

Wykład 2: Wektory

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Wielkości fizyczne

Długość, czas, siła, masa, prędkość, pęd, przyspieszenie, temperatura, naprężenie, natężenie prądu elektrycznego, natężenie pola elektrycznego, moment bezwładności, przemieszczenie, strumień pola magnetycznego.

SKALARY



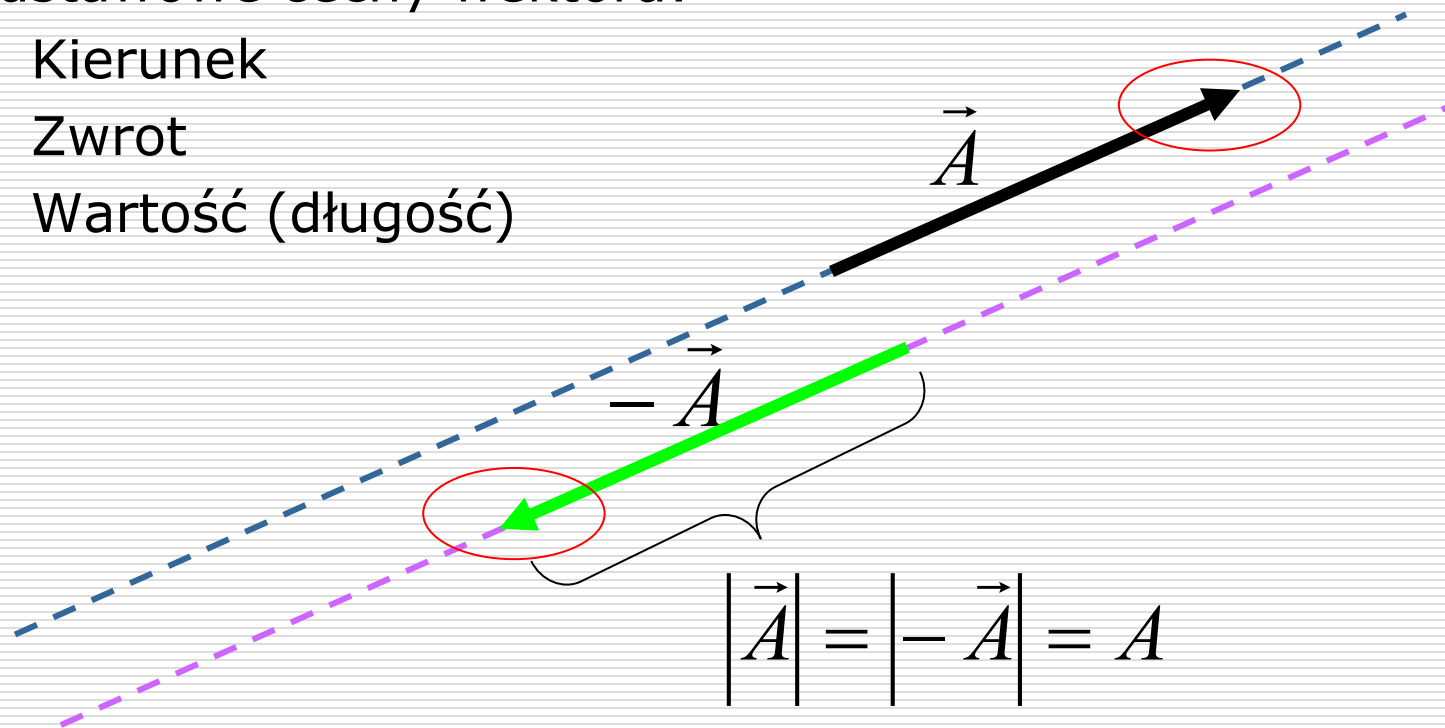
WEKTORY



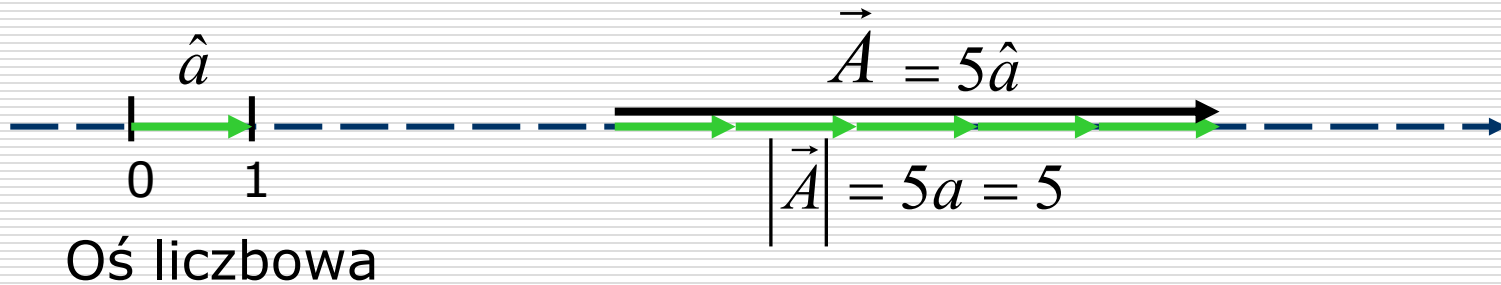
Pojęcie wektora

Podstawowe cechy wektora:

- Kierunek
- Zwrot
- Wartość (długość)

