

Wykład 20:

Dualizm korpuskularno falowy – cz.1.

Dr inż. Zbigniew Szklarski

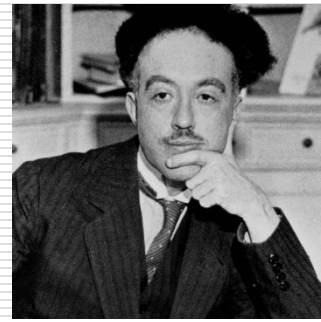
Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

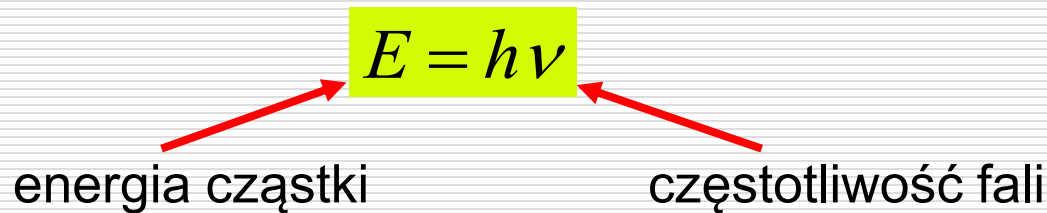
Dualizm korpuskularno-falowy; Fale materii

Louis de Broglie
(1892-1987)



Radykalna propozycja kwantyzacji energii:

- w limicie małych częstości - obraz falowy (Maxwell),
- w limicie dużych częstości - o promieniowaniu należy myśleć jak o „gazie” kwantów



Promieniowanie należy w pewnych przypadkach traktować jak fale a w innych eksperymentach jak cząstki. Ta dwoistość jest cechą nie tylko promieniowania, lecz również materii.

**1924- Louis de Broglie – teoria fal materii,
1929- nagroda Nobla**

Hipoteza de Broglie głosi, że dwoiste korpuskularno – falowe zachowanie jest cechą nie tylko promieniowania, lecz również materii.

Pęd każdego obiektu związany jest z długością przypisanej mu fali następującą relacją:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (1) \quad c = \nu \cdot \lambda \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

stąd: cząsteczce o pędzie p i całkowitej energii E odpowiada

fala płaska o częstotliwości $\nu = \frac{E}{h}$ i długości $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

Definiujemy: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

gdzie $\vec{k}$ jest wektorem falowym o kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji fali o długości λ . Wówczas związek (1) ma postać:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Wielkości charakterystyczne dla **cząstki** : energia E , oraz pęd p są związane poprzez stałą Plancka h z wielkościami które są charakterystyczne dla **ruchu falowego**: częstotliwość ν , oraz długość fali λ .

Wyrażenie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

opisuje długość **fali de Broglie**. czyli długość fali materii stowarzyszonej z ruchem cząstki o pędzie p .

Cząsteczka swobodna zachowuje się zatem jak fala opisana równaniem:

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

gdzie

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{i} \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

Przykłady

3. Obiekt mikroskopowy:

Elektron o masie $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, przyspieszony różnicą potencjałów $U = 150$ V:

$$\frac{mv^2}{2} = Ue \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 10^7 \text{ m/s} \quad \text{a zatem} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}} \approx 10^{-10} \text{ m}$$

4. Obiekt makroskopowy:

Piłka o pędzie $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$:

$$p = mv = 10 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p} = 6,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

5. W pewnym mikroskopie elektronowym korzysta się z wiązki elektronów o energii 20 keV. Jeżeli zdolność rozdzielcza mikroskopu jest równa długości fali elektronu, oblicz rozmiar najmniejszego obiektu jaki można przez ten mikroskop obserwować. Porównaj zdolność rozdzielczą mikroskopu elektronowego i optycznego.

Rozwiązanie

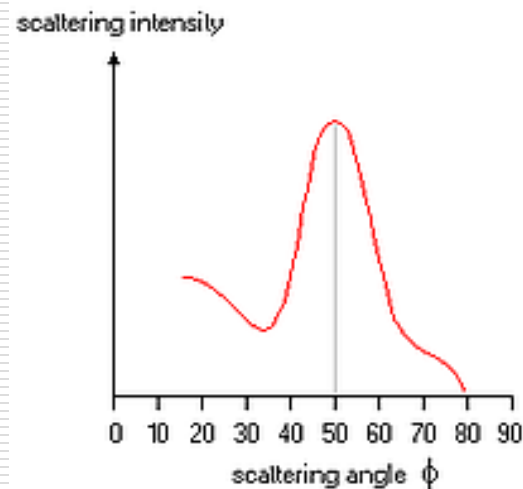
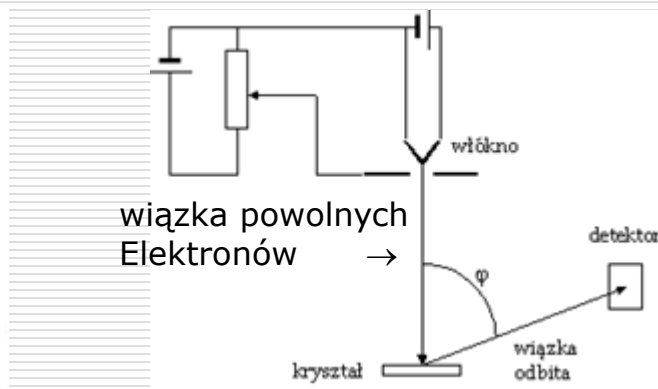
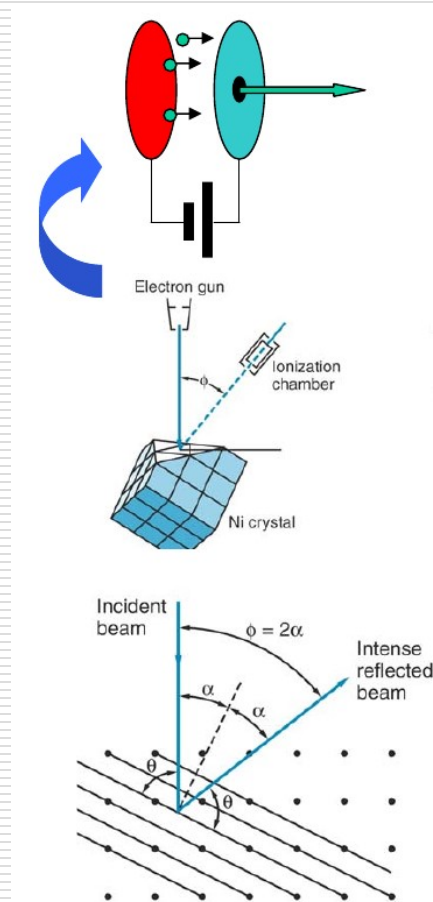
$$E_k = E \quad \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = E \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2Em}$$

