

Fala

Wykład 17: elektromagnetyczna

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

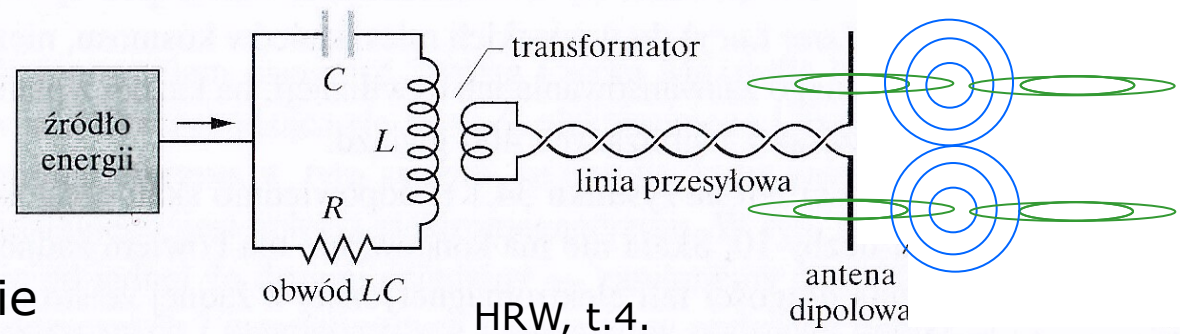
Równania Maxwell'a

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gausa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Gausa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Ampere'a-Maxwella	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Fala elektromagnetyczna w próżni – emisja, propagacja, detekcja

1888r. H. Hertz

Zmienny prąd w obwodzie RLC wywołuje oscylacje ładunku w prętach anteny – związany z tym prąd w antenie sinusoidalnie zmienia swój kierunek i wartość



⇒ pojawia się wirowe pole magnetyczne

⇒ pojawia się wirowe pole elektryczne

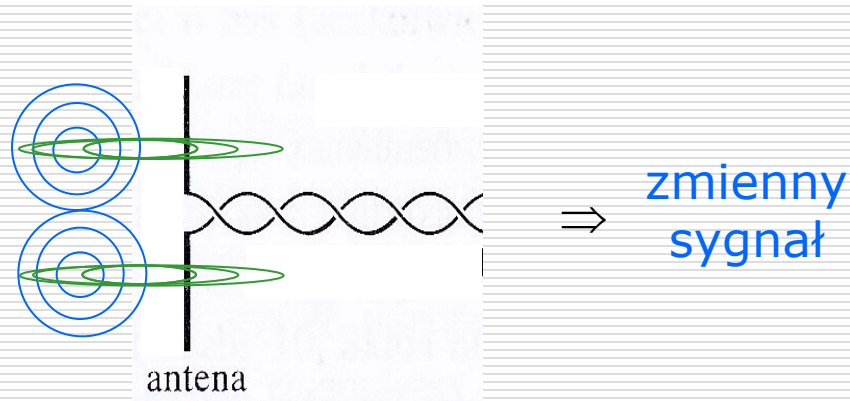
$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$

⇒ pojawia się wirowe pole magnetyczne

⇒



pojawia się
wirowe pole
elektryczne

⇒



pojawienie się
wirowe pola
magnetycznego

⇒



pojawienie się
zmiennego sygnału
elektrycznego w antenie

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$

Fala elektromagnetyczna w próżni – równanie falowe

□ Fala elektromagnetyczna opisana jest równaniami:

gdzie $E(x,t) = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

$$B(x,t) = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

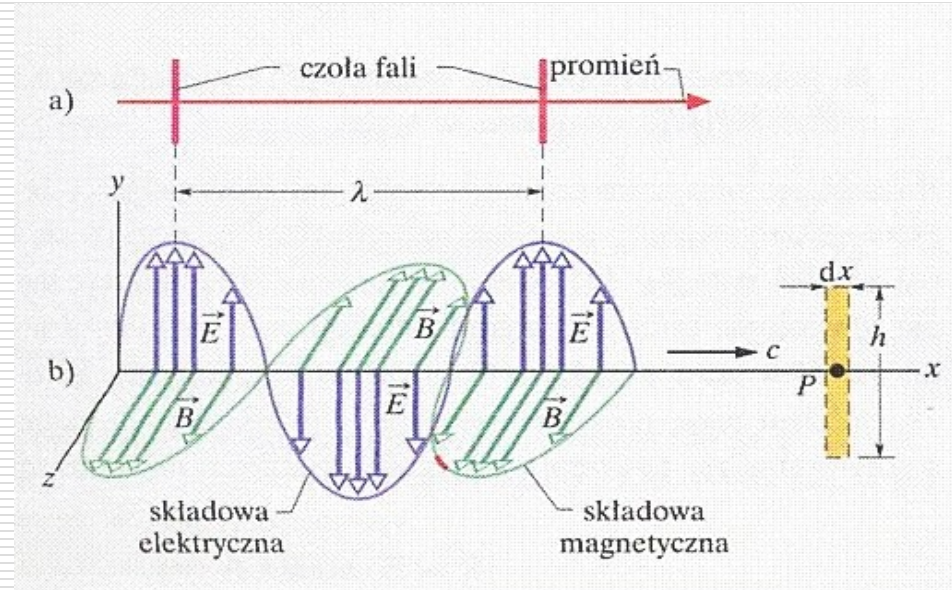
i rozchodzi się w kierunku osi OX

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \underbrace{\hat{i} \frac{\partial E_y}{\partial z}}_0$$

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E(x,t)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B(x,t)$$



$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{k} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{obliczamy drugie pochodne po } t \text{ oraz } x$$

$$\underline{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}} \quad \text{oraz} \quad \underline{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}}$$

Z kolei

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_0 - \hat{j} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow$$

obliczamy drugie pochodne po t oraz x

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

oraz

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

poprzednio:

stąd

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Dla 3 wymiarów

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

jest to „część elektryczna”
równania falowego.

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

to równanie jest „częścią
magnetyczną” równania falowego

dla fali elektromagnetycznej w próżni.

