Wstęp cz.3

FIZYKA

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Zastosowanie rachunku różniczkowego w fizyce

$$V = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad V = \frac{ds}{dt}$$

PRZYKŁAD:
Ciało o masie *m* zaczęło zwalniać w chwili *t* = 0 tak, że przebywana droga hamowania w funkcji czasu zmienia się zgodnie z wzorem: $S(t) = 27 \cdot t - t^3$ [m].

A) Oblicz po jakim czasie ciało zatrzymało się.

Rozwiązanie:

A) Dla jakiego t, V(t) = 0 ?

Obliczmy V(t): $$V = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(27t - t^3)}{dt} = 27 - 3t^2 \quad V(t) = 0 \Rightarrow \quad t = 3s$$

B) Oblicz wartość przyspieszenia ciała dla *t* = 2 s.

Rozwiązanie:

Obliczamy a(t):

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} \Rightarrow \qquad a(t) = \frac{d(27 - 3t^2)}{dt} = -6t$$

$$dla \qquad t = 2s \qquad a = -12[m/s^2]$$

C) Oblicz masę ciała, jeżeli w chwili zatrzymania się, na ciało działała siła 36 N .

Rozwiązanie:

Siła F(t=3): $F(t) = m \cdot a(t)$ *a(3)= -18 m/s²* czyli

$$-36 = m \cdot (-18) \Rightarrow m = \frac{-36}{-18} \frac{N}{m/s^2} = +2kg$$ **??!!**

UWAGA: siła *hamująca* a zatem *F = -36 N*

Zadania do poćwiczenia

- ## Zadanie 1.

  Ładunek elektryczny **q** jaki przepływa przez pewne urządzenie opisany jest wzorem: $q(t) = 2\, t \cdot e^{-t}$. Wyznacz natężenie prądu w chwili $t = 0$

- ## Zadanie 2.

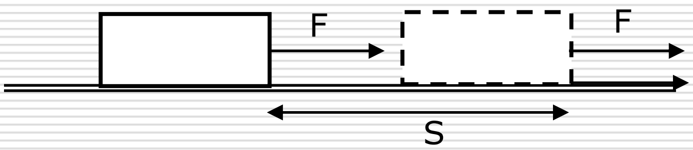
  Wiatr wiejący z szybkością V_0 działa na żagiel o powierzchni S siłą $F = \frac{1}{2} \cdot aS\varsigma(V_0 - V)^2$ gdzie a – stała, ς – gęstość powietrza, V – szybkość żaglówki. Dla jakiej szybkości żaglówki moc wiatru będzie maksymalna?

- ## Zadanie 3.

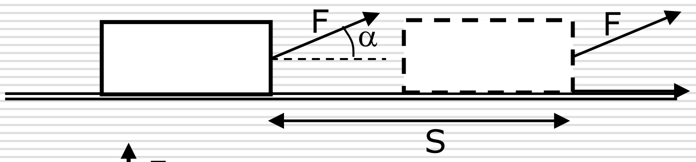
  Oblicz wartość oporu jaki należy dołączyć do n szeregowo połączonych źródeł o SEM ε i oporze wewnętrznym r aby moc użyteczna była maksymalna.

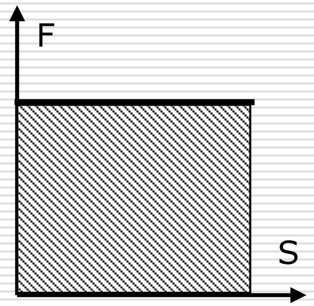
Zastosowanie rachunku całkowego w fizyce

$$W = F \cdot S \quad \rightarrow$$



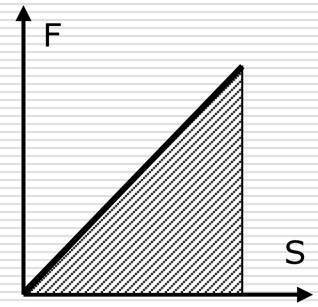
$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow$$



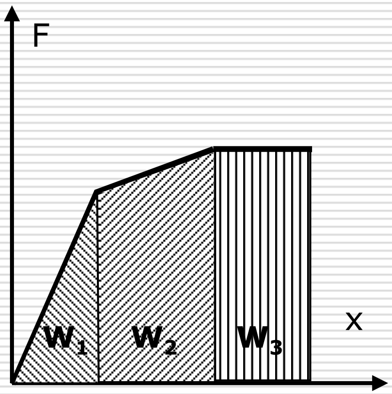


Założenie: ***F = const !!***

Co w sytuacji gdy *F* – zmienne? $W = F_{śr} \cdot S$



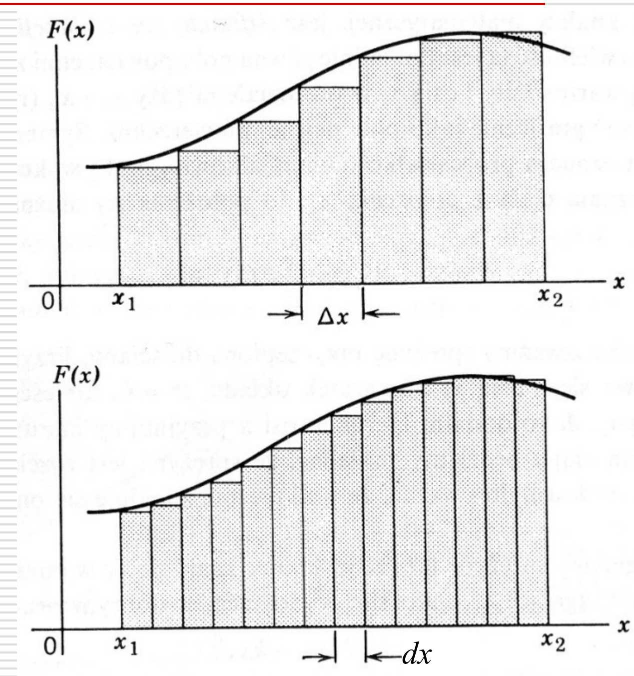
Gdy *F* – zmienne niejednostajnie:



$$W = \sum_i W_i = W_1 + W_2 + W_3$$

a jeżeli $\Delta x \to 0$ to

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$



wtedy $dW = F \cdot dx$ $W = \int dW = \int F \cdot dx$

W ogólnym przypadku: $W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$

$$S(t) = \int dS(t)$$

wynik całkowania to taka funkcja, której pochodna jest pod całką.

dS(t) – różniczka funkcji pierwotnej *S(t)*

ale: $\int dS(t) = S(t) + C$

Podstawowe wzory:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int 0dx = C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsinx + C$$

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

Przykłady

- Zadanie 1.

Na ruszające z miejsca i poruszające się prostoliniowo ciało działa siła $F = 2x^2 - 3x + 1$ [N]. Obliczyć jaką pracę wykonuje ta siła na drugim metrze drogi.

Rozwiązanie

$$W = \int F(x)dx = \int_1^2 (2x^2 - 3x + 1)dx \qquad \text{a zatem}$$

$$W = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \Big|_1^2 = \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 4 + 2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) = \ldots.. \quad = \quad 1\frac{1}{6}\ [J]$$

Zadanie 2.

Prędkość kuli o masie *m* = ½ kg poruszającej się prostoliniowo jest zależna od czasu w następujący sposób:

V(t) = 2-½ t^2 [m/s].

A) Oblicz średnią szybkość kuli.

Rozwiązanie:

$$V_{sr} = \frac{S_{calk}}{t_{calk}}$$

- jak długo poruszała się kula?

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{2}t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

- jaką drogę przebyła w tym czasie?

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = V(t)dt \quad \Rightarrow \quad S = \int_0^2 V(t)dt$$

$$S = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)dt = 2t - \frac{1}{6}t^3 \Big|_0^2 = \ldots \quad \frac{8}{3}m$$

a zatem $V_{sr} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = 1\frac{1}{3} m/s$

B) Podaj równanie siły hamującej działającej na kulę

Rozwiązanie:

$$F = m \cdot a \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = -t \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}t \quad [N]$$

C) Oblicz całkowitą pracę wykonaną przez siłę hamującą

Rozwiązanie:

ponieważ *F≠const* $\quad W = \int F(t)\ dS$ **!!!!** tego nie można scałkować!

ale $\quad V(t) = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = V(t)dt \qquad W = \int F(t) \cdot V(t)dt = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)dt$

ostatecznie $\quad W = \int_0^2 \left(-t + \frac{1}{4}t^3\right)dt = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 \Big|_0^2 = -1J$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int g(x)dx = \left| \begin{matrix} podstawienie: \\ x = f(u) \\ dx = f'(u)du \end{matrix} \right| = \int g(f(u)) \cdot f'(u)\, du$$

Przykłady

A. $\int \frac{dx}{ax+b} =$ | podstawienie: $ax + b = u$, $a \cdot dx = du$, $dx = \frac{1}{a}du$ | $= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} ln|ax + b|$ **+ C**

B. $\int x\sqrt{1 + x^2}dx =$ | podstawienie: $1 + x^2 = z$, $2x \cdot dx = dz$, $x \cdot dx = \frac{1}{2}dz$ | $= \frac{1}{2}\int z^{1/2}\, dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3}$ **+ C**

C. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} =$ | podstawienie: $x^2 = u$, $2x \cdot dx = du$ | $= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(u) = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)$ **+ C**

Ale uwaga przy całkach oznaczonych!

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} =$$

podstawienie:

$2x - 3 = u$

$2 \cdot dx = du$

zmiana granic:

$x=2 \Rightarrow u=1$

$x=3 \Rightarrow u=3$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

lub – nie przeliczając granic:

$$= \frac{1}{2}\int_a^b u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} \Big|_a^b =$$

$$= \sqrt{2x-3} \Big|_2^3 = \sqrt{3} - 1$$

Zadania do poćwiczenia

- **Zadanie 3.**

Prom kosmiczny o masie *m* zmienił promień orbity z R_1 na $R_2 = 1/3\ R_1$. Dana jest masa Ziemi i powszechna stała grawitacji G. Oblicz wartość wykonanej pracy.
Kto wykonał tę pracę?

- **Zadanie 4.**

Łódź podwodna o masie *m* z włączonymi silnikami porusza się ze stałą szybkością V_0. Znaleźć zależność szybkości łodzi od czasu po wyłączeniu silników, jeśli opory ruchu są proporcjonalne do prędkości $F = -b \cdot V$, gdzie b to stała zależna od doskonałości hydrodynamicznej łodzi. Oblicz jaką drogę przebędzie łódź.