$$p = \frac{h}{\lambda_e} \Rightarrow \lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2Em}} \quad \text{stąd} \quad \lambda_e = 8,67 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

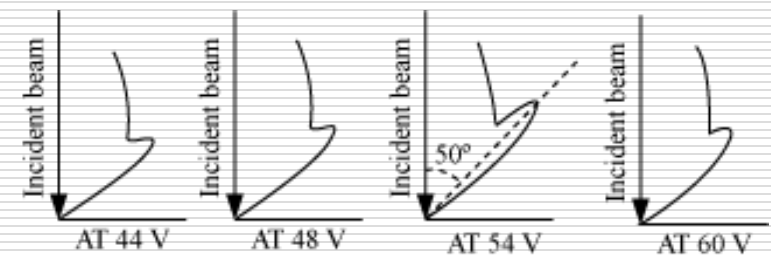
W mikroskopie optycznym zdolność rozdzielcza $\sim \lambda_{\min}$
zatem $\lambda_{\text{opt}} \approx 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

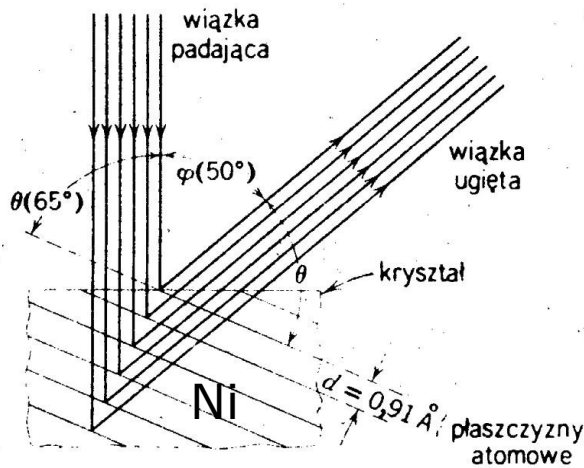
$$\lambda_e = 8,6 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \text{5 rzędów wielkości lepsza rozdzielczość !!!}$$

Doświadczenie Davissona – Germera



1927





Dla dyfrakcji promieniowania na sieci krystalicznej - wzmocnienie promieni ugiętych – gdy spełniony jest warunek Bragga: $\lambda = 2d \cdot \sin \theta$

dla niklu $d = 0,091 \text{ nm}$

$$\varphi = 50^\circ \quad \text{więc} \quad \theta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = 65^\circ$$

zatem

$$\lambda = 0,165 \text{ nm}$$

ze wzoru de Broglie'a, dla napięcia przyspieszającego 54 V:

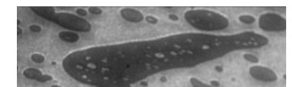
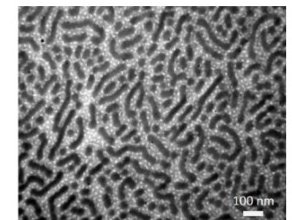
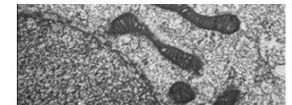
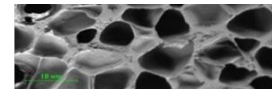
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mUe}} = 0,165 \text{ nm}$$

Zgodność wyników potwierdzająca falową naturę elektronów!

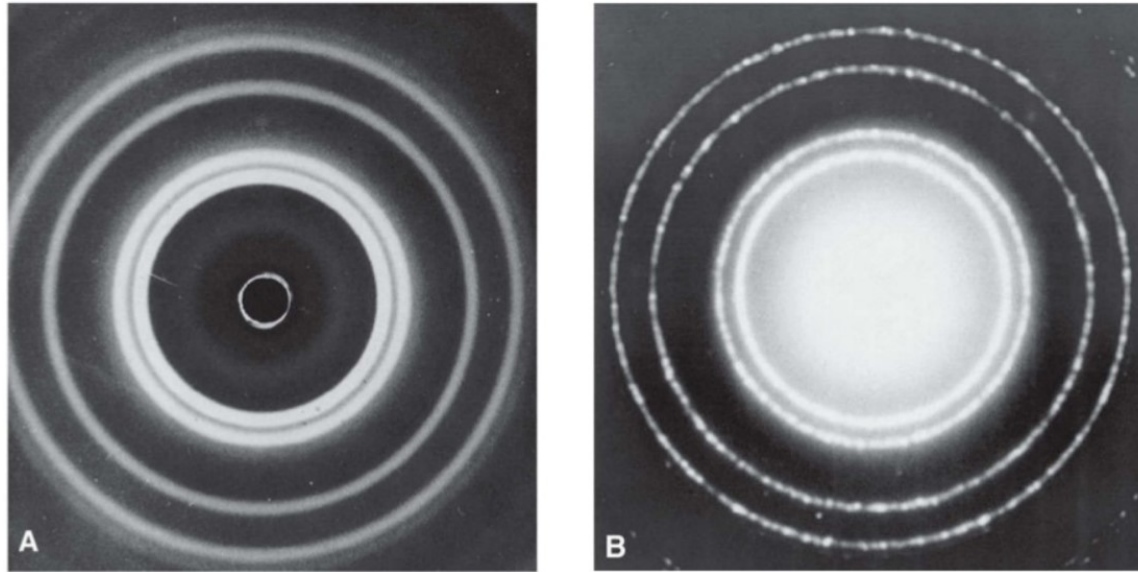
Jeden z trzech najpotężniejszych na świecie mikroskopów - najnowszej generacji analityczny mikroskop elektronowy (S)TEM FEI Titan Cubed G-2 60-300. Rozdzielczość: 70 pm !



