

Wstęp cz.2

FIZYKA

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Zastosowanie rachunku różniczkowego w fizyce

$$V = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad V = \frac{ds}{dt}$$

PRZYKŁAD:

Ciało o masie m zaczęło zwalniać w chwili $t = 0$ tak, że przebywana droga hamowania w funkcji czasu zmienia się zgodnie z wzorem: $S(t) = 27 \cdot t - t^3$ [m].

A) Oblicz po jakim czasie ciało zatrzymało się.

Rozwiązanie:

A) Dla jakiego t , $V(t) = 0$?

Obliczmy $V(t)$:
$$V = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(27t - t^3)}{dt} = 27 - 3t^2 \quad V(t) = 0 \Rightarrow \quad t = 3s$$

B) Oblicz wartość przyspieszenia ciała dla $t = 2$ s.

Rozwiązanie:

Obliczamy $a(t)$:

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{d(27 - 3t^2)}{dt} = -6t$$

dla $t = 2s$ $a = -12[m/s^2]$

C) Oblicz masę ciała, jeżeli w chwili zatrzymania się, na ciało działała siła 36 N .

Rozwiązanie:

Siła $F(t=3)$: $F(t) = m \cdot a(t)$ $a(3) = -18 m/s^2$ czyli

$$-36 = m \cdot (-18) \Rightarrow m = \frac{-36}{-18} \frac{N}{m/s^2} = +2kg \text{ ???!}$$

UWAGA: siła hamująca a zatem $F = -36 N$

Zadania do poćwiczenia

□ Zadanie 1.

Ładunek elektryczny q jaki przepływa przez pewne urządzenie opisany jest wzorem: $q(t) = 2 t \cdot e^{-t}$ [C]. Wyznacz natężenie prądu w chwili $t = 0$

□ Zadanie 2.

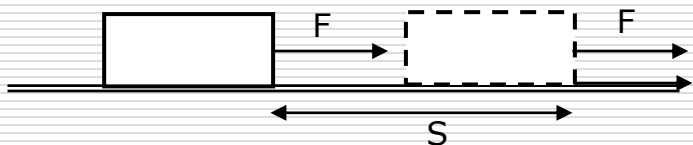
Wiatr wiejący z szybkością V_0 działa na żagiel o powierzchni S siłą $F = \frac{1}{2} \cdot a S \zeta (V_0 - V)^2$ gdzie a – stała, ζ – gęstość powietrza, V – szybkość żaglówki. Dla jakiej szybkości żaglówki moc wiatru będzie maksymalna?

□ Zadanie 3.

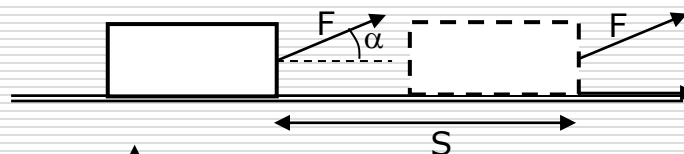
Oblicz wartość oporu jaki należy dołączyć do n szeregowo połączonych źródeł o SEM ε i oporze wewnętrznym r aby moc użyteczna była maksymalna.

Zastosowanie rachunku całkowego w fizyce

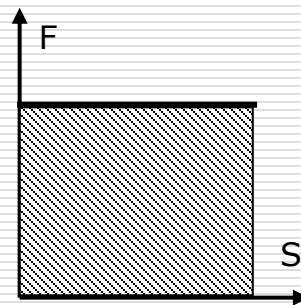
$$W = F \cdot S \quad \rightarrow$$



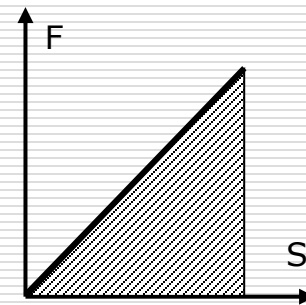
$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha \quad \rightarrow$$



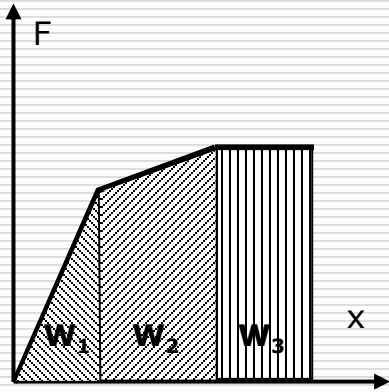
Założenie: $F = \text{const} !!$



Co w sytuacji gdy F – zmienne? $W = F'_{sr} \cdot S$



Gdy F – zmienne niejednostajnie:



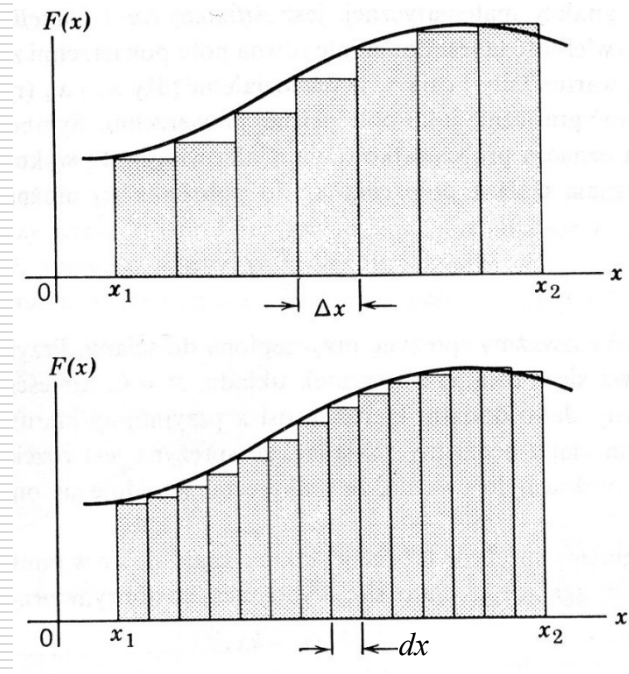
$$W = \sum_i W_i = W_1 + W_2 + W_3$$

a jeżeli $\Delta x \rightarrow 0$ to

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

wtedy $dW = F \cdot dx$ $W = \int dW = \int F \cdot dx$

W ogólnym przypadku: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r}$



$$S(t) = \int dS(t)$$

wynik całkowania to taka funkcja, której pochodna jest pod całką.

$dS(t)$ – różniczka funkcji pierwotnej $S(t)$

ale: $\int dS(t) = S(t) + C$

Podstawowe wzory:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int 0 dx = C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Przykłady

□ Zadanie 1.

Na ruszające z miejsca i poruszające się prostoliniowo ciało działa siła $F = 2x^2 - 3x + 1$ [N]. Obliczyć jaką pracę wykonuje ta siła na pierwszym metrze drogi.

Rozwiązanie

$$W = \int F(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)dx \quad \text{a zatem}$$

$$W = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \dots = \frac{1}{6} J$$

□ Zadanie 2.

Prędkość kuli o masie $m = 1/2$ kg poruszającej się prostoliniowo jest zależna od czasu w następujący sposób:

$$V(t) = 2 - \frac{1}{2} t^2 \quad [\text{m/s}].$$

A) Oblicz średnią szybkość kuli.

Rozwiązanie:

$$V_{sr} = \frac{S_{calk}}{t_{calk}}$$

- jak długo poruszała się kula?

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{2} t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

- jaką drogę przebyła w tym czasie?

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = V(t)dt \quad \Rightarrow \quad S = \int_0^2 V(t)dt$$
$$S = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2} t^2\right) dt = 2t - \frac{1}{6} t^3 \Big|_0^2 = \dots = \frac{8}{3} m$$

a zatem $V_{sr} = \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3} m/s$

B) Podaj równanie siły hamującej działającej na kulę

Rozwiązanie:

$$F = m \cdot a \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = -t \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}t \quad [N]$$

C) Oblicz całkowitą pracę wykonaną przez siłę hamującą

Rozwiązanie:

ponieważ $F \neq \text{const}$ $W = \int F(t) dS$ **!!!! tego nie można scałkować!**

ale $V(t) = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = V(t)dt$ $W = \int F(t) \cdot V(t)dt = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)dt$

ostatecznie $W = \int_0^2 \left(-t + \frac{1}{4}t^3\right)dt = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 \Big|_0^2 = -1J$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int g(x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{podstawienie:} \\ x = f(u) \\ dx = f'(u)du \end{array} \right| = \int g(f(u)) \cdot f'(u) du$$

Przykłady

A. $\int \frac{dx}{ax+b} =$ podstawienie:
 $ax + b = u$
 $a \cdot dx = du$
 $dx = \frac{1}{a} du$
 $= \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$

B. $\int x\sqrt{1+x^2} dx =$ podstawienie:
 $1 + x^2 = z$
 $2x \cdot dx = dz$
 $x \cdot dx = \frac{1}{2} dz$
 $= \frac{1}{2} \int z^{1/2} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$

C. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} =$ podstawienie:
 $x^2 = u$
 $2x \cdot dx = du$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(u) = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$

Ale uwaga przy całkach oznaczonych:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} =$$

podstawienie:

$$2x - 3 = u$$

$$2 \cdot dx = du$$

zmiana granic:

$$x=2 \Rightarrow u=1$$

$$x=3 \Rightarrow u=3$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} \Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

lub – nie przeliczając granic:

$$= \frac{1}{2} \int_a^b u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} \Big|_a^b =$$

$$= (2x - 3) \Big|_2^3 = \sqrt{3} - 1$$

Zadania do poćwiczenia

□ Zadanie 3.

Prom kosmiczny o masie m zmienił promień orbity z R_1 na $R_2 = 1/3 R_1$. Dana jest masa Ziemi i powszechna stała grawitacji G . Oblicz wartość wykonanej pracy.

Kto wykonał tę pracę?

□ Zadanie 4.

Łódź podwodna o masie m z włączonymi silnikami porusza się ze stałą szybkością V_0 . Znaleźć zależność szybkości łodzi od czasu po wyłączeniu silników, jeśli opory ruchu są proporcjonalne do prędkości $F = -b \cdot V$, gdzie b to stała zależna od doskonałości hydrodynamicznej łodzi. Oblicz jaką drogę przebędzie łódź.