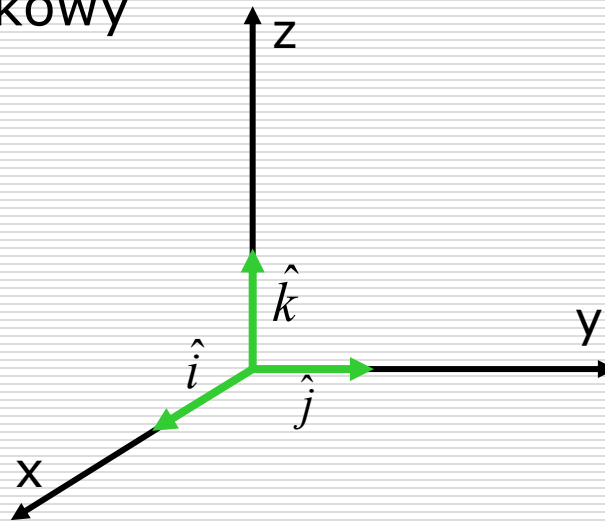


Długość wektora, wersor



Wersor to wektor jednostkowy

$$|\hat{a}| = 1$$



$$\hat{i} = \hat{x}$$

$$\hat{j} = \hat{y}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

Działania na wektorach

Dodawanie

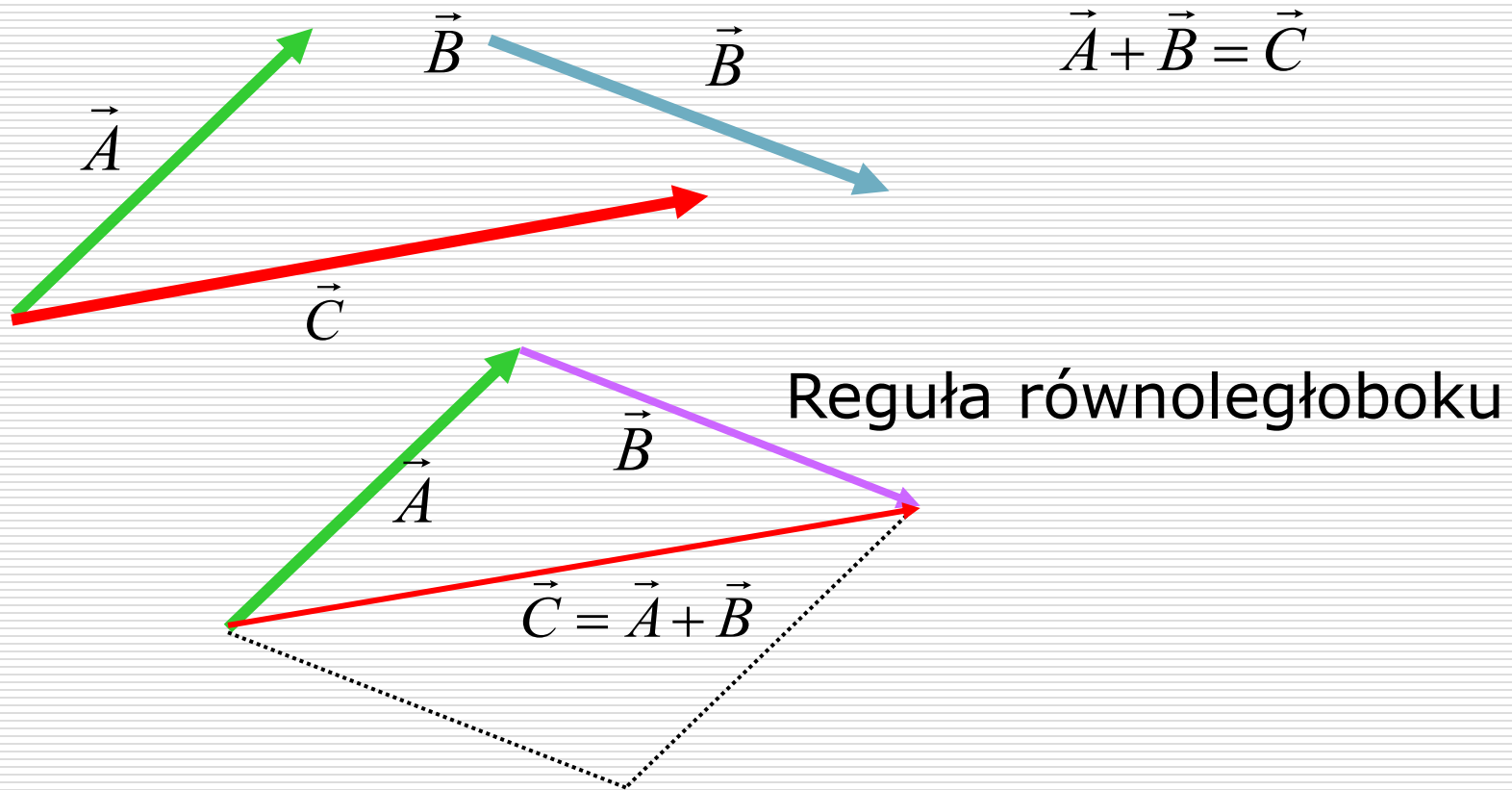
Odejmowanie