ACMiN
AGH



Comparing the diffraction patterns of x-rays and electrons.



Copyright ©The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

□ Ruch elektronu w atomie

Ruch elektronów w wiązce nie jest niczym ograniczony. Natomiast w przypadku elektronów związanych z atomami, ruch elektronów może być opisany przez stojące fale materii – o długości związanej z długością orbity. Ruch ten jest kwantowany – energia elektronów może przyjmować tylko określone wartości.

Falę materii (stojącą), związaną z orbitą o promieniu r można przedstawić następująco:

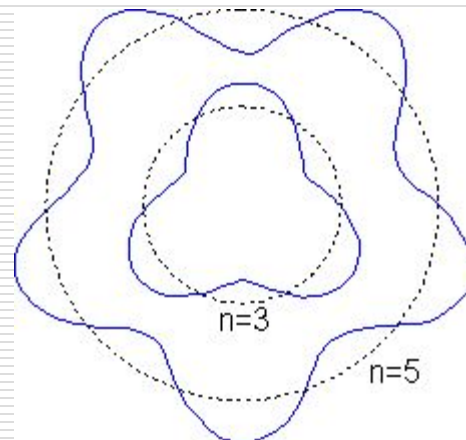
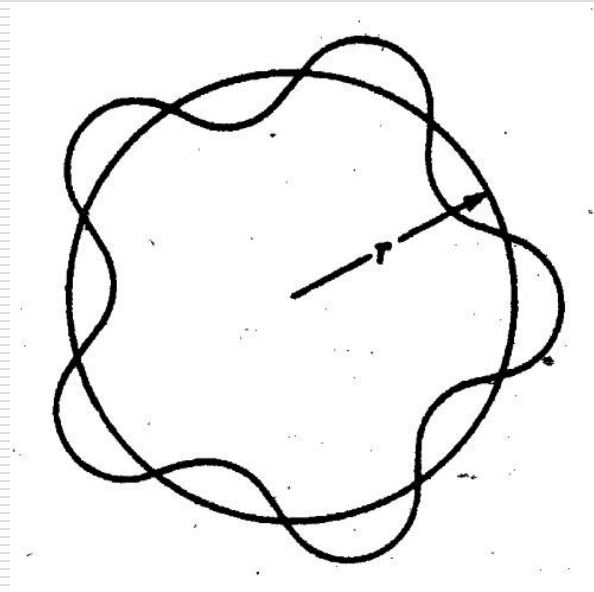
Długość fali musi być tak dobrana, aby orbita o promieniu r zawierała całkowitą liczbę fal materii:

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{p} \quad p = \frac{nh}{2\pi r}$$

A więc moment pędu:

$$L = r \cdot p = n \frac{h}{2\pi} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, \dots$$

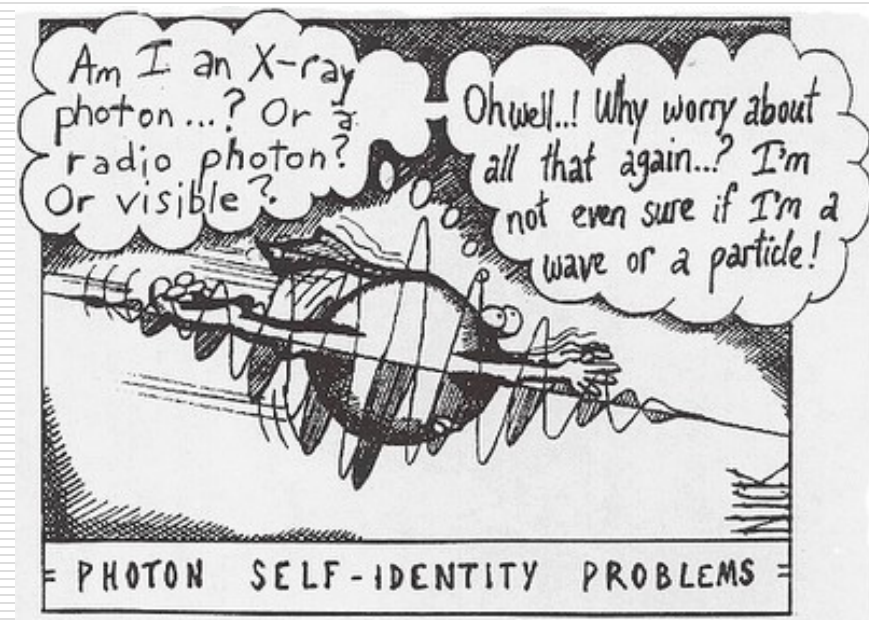
jest to warunek kwantyzacji Bohra !