Przypominając równanie 3-wymiarowej fali płaskiej:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

zauważymy, że dla fali elektromagnetycznej w **próżni**

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Przyjęto, że np. $E_y(x,t) = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

$$B_z(x,t) = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Obliczyliśmy, że: $\text{rot} \vec{E} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_m \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx)$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\hat{k} \frac{\partial B_z}{\partial t} = -B_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx) \Rightarrow E_m k = B_m \cdot \omega \quad \frac{\omega}{k} = v = c = \frac{E_m}{B_m}$$

Fala elektromagnetyczna w ośrodku

Równania fali dla ośrodka: $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$ $\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$

zatem $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r = \mu \varepsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \right)$

Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

ε_r - względna przenikalność elektryczna

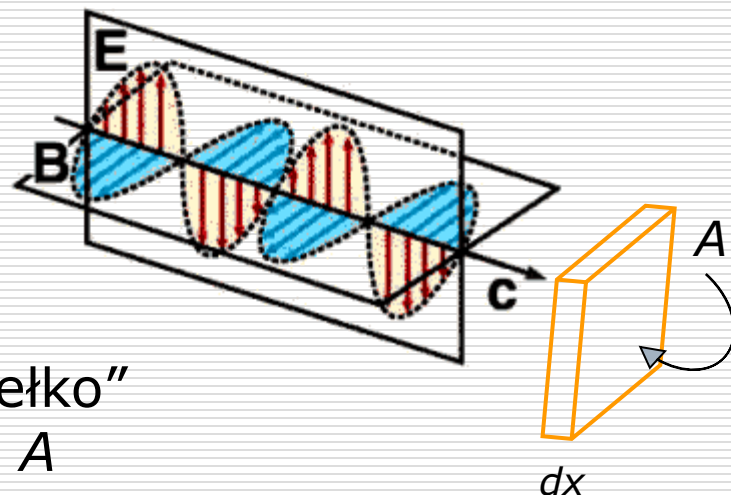
ε - przenikalność ośrodka

Energia fali elektromagnetycznej

Gęstość energii pola E $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Gęstość energii pola B $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Energia fali przechodząca przez „pudełko”
o grubości dx i powierzchni czołowej A



$$dW = dW_E + dW_B = (u_E + u_B) A \cdot dx$$

$$dW = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) A \cdot dx$$

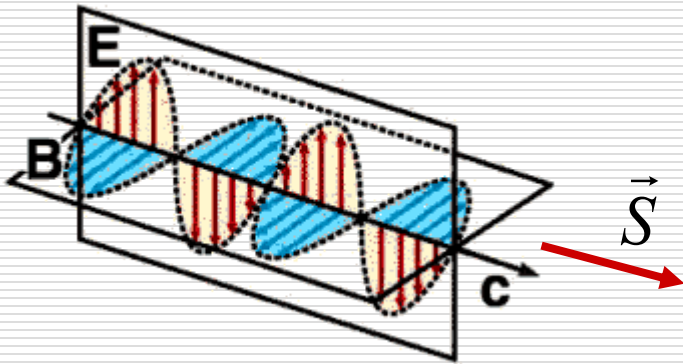
$$dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E B \cdot A \cdot c \cdot dt$$

Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię A

$$\frac{dW}{dt \cdot A} = \frac{1}{\mu_0} EB = S \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

jest opisana przez wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



jest związana z szybkością przepływu energii przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu, a jego kierunek jest kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w danym punkcie. Wartości wektorów $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ to chwilowe wartości pól w rozpatrywanym punkcie.

Dla dużych częstości E i B użyteczna jest *średnia wartość* S .

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \varepsilon_0 c E^2 \quad \text{zatem} \quad \bar{S} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}$$

Dla sinusoidalnie zmiennych E i B $\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}$ podobnie jak dla prądu zmiennego

$$\text{Zatem} \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$$

Promieniowanie słoneczne dostarcza do górnych warstw atmosfery z szybkością $1350 \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$. Zakładając, że jest to pojedyncza fala sinusoidalna obliczyć maksymalne wartości E oraz B .

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = 1350 \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \quad \text{stąd} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} = 1,01 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$c = \frac{E_0}{B_0} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Zadanie

W nieskończenie długim przewodniku o promieniu R i przewodnictwie właściwym σ , płynie prąd o gęstości j (jednakowej w całym przekroju poprzecznym przewodnika). Oblicz:

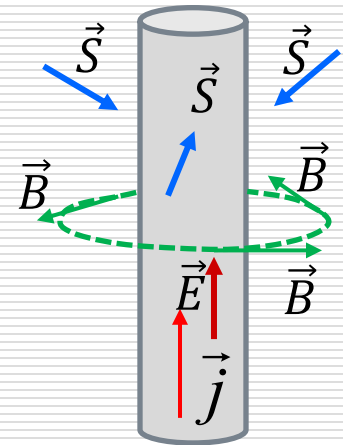
- ☐ natężenia pól E i B na powierzchni tego przewodnika.
- ☐ wartość wektora Poyntinga na powierzchni tego przewodnika.
- ☐ Uzupełnij rysunek przewodnika z prądem o wektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{S}$

$$\rho = \frac{E}{j} \Rightarrow E = \frac{j}{\sigma}$$

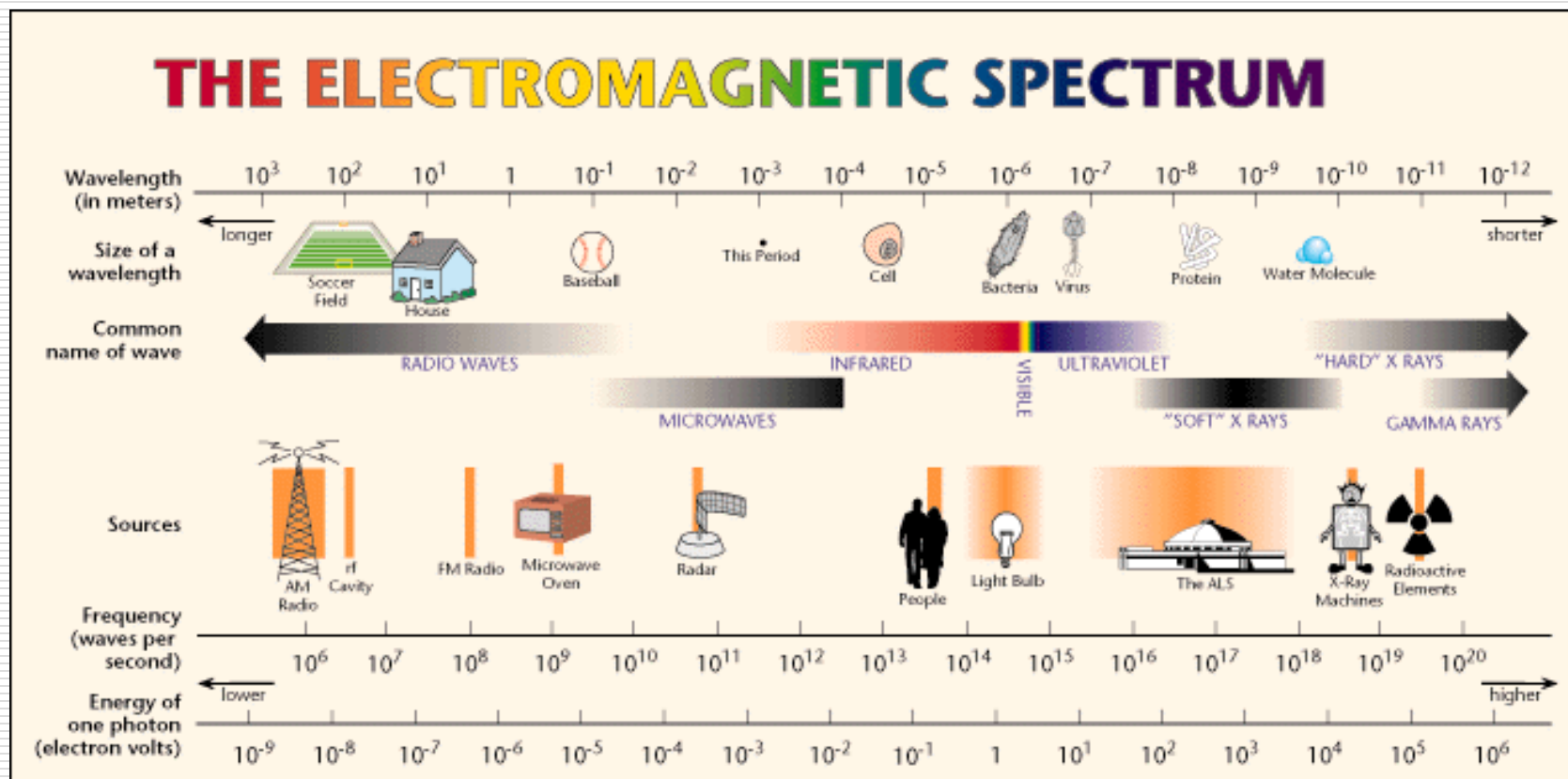
$$\oint B dl = \mu_0 i$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{j}{\sigma}$$



