirowe pola magnetycznego $\Rightarrow$ pojawienie się zmiennego sygnału elektrycznego w antenie

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = rot\vec{B}}$$

$$\boxed{-\frac{d\vec{B}}{dt} = rot\vec{E}}$$

Fala elektromagnetyczna w próżni – równanie falowe

- Fala elektromagnetyczna opisana jest równaniami:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E(x,t)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B(x,t)$$

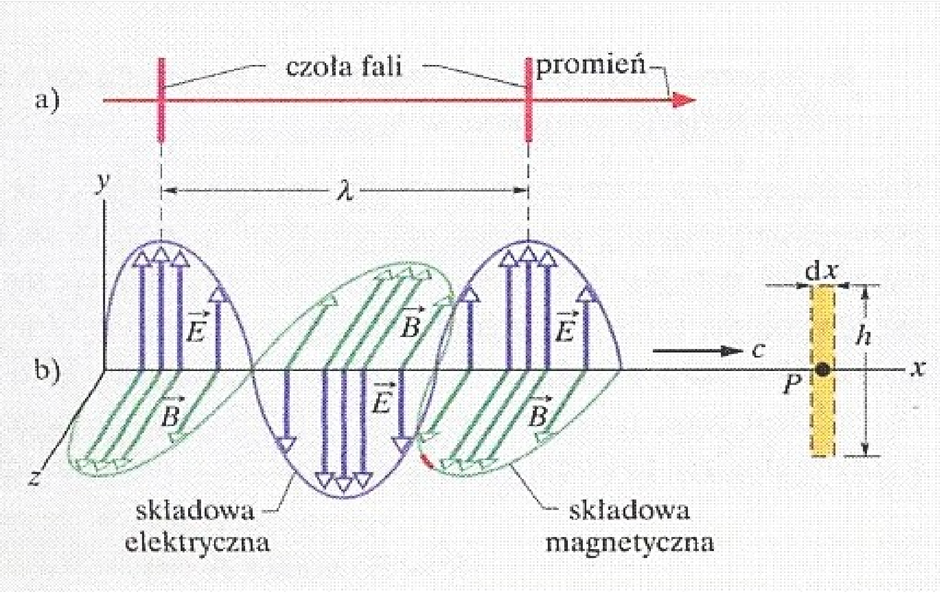
gdzie $E(x,t) = E_m \cdot cos(\omega t - kx)$

$$B(x,t) = B_m \cdot cos(\omega t - kx)$$

i rozchodzi się w kierunku osi OX

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \hat{i}\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_{0}$$



$$\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E} = \hat{k}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B_Z}{\partial t}\hat{k} \longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

obliczamy drugie pochodne po t oraz x

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

Z kolei

$$rot\ \vec{B} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_{0} - \hat{j}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{j} \qquad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \Rightarrow$$

obliczamy drugie pochodne po t oraz x

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

oraz

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

poprzednio:

stąd

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Dla 3 wymiarów

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}}$$

jest to ”część elektryczna” równania falowego.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}}$$

to równanie jest „częścią magnetyczną” równania falowego

dla fali elektromagnetycznej w próżni.

Przypominając równanie 3-wymiarowej fali płaskiej: $$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

zauważymy, że dla fali elektromagnetycznej **w próżni**

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}} = \frac{E_m}{B_m}$$

Fala elektromagnetyczna w ośrodku

Równania fali dla ośrodka: $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$ $\qquad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$

zatem $\dfrac{1}{V^2} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r = \mu\varepsilon \Rightarrow v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ $\left(c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \right)$

Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej:

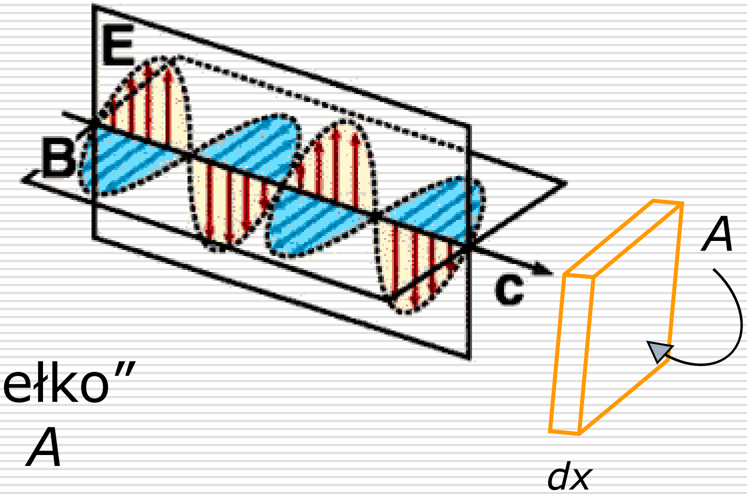
$$n = \frac{c}{\mathrm{v}} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