□ Korpuskularna natura promieniowania

Doświadczalnie :

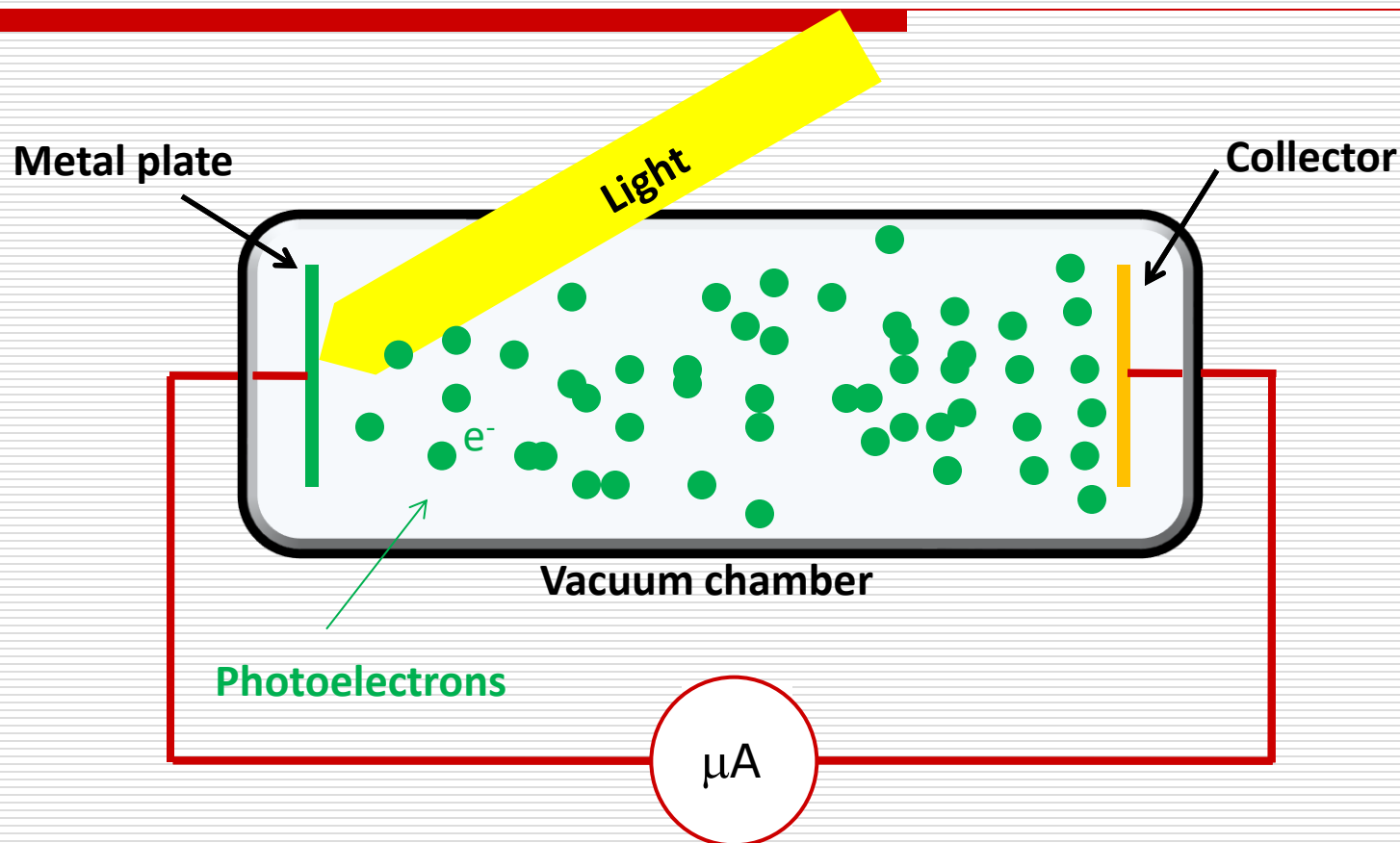
- Efekt fotoelektryczny (uwalnianie elektronów z metalicznej powierzchni pod wpływem promieniowania o określonej długości)
- Efekt Comptona (rozpraszanie promieniowania X i zmiana częstotliwości)