Widmo fali elektromagnetycznej



Mikrofale

Popularnie:

3 mm – 0,3 m

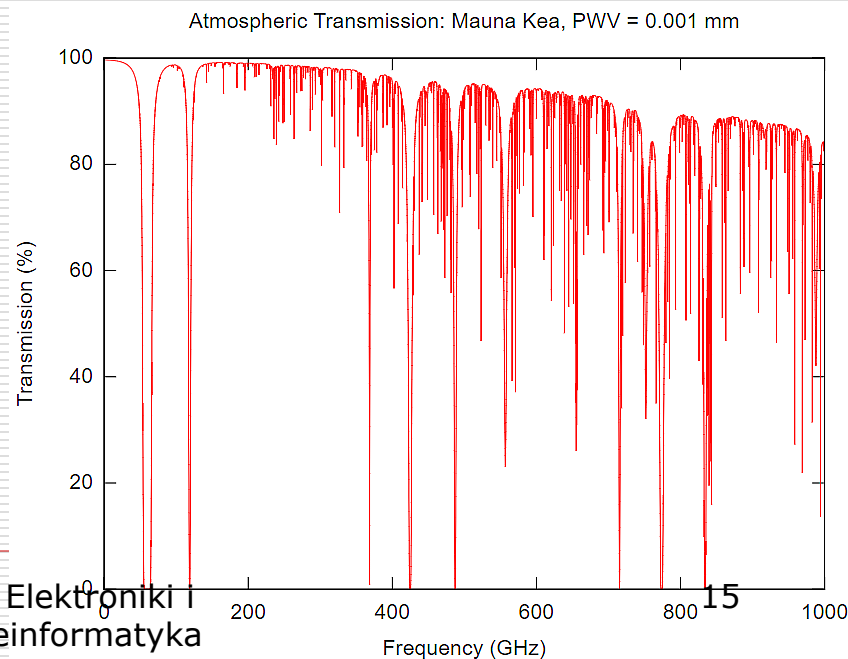
Przewidziane przez

J.C.Maxwella, odkryte przez H.Hertza (1886), szersze badania – dopiero XX w – radary.

Zastosowanie:

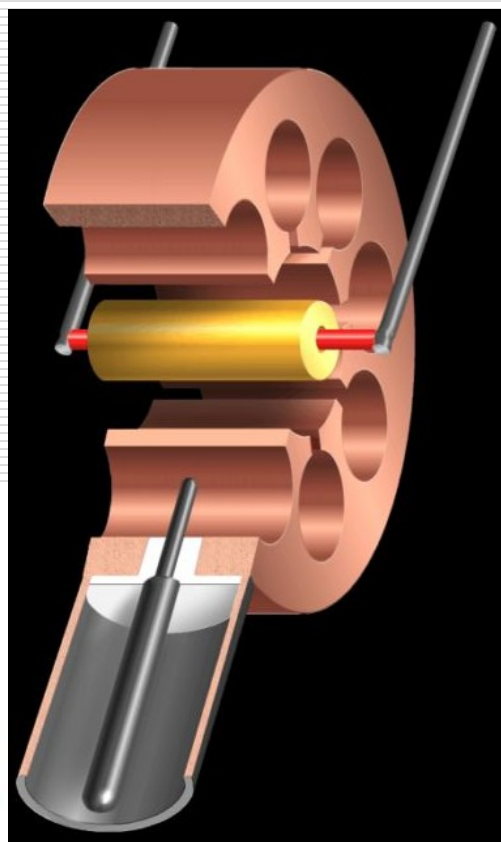
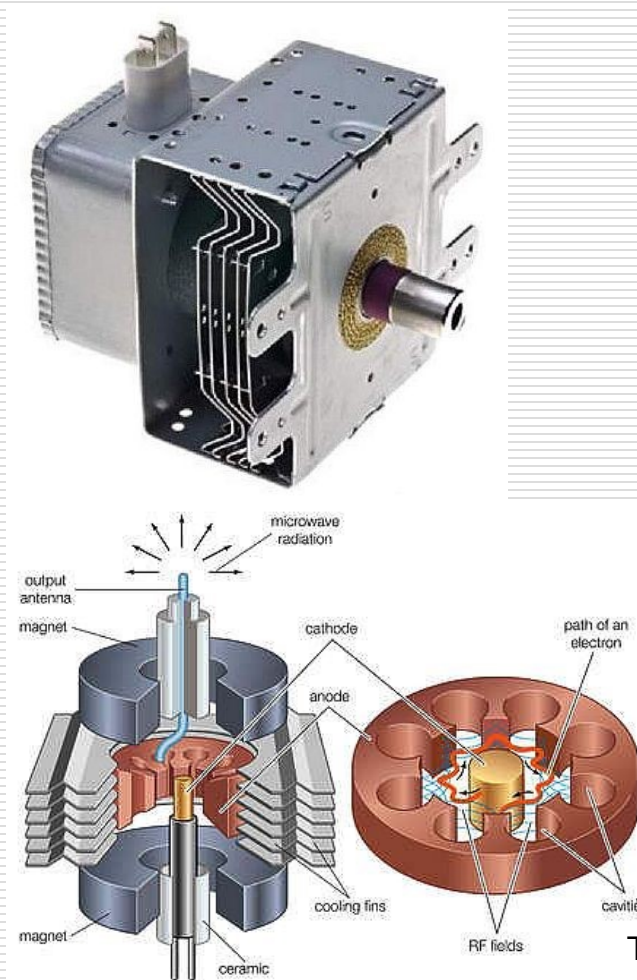
Radary (militarne, meteo, antykolizyjne), łączność radio-liniowa punkt-punkt (b.słaba dyfrakcja), radioastronomia, nawigacja, energetyka, kuchenki mikrofalowe.