ε_r - względna przenikalność elektryczna

ε - przenikalność ośrodka

Energia fali elektromagnetycznej



Gęstość energii pola E $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Gęstość energii pola B $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Energia fali przechodząca przez „pudełko”
o grubości *dx* i powierzchni czołowej *A*

$$dW = dW_E + dW_B = (u_E + u_B)A \cdot dx$$

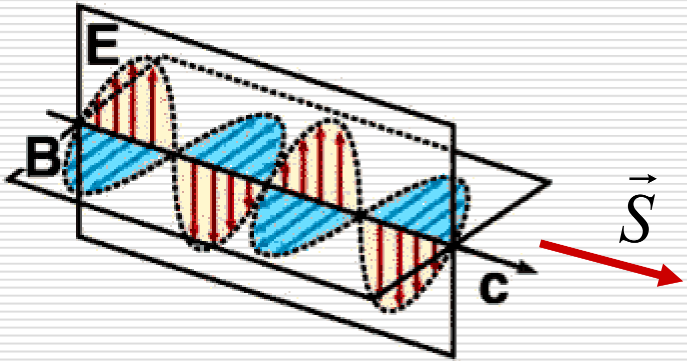
$$dW = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) A \cdot dx \qquad dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB \cdot A \cdot c \cdot dt$$

Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię *A*

$$\frac{dW}{dt \cdot A} = \frac{1}{\mu_0} EB = S \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

jest opisana przez wektor Poyntinga

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}$$



$\vec{S}$ jest związana z szybkością przepływu energii przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu, a jego kierunek jest kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w danym punkcie. Wartości wektorów ***E*** i ***B*** to chwilowe wartości pól w rozpatrywanym punkcie.

Dla dużych częstości E i B użyteczna jest *średnia wartość S.*

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \varepsilon_0 c E^2 \quad \text{zatem} \quad \bar{S} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}$$

Dla sinusoidalnie zmiennych E i B $\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}$ podobnie jak dla prądu zmiennego

Zatem $\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$

Promieniowanie słoneczne dostarcza do górnych warstw atmosfery z szybkością 1350 $J/(s \cdot m^2)$. Zakładając, że jest to pojedyncza fala sinusoidalna obliczyć maksymalne wartości *E* oraz *B.*

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = 1350 \frac{J}{sm^2} \quad \text{stąd} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} = 1{,}01 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$$

$$c = \frac{E_0}{B_0} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3{,}4 \cdot 10^{-6}\ T$$

Zadanie

W nieskończenie długim przewodniku o promieniu *R* i przewodnictwie właściwym σ, płynie prąd o gęstości *j* (jednakowej w całym przekroju poprzecznym przewodnika). Oblicz:

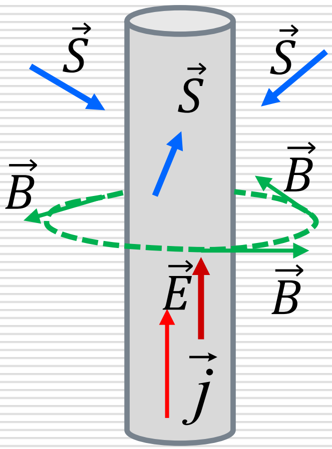
- natężenia pól E i B na powierzchni tego przewodnika.
- wartość wektora Poyntinga na powierzchni tego przewodnika.
- Uzupełnij rysunek przewodnika z prądem o wektory $\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}$

$$\rho = \frac{E}{j} \Rightarrow \boxed{E = \frac{j}{\sigma}}$$

$$\oint B dl = \mu_0 i$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

$$S = \frac{1}{\mu_0}\frac{j}{\sigma}$$



Widmo fali elektromagnetycznej