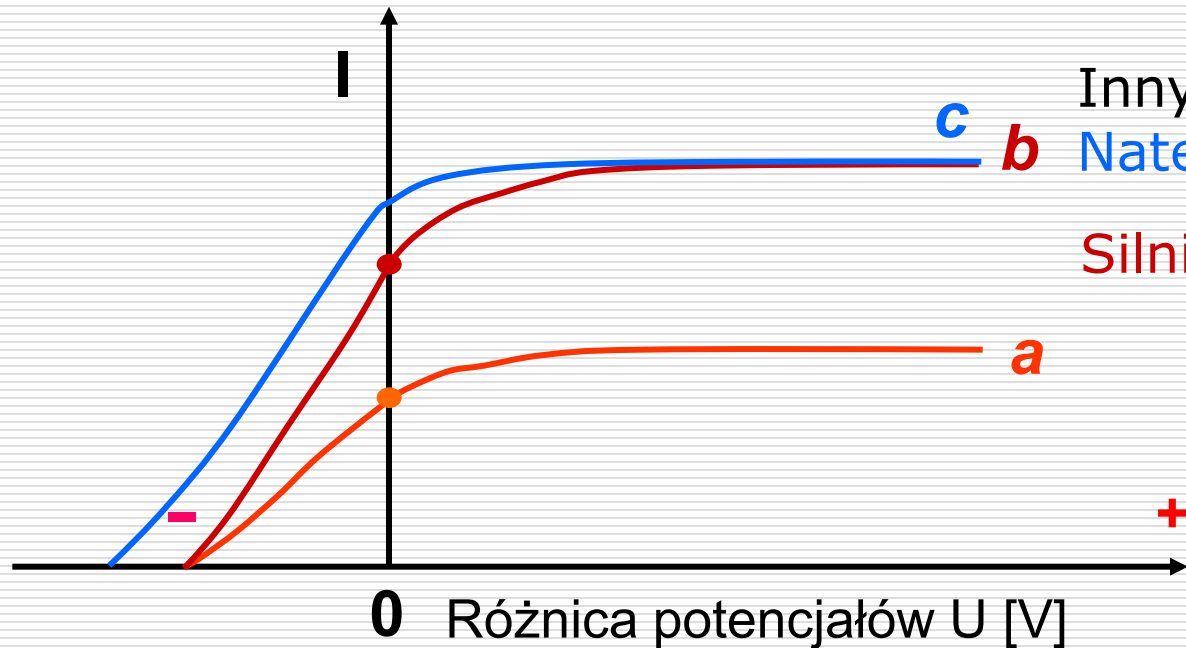


Te zjawiska, podobnie jak promieniowanie ciała doskonale czarnego, nie mogą być wyjaśnione przy użyciu modelu falowego.

Efekt fotoelektryczny

1887 Hertz; 1888 Stoletow
1902 von Lenard





Inny metal **c** katody niż **a** i **b**,
Natężenie oświetlenia jak **b**

Silniejsze **b** oświetlenie niż **a**

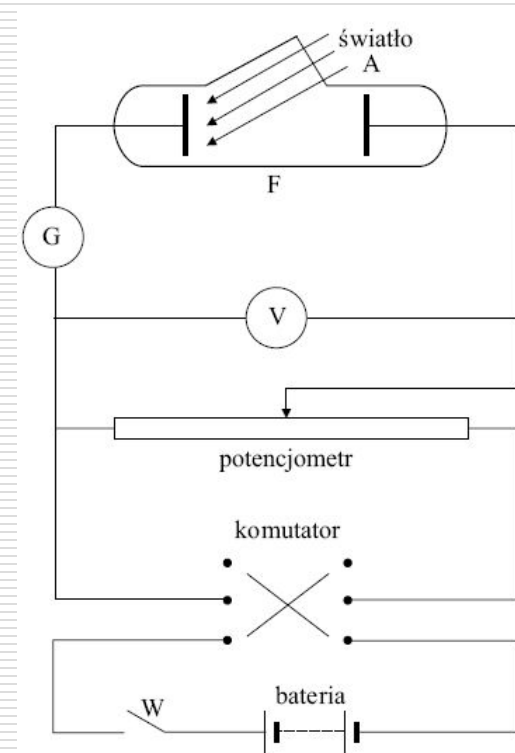
Elektrony emitowane z metalu pod wpływem promieniowania elektromagnetycznego noszą nazwę **fotoelektronów**. Jest to zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne.



□ Jak zbadać energię kinetyczną fotoelektronów?

Fotoelektrony wyhamuje pole wytworzone przez przeciwnie przyłożone napięcie U_h

$$U = \frac{dW}{e} \Rightarrow E_k = U_h \cdot e$$



Co się nie zgadza z teorią falową?

1. Energia kinetyczna fotoelektronu jest **niezależna** od natężenia padającego promieniowania. Dla danej częstości światła, silny strumień i słaba wiązka dostarczają wybijanym elektronom tyle samo energii.

Obraz falowy: natężenie fali związane jest z kwadratem amplitudy fali czyli większa energia fali powinna powodować większą energię wybijanych elementów (analogia fal na morzu i kamieni wyrzucanych ze stromego brzegu)



2. Zjawisko fotoelektryczne **nie występuje**, jeżeli częstość światła jest **niższa** od częstości progowej (lub długości granicznej) – bez względu na to jak intensywne jest światło padające na tarczę.

Obraz falowy: j.w. nie obserwuje się minimalnej długości/ częstotliwości fali dla analogii fal na morzu i kamieni wrywanych z klifu.

3. Nie obserwuje się **żadnego upływu** czasu pomiędzy oświetleniem metalu i emisją fotoelektronu. Klasycznie, energia jest gromadzona i dostarczana w sposób ciągły.

Obraz falowy: nawet małe fale po pewnym czasie mogą wrywać kamienie z klifu.

Efekt nie zachodzi na swobodnych elektronach.

Na co jest zużywana energia padającego światła?

Wiadomo, że metal zawiera dużą ilość prawie swobodnych elektronów, około 1 lub 2 na atom. Te elektrony są quasi-swobodne czyli nie są związane z atomami lecz mogą, po dostarczeniu pewnej energii, opuścić metal.

Energia ta nosi nazwę pracy wyjścia W z metalu. Praca wyjścia jest różna dla różnych metali i zależy od stanu powierzchni. Typowe wartości W zmieniają się od ok. $3 \cdot 10^{-19}$ J do $13 \cdot 10^{-19}$ J (2 do 8 eV).

$$1\text{eV} = 1e \cdot 1\text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Jeżeli energia światła jest wystarczająco duża to wybite elektrony będą miały jeszcze energię kinetyczną.

Wyjaśnienie Einsteina:

W 1905 r. Einstein wysunął hipotezę, że światło jest skwantowane (pojęcie wprowadzone przez M. Plancka) i istnieje w porcjach zwanych fotonami.