Electromagnetic spectrum			
Name	Wavelength	Frequency (Hz)	Photon energy (eV)
Gamma ray	< 0.02 nm	> 15 EHz	> 62.1 keV
X-ray	0.01 nm – 10 nm	30 EHz – 30 PHz	124 keV – 124 eV
Ultraviolet	10 nm – 400 nm	30 PHz – 750 THz	124 eV – 3 eV
Visible light	390 nm – 750 nm	770 THz – 400 THz	3.2 eV – 1.7 eV
Infrared	750 nm – 1 mm	400 THz – 300 GHz	1.7 eV – 1.24 meV
Microwave	1 mm – 1 m	300 GHz – 300 MHz	1.24 meV – 1.24 µeV
Radio	1 m – 100 km	300 MHz – 3 kHz	1.24 µeV – 12.4 feV



Emisja mikrofal.

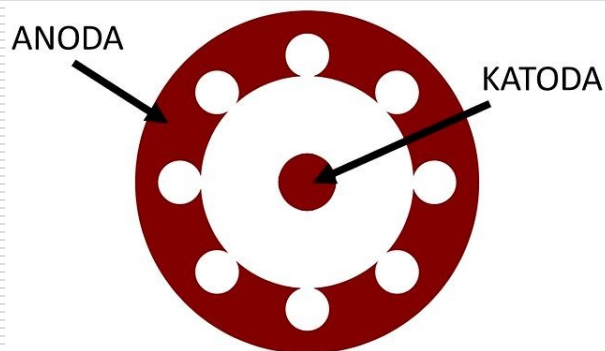
Źródła mikrofal wykorzystują ruch balistyczny elektronów w próżni pod wpływem pól elektrycznych i magnetycznych. Są to np. magnetrony (stosowane w kuchenkach mikrofalowych), czy klustrony (wąskopasmowa lampę mikrofalowa).



400 kW klustron

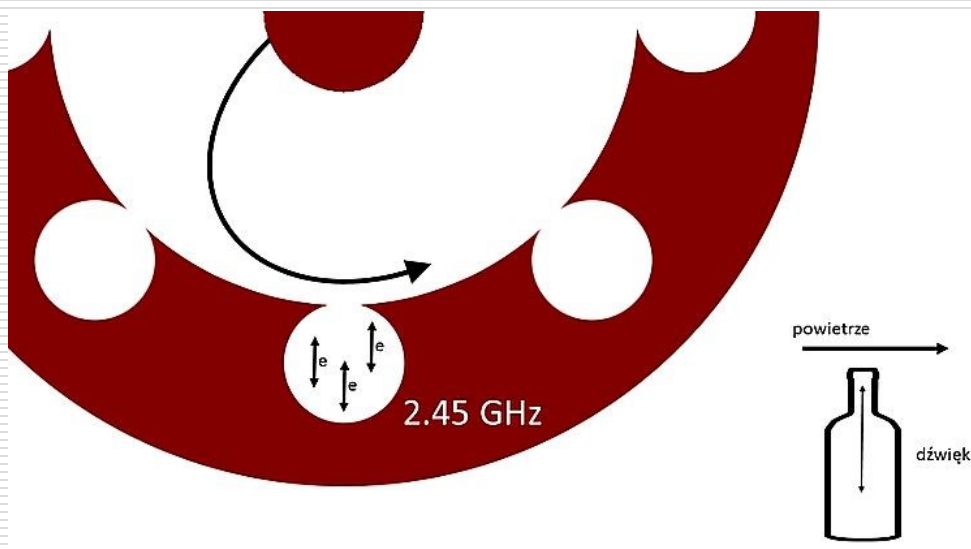
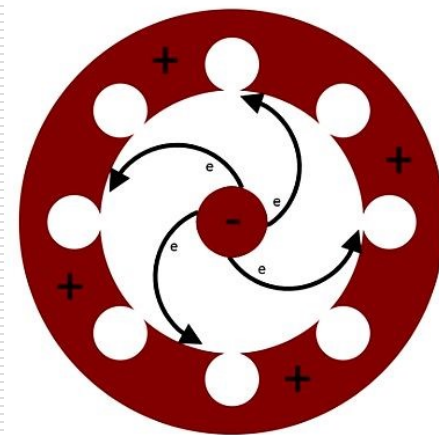


Zasada działania magnetronu



Tor elektronów jest zakrzywiany polem magnetycznym.

Gdy elektrony omiatają te szczeliny, indukują pole radiowe wysokiej częstotliwości w każdej wnęce rezonansowej.



Prądy oscylacyjne przepływające wokół wnęk powodują powstawanie dużych ilości energii mikrofalowej o częstotliwości radiowej we wnękach. Wnęki są otwarte na jednym końcu, więc cały mechanizm tworzy pojedynczy, większy oscylator mikrofalowy.

Część energii o częstotliwości radiowej jest wydobywana przez krótką antenę, która jest podłączona do falowodu (metalowa rura, zwykle o przekroju prostokątnym). Falowód kieruje wydobytą energię RF do obszaru, którym może być komora gotowania w kuchence mikrofalowej lub antena w przypadku radaru.



Źródła mikrofalowe małej mocy

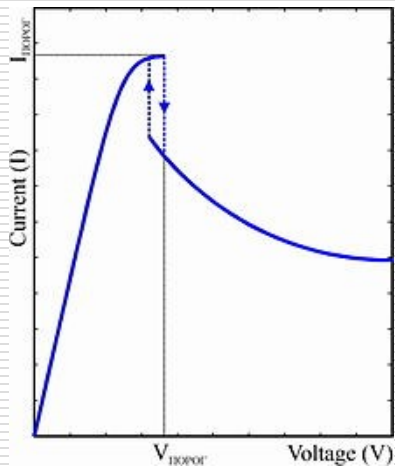
Tranzystory polowe, diody tunelowe, diody Gunna, diody IMPATT, masery.



Radarowy miernik szybkości z diodą Gunna

„Dioda” Gunna (GaAs) składa się z dwóch bardzo silnie domieszkowanych obszarów typu „n” i cienkiego obszaru między nimi o niskiej koncentracji domieszek.

Gdy natężenie pola elektrycznego w osiągnie wartość krytyczną na elektrodzie ujemnej, wtedy tworzony jest obszar z niską ruchliwością elektronów - o ujemnej rezystancji: wzrost $U \Rightarrow$ spadek I .



Po dotarciu tego obszaru do elektrody dodatniej, proces kolejnego tworzenia się obszaru o małej ruchliwości elektronów następuje cyklicznie, dzięki czemu są wytwarzane drgania, których częstotliwość może dochodzić do 100 GHz.