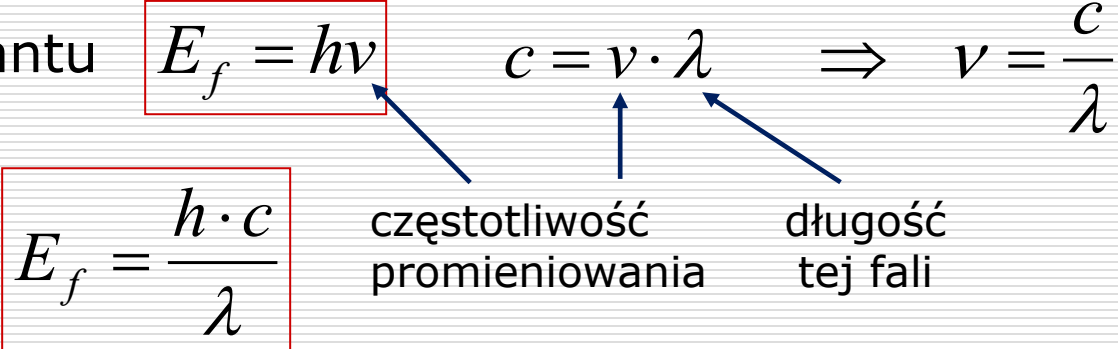
Energia kwantu $E_f = h\nu$

zatem $E_f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$

$c = \nu \cdot \lambda \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$

częstotliwość promieniowania

długość tej fali



Einstein założył, że foton może zostać zaabsorbowany przez elektron jeżeli energia fotonu przekracza konkretną wartość – pracy wyjścia z metalu:

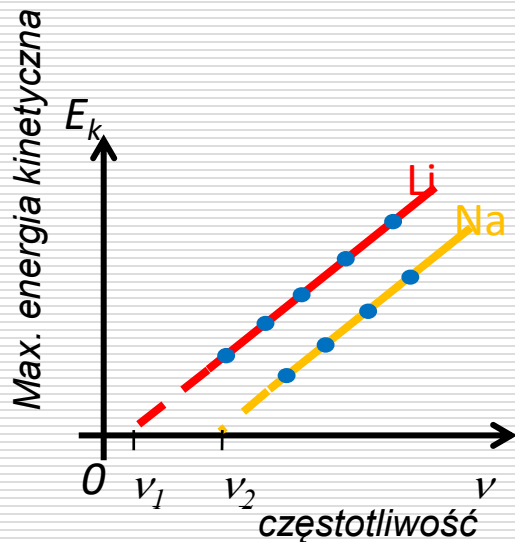
$$h\nu > W \quad \leftarrow \text{praca wyjścia z metalu}$$

Zasada zachowania energii w zjawisku fotoelektrycznym:

*Energia fotonu = praca wyjścia elektronu z metalu
+ energia kinetyczna elektronu*

$$E_f = W + E_k$$

$$h\nu = W + E_k$$



Pojedynczy foton jest absorbowany przez pojedynczy elektron, który może uzyskać energię kinetyczną

$$E_k = h\nu - W$$

$$\rightarrow y = ax - b$$

□ Wykorzystanie zasady zachowania energii.

$$h\nu = W + E_k$$

Jeżeli $E_k = 0$ to

$$h\nu_{gr} = \frac{hc}{\lambda_{gr}} = W \Rightarrow$$

$$\lambda_{gr} = \frac{hc}{W}$$

jest to graniczna długość światła, przy której zachodzi zjawisko fotoelektryczne.

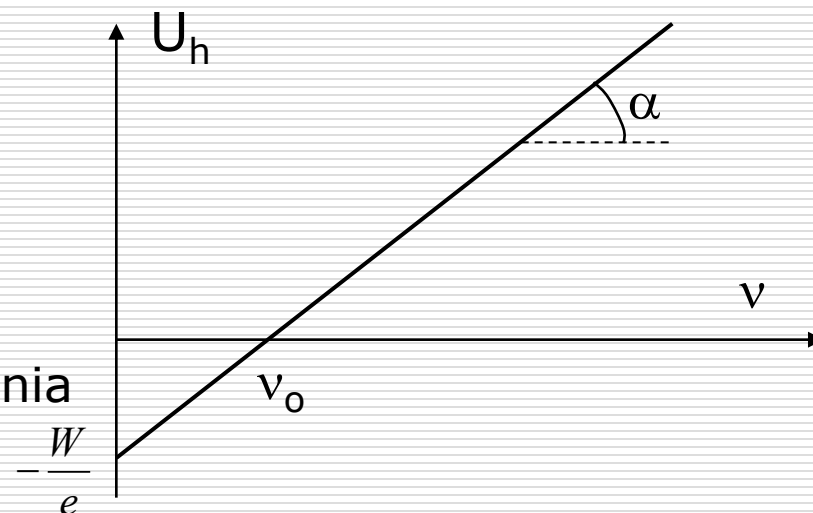
$$E_k = U_h \cdot e$$

$$E_k = h\nu - W \Rightarrow U_h = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

$$y = ax - b$$

Napięcie hamowania jest liniową
Funkcją częstotliwości promieniowania

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{e} \Rightarrow h = e \cdot \operatorname{tg} \alpha$$



Jest to więc sposób wyznaczenia pracy wyjścia oraz wartości stałej Plancka.