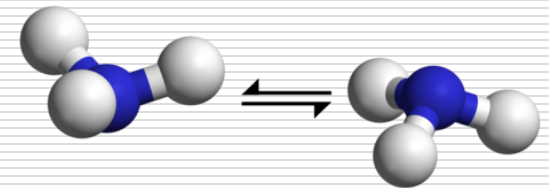
Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Kwantowy wzmacniacz promieniowania elektromagnetycznego przy pomocy wymuszonej emisji promieniowania mikrofalowego

MASER został wynaleziony w 1951 roku przez Charlsa Townes'a. Substancją czynną w tym maserze był amoniak. Maser ten emitował mikrofałe o długości fali 1,26 mm.

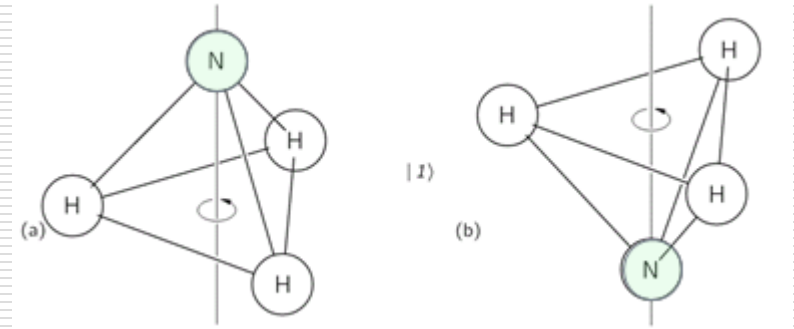
Działanie masera jest analogiczne do działania wynalezione go później lasera.

W maserze gazowym gaz podgrzewany jest do wysokiej temperatury. Cząsteczki w procesie wzbudzenia uzyskują różne wartości energii.

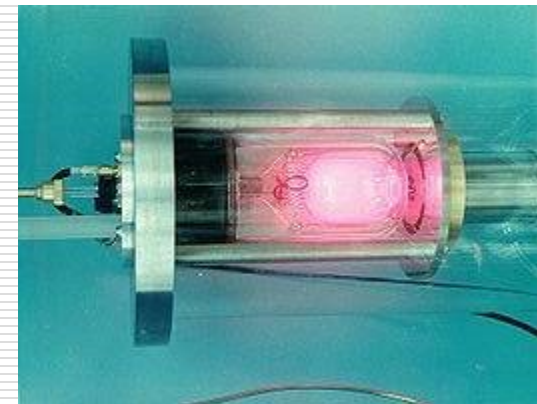
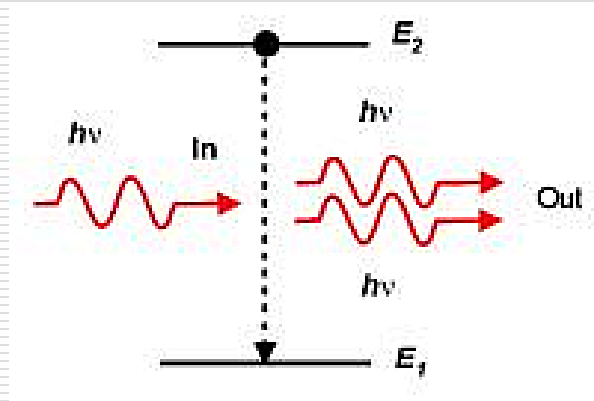


Konieczne jest odseparowanie cząstek wzbudzonych od tych w stanie podstawowym. W silnym, zmiennym polu elektrostatycznym cząsteczki

w stanie podstawowym są odchylane, a te wzbudzone przemieszczają się okresowo w kierunku rezonatora dostrojonego do częstotliwości 24 GHz.



W rezonatorze następuje emisja fotonów i przejście do stanu podstawowego NH_3 i inicjując proces emisji samopodtrzymującego się promieniowania mikrofalowego.



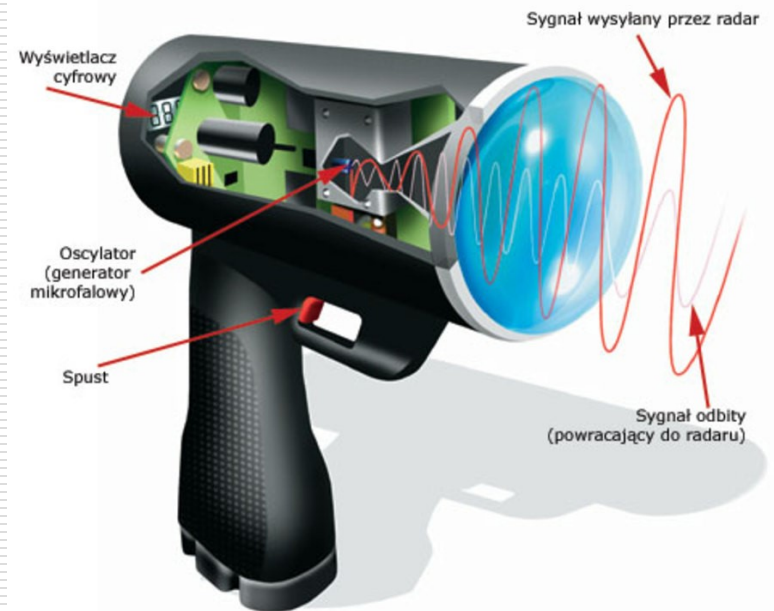
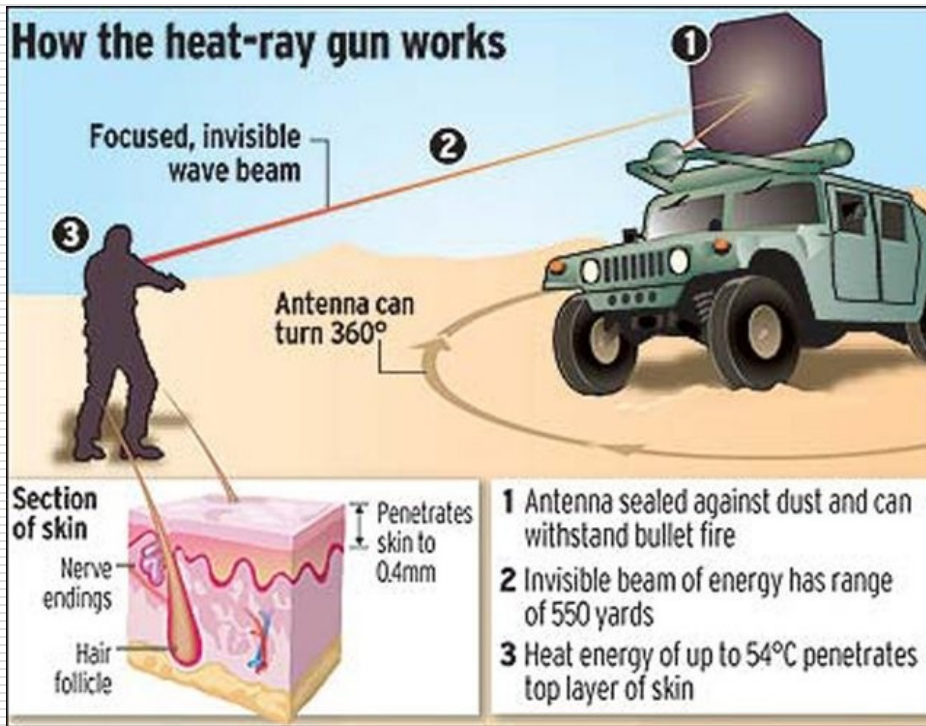
Wady masera:

- wąskie pasmo przenoszenia
- praktycznie brak przestrajania
- mała moc – do 10^{-9} W

Niektóre zastosowania mikrofal



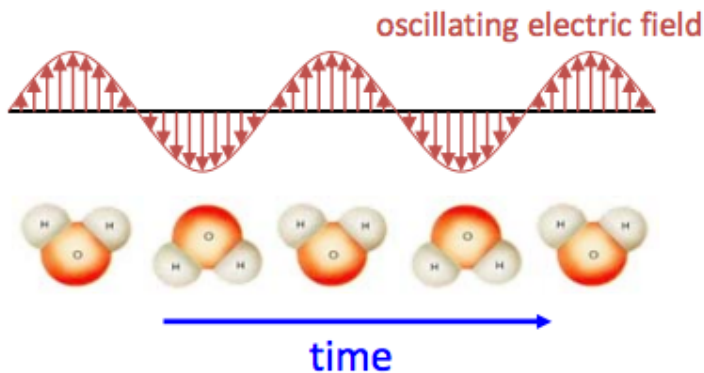
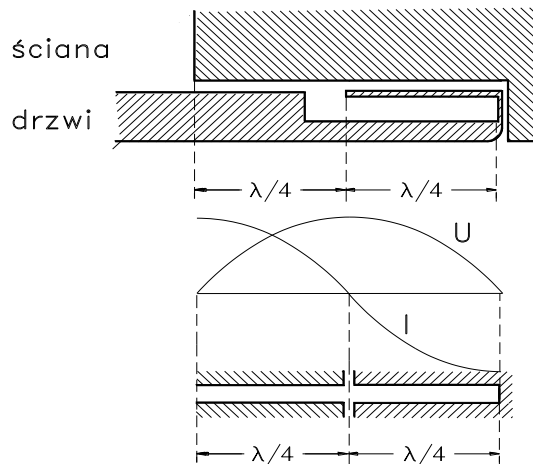
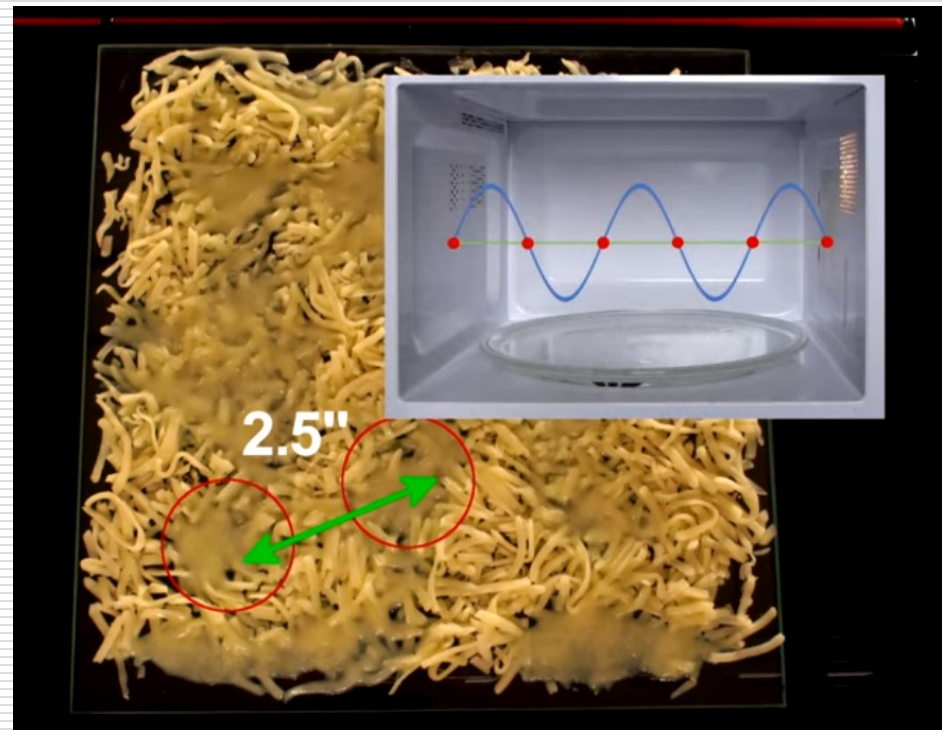
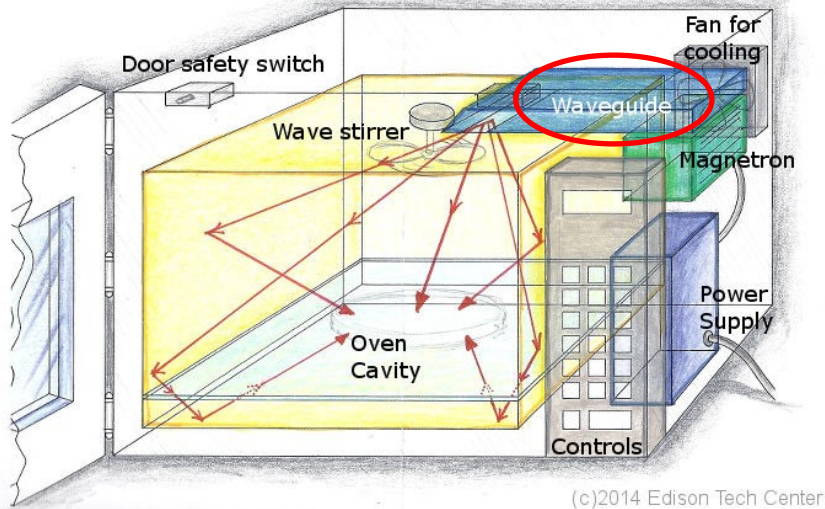
- Radary ($f = 300 \text{ MHz} \div 300 \text{ GHz}$; $\lambda \approx 300 \div 7,5 \text{ mm}$)
- Pomiar prędkości ($f = 24,125 \text{ GHz}$; $\lambda \approx 12,5 \text{ mm}$; zasięg max.ok. 800 m).
- Broń mikrofalowa ($f = 94 \text{ GHz}$; $\lambda \approx 3 \text{ mm}$; zasięg ok. 500 m).
- Kuchenka mikrofalowa ($f = 2,45 \text{ GHz}$; $\lambda \approx 12,2 \text{ cm}$; wnikanie ok. 2,5 cm).