□ Przykład 6

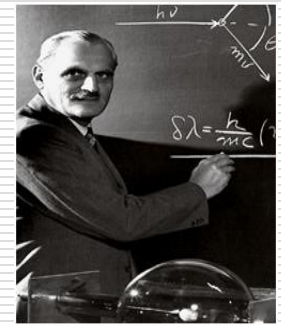
- A. Wiedząc, że natężenie oświetlenia jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła światła, oszacuj jak zmieni się prędkość fotoelektronów gdy odległość źródła światła od powierzchni metalu zmniejszymy dwukrotnie.
- B. Jak wpłynie zwiększenie częstotliwości światła padającego na powierzchnię metalu emitującego fotoelektrony na:
- ilość wybijanych fotoelektronów;
 - szybkość fotoelektronów

□ Przykład 7

Obliczyć jak i ile razy zmieni się prędkość elektronów wybijanych z metalu jeżeli dwukrotnie zmniejszymy długość fali padającej. Praca wyjścia z tego metalu równa jest $\frac{2}{3}$ energii padających fotonów.

□ Przykład 8

Obliczyć jak zależy energia kinetyczna wybijanych elektronów od długości padającego światła. Naszkicować wykres tej zależności.

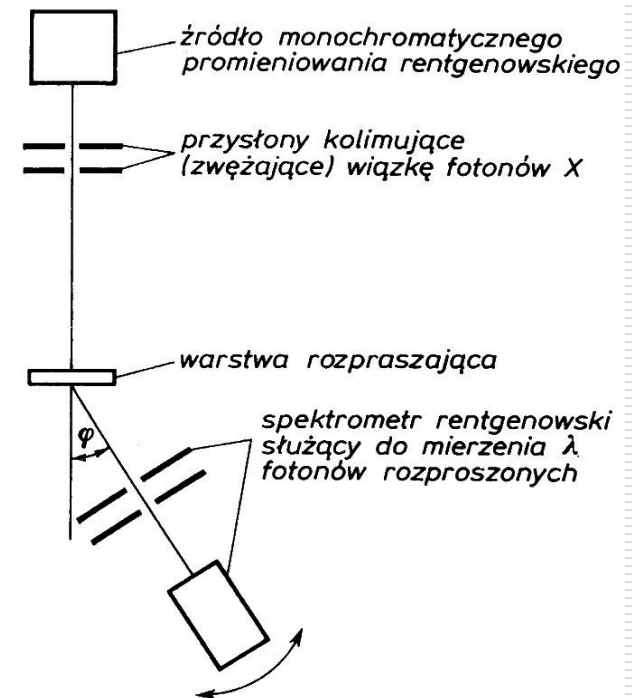


Efekt Comptona

Jeżeli światło można traktować jak zbiór fotonów, należy spodziewać się zderzeń pomiędzy fotonami i cząstkami materii (np. elektronami).

Compton (1923) zaobserwował rozproszone promienie X o zmienionej długości fali.

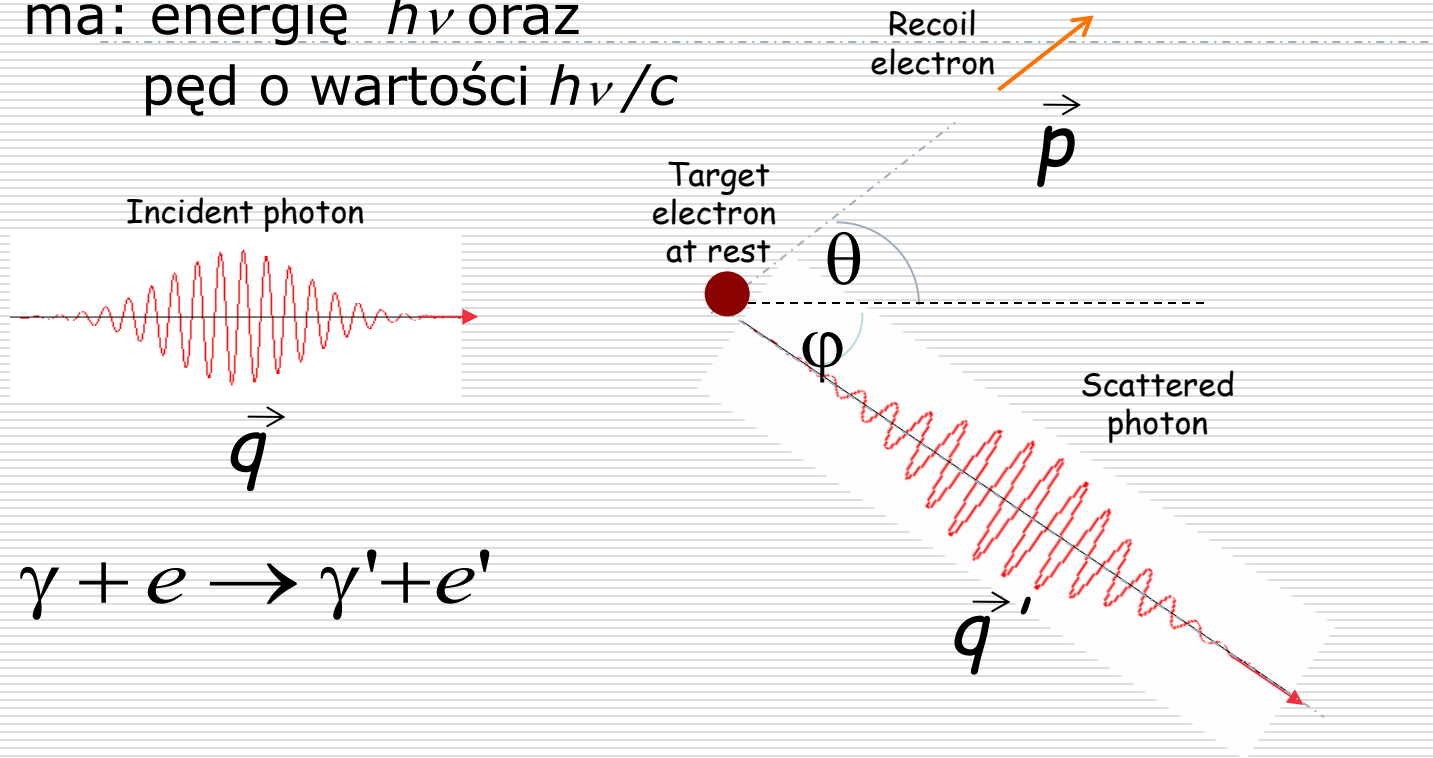
Klasyczna teoria fal elektromagnetycznych zjawisko rozproszenia tłumaczyła jako pobudzenie do drgań elektronów ośrodka rozpraszającego, które stają się wtórnym źródłem fal – ale **bez** zmiany długości !