1933 r. Westinghouse na Wystawie Światowej w Chicago. (60 MHz, 10 kW)

Komercyjna z lat `60 1,6 kW, 1,7 m wys., cena ówczesna 3 000\$ (odpowiada ok. 20 000\$ w 2019)





$$\lambda/2 = 2,5 \cdot 2,54 \text{ cm}$$

$$f = 2,45 \text{ GHz}$$

$$V = f \cdot \lambda =$$

$$2,45 \cdot 12,7 \cdot 10^7 \text{ m/s} =$$

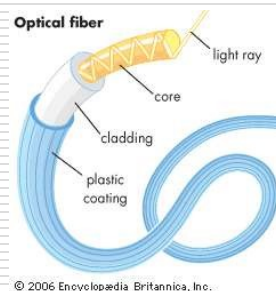
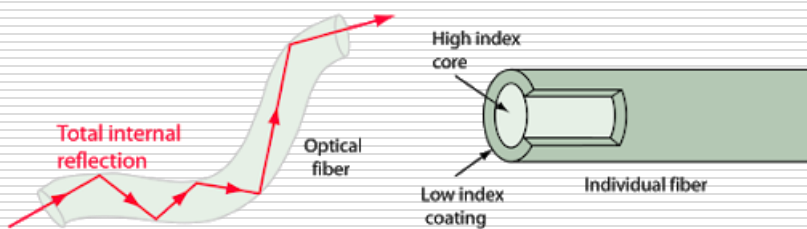
$$3,11 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx c$$

Falowód

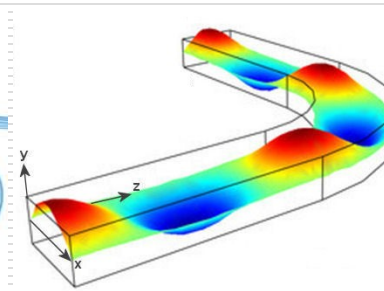
kanał do prowadzenia w przestrzeni **fal** mechanicznych lub elektromagnetycznych wzdłuż określonej drogi.



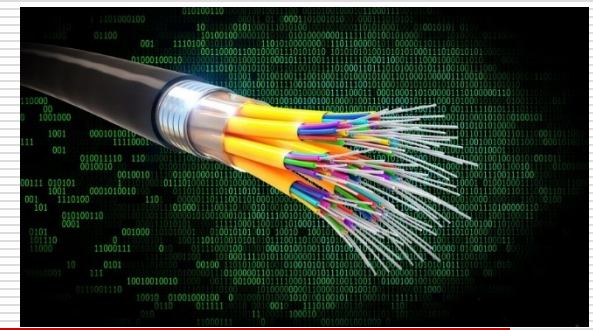
- akustyczny: mniejsze tłumienie, możliwa koncentracja energii gdy przekrój maleje. Istnieją naturalne falowody np. w oceanach – propagacja fal o małych częstotliwościach na setki kilometrów.
- fal elektromagnetycznych – gdy poprzeczne rozmiary falowodu $\geq \lambda$
 - zamknięte – rury, - otwarte – przewód metalowy, pręt/rurka z dielektryka
 - dla dużych częstotliwości (radar, niskie radiowe/mikrofałe) – metalowe rury
 - dla wysokich częstotliwości radiowych – falowody dielektryczne
 - dla fal świetlnych – włókna światłowodowe.



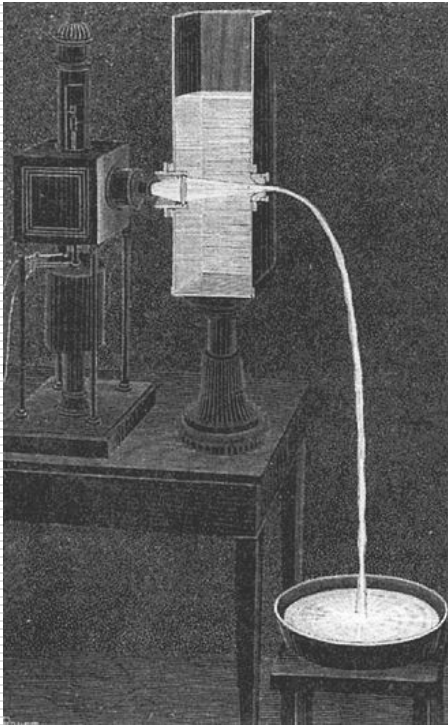
© 2006 Encyclopedia Britannica, Inc.



Światłowód



1842 – D. Colladon
– „*light pipe*”



1930 – pierwsza próba wykorzystania światłowodu do badań medycznych, ale dopiero w 1956 – pierwszy gastroskop.

1970 – zmniejszono tłumienie do 20 db/km, a 1977 – pierwszy światłowód telekomunikacyjny dł. 9 km w Turynie.

W Polsce – wytworzono pierwszy kabel światłowodowy w 1978r.

Szybkość przesyłu danych: 2013r. – 1,05 Pbit/s (10^{15} !)
Najdłuższy światłowód – 39 000 km Europa-Azja-Australia.

W Polsce największa sieć – Orange – o długości ponad 100 tys. km.

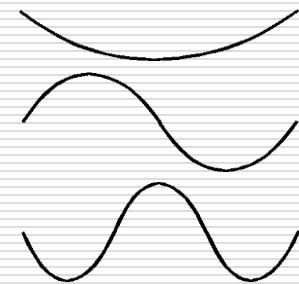


Zasada działania:

Modulowana wiązka z lasera rozchodzi się wewnątrz włókna – szklanego, plastikowego lub półprzewodnikowego w sposób zależny od średnicy włókna:

- średnica większa od długości światła (powyżej $50\text{ }\mu\text{m}$ – współczynnik załamania światłowodu jest większy niż osłony $\Rightarrow$ bieg prostoliniowy wiązki tzw. światłowód wielomodowy – *MMF* (skokowy)
- jw. ale współczynnik załamania rdzenia o budowie warstwowej zmienia się w sposób ciągły (największy na osi), co powoduje krzywoliniowy bieg światła – światłowód gradientowy (też wielomodowy)
- średnica porównywalna lub mniejsza od długości światła ($8\div 10\text{ }\mu\text{m}$) – światło rozchodzi się jak fala rozchodząca się prawie równolegle do osi światłowodu – jednomodowego – *SMF*.

Mod fali - określona długość wzbudzonej fali, gdy rezonator pobudzany jest do drgań przez fale z pewnego zakresu długości.

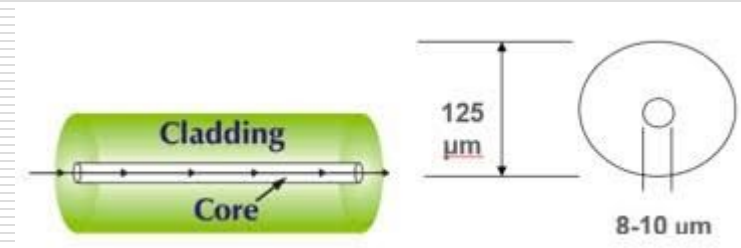
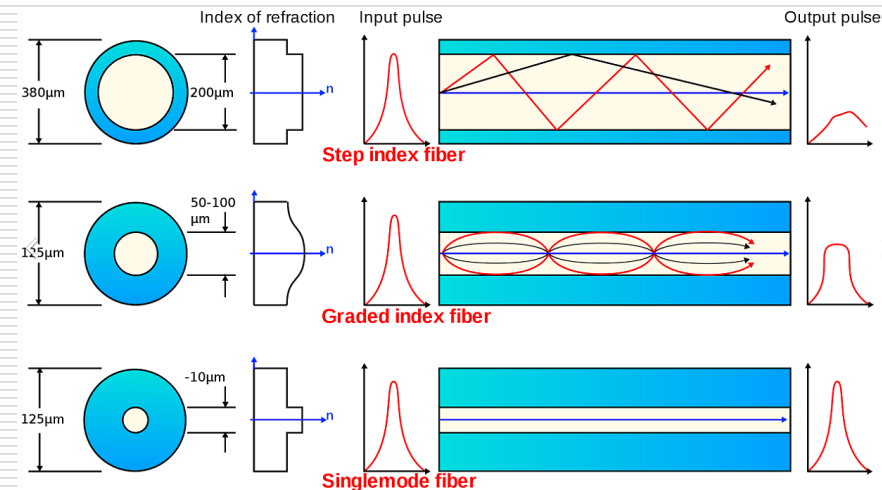


W światłowodzie wielomodowym fala o takiej samej długości fali może rozchodzić się wieloma drogami, zwanymi modami.

Różna prędkość modów w falowodzie $\Rightarrow$ rozmycie paczki falowej – zniekształcenie i ograniczenie szybkości transmisji.

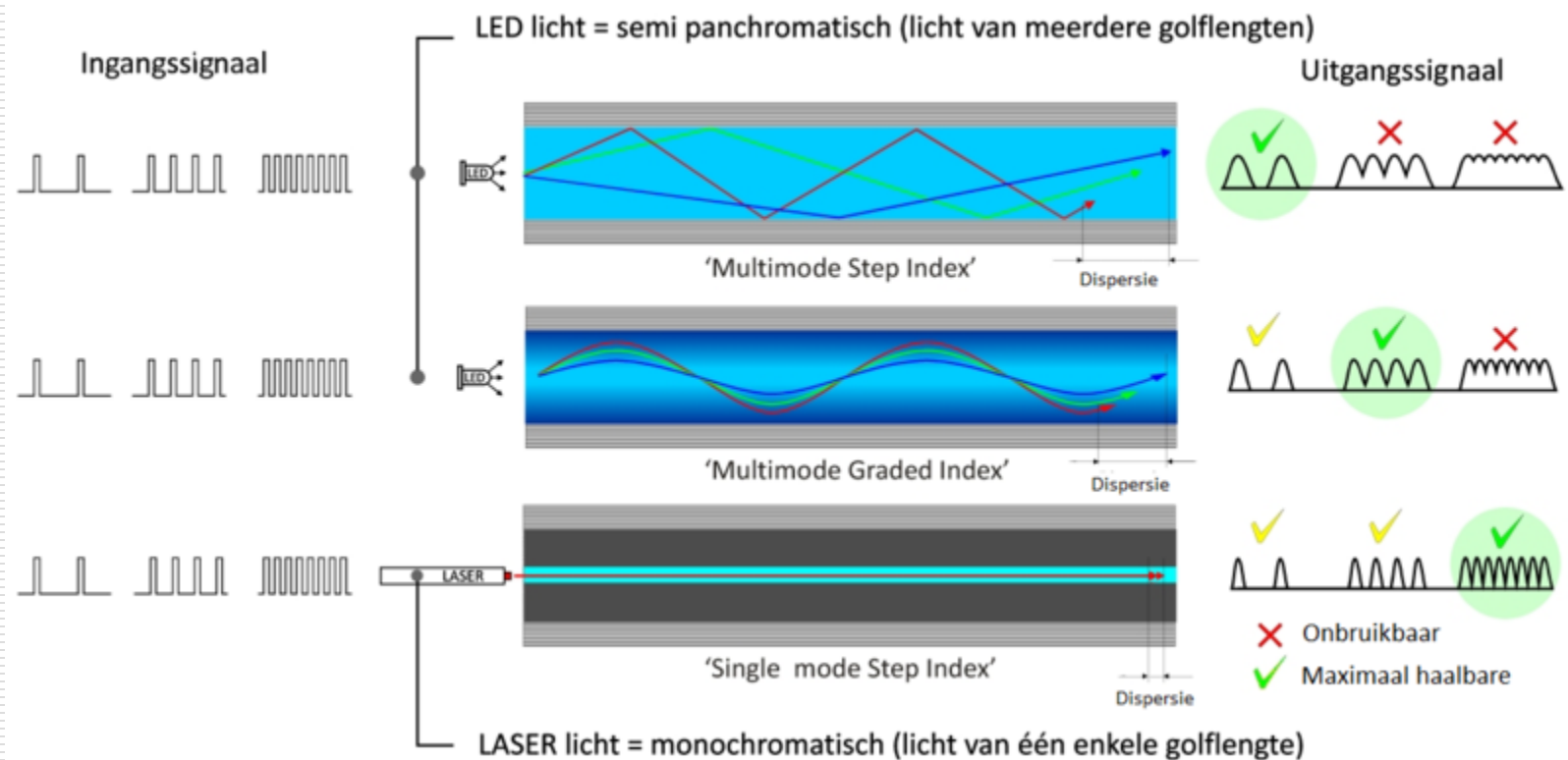
Rozchodzenie się światła w światłowodzie jednomodowym opisują równania Maxwell'a a nie prawa optyki geometrycznej.

Światłowody te stosowane są w dalekosiężnej telekomunikacji, bo do 100 km sygnał nie musi być regenerowany. Tłumienie w światłowodzie ze szkła Corning dla $\lambda = 1500 \text{ nm}$ jest rzędu 0,17 dB/km.



Ograniczenia transmisji światłowodowej:

- rozproszenie światła – fluktuacje gęstości rdzenia;
- uszkodzenia – mikro i makrozgięcia
- dyspersja (tzn. n zależy od f) – rozmycie impulsu



Fala elektromagnetyczna - podsumowanie

□ Przykładowe równania fali elektromagnetycznej:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$$

□ Równania falowe (dla próżni):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{E_m}{B_m}$$

□ Równania falowe (dla ośrodka):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

□ Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$