Efekt Comptona jest wynikiem rozpraszania fotonu γ na quasi-swobodnym elektronie e w metalicznej próbce (folii):

Założmy, że początkowo :

- elektron jest w spoczynku, pęd wynosi 0, ale energia spoczynkowa $m_e c^2$
- foton ma: energię $h\nu$ oraz pęd o wartości $h\nu/c$



Po zderzeniu foton ma energię $h\nu'$ i pęd o wartości $h\nu'/c$

•Zasada zachowania energii:

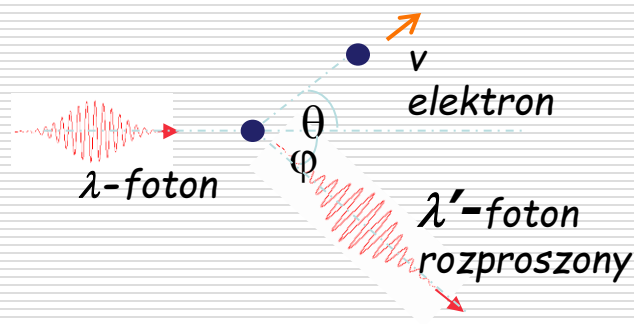
$$\frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2 = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{m.\text{elektronu}} c^2 + \frac{hc}{\lambda'}$$

•Zasada zachowania pędu dla osi OX

$$\frac{h}{\lambda} = \underbrace{\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{\text{elektron}} \cos \theta + \underbrace{\frac{h}{\lambda'} \cos \varphi}_{\text{foton}}$$

•Zasada zachowania pędu dla osi OY

$$0 = \underbrace{\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{\text{elektron}} \sin \theta - \underbrace{\frac{h}{\lambda'} \sin \varphi}_{\text{foton}}$$



Przesunięcie Comptona (długości) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ czyli różnica pomiędzy długością fali przed (λ) i po (λ') rozproszeniu:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) = \Lambda (1 - \cos \varphi) \qquad \Lambda = \frac{h}{m_0 c}$$

jest to tzw. comptonowska
długość fali równa
 $2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

W zjawisku Comptona zmiana długości fali nie zależy od energii fotonu padającego, a zależy jedynie od kąta jego rozproszenia.

Dla $\varphi = 0^\circ$ $\Delta\lambda = 0$;

dla $\varphi = 180^\circ$ $\Delta\lambda = 2 \Lambda$ (rozproszenie wsteczne);

a dla $\varphi = 90^\circ$ $\Delta\lambda = \Lambda$

□ Przykład 9

Obliczyć kąt, pod jakim został rozproszony w zjawisku Comptona foton o energii początkowej 1,2 MeV, na elektronie swobodnym, jeżeli długość fali fotonu rozproszonego równa jest comptonowskiej długości fali

$$\cos\varphi = 0,427 \Rightarrow \varphi \approx 65^\circ$$

□ Przykład 10

Promieniowanie X o długości fali λ jest rozpraszane pod kątem prostym na elektronie, który uzyskuje nie relatywistyczną prędkość V i zaczyna się poruszać pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do pierwotnego kierunku wiązki X. Zapisz zasady zachowania energii i pędu dla tego przypadku.

Zasada komplementarności Nielsa Bohra

Modele falowy i korpuskularny wzajemnie się uzupełniają: jeżeli dany pomiar dostarcza dowodu falowego, to w tym samym pomiarze nie da się wykryć cech korpuskularnych i na odwrót.

W obrazie **falowym** natężenie promieniowania:

$I \propto \overline{E^2}$ czyli średnia wartość wektora Poyntinga jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali.

W obrazie **fotonowym – korpuskularnym**:

$I = N h \nu$ gdzie N jest średnią liczbą fotonów przechodzących w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku ruchu fotonów.

Teorie, które zostały potwierdzone eksperymentalnie dla tej czy innej dziedziny zjawisk fizycznych, w momencie pojawienia się nowych, ogólniejszych teorii nie są odrzucane jako fałszywe, tylko zachowują swoje znaczenie jako forma graniczna oraz szczególny przypadek nowej teorii.

PRZYKŁADY:

Przekształcenia Galileusza są granicznym przypadkiem przekształceń Lorentza, pod warunkiem, że prędkości ciał są małe w stosunku do prędkości światła.

Wówczas równania mechaniki relatywistycznej przechodzą w prawa mechaniki Newtona.

Ogólna teoria względności przy nieobecności pola grawitacyjnego i dążeniu potencjałów grawitacyjnych do zera przechodzi w szczególną teorię względności, a przy małych prędkościach i słabych polach — w mechanikę klasyczną.

Dziedziny rzeczywistości fizycznej nie są zamknięte, izolowane jedna od drugiej, a ich granice nie są dokładnie określone i nieprzekraczalne. W związku z tym w obszarach granicznych istnieje możliwość zastosowania obu „sąsiadujących” teorii. Korespondencja formalizmów matematycznych jest najwyraźniejszym momentem tego aspektu jedności.