Mnożenie:

- Iloczyn wektora przez liczbę
- Iloczyn skalarny dwóch wektorów
- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

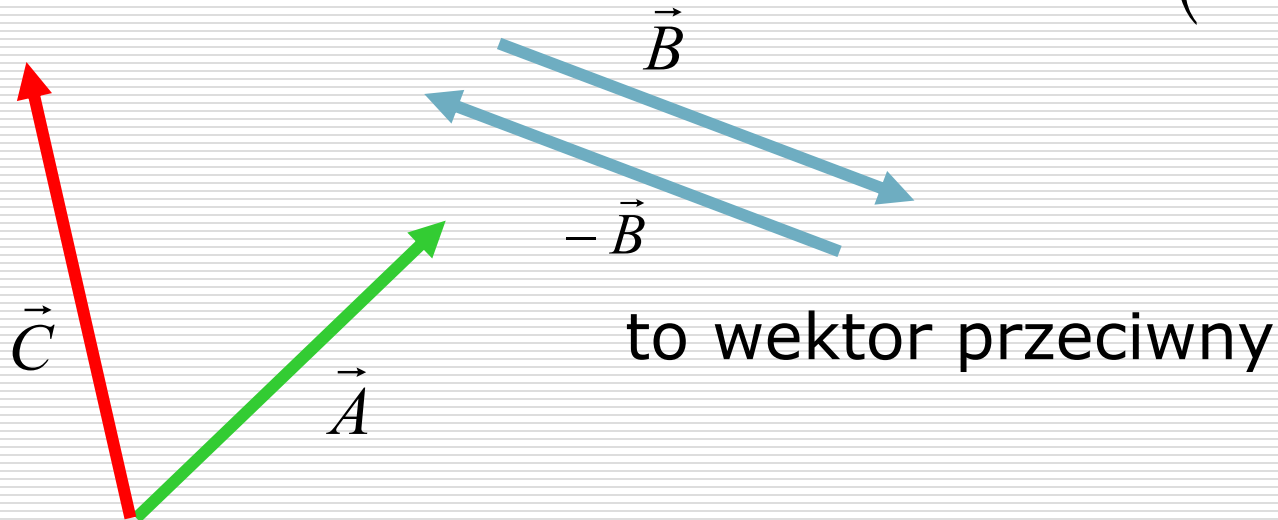
Nie ma dzielenia wektora przez wektor !

Dodawanie wektorów



Odejmowanie wektorów

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{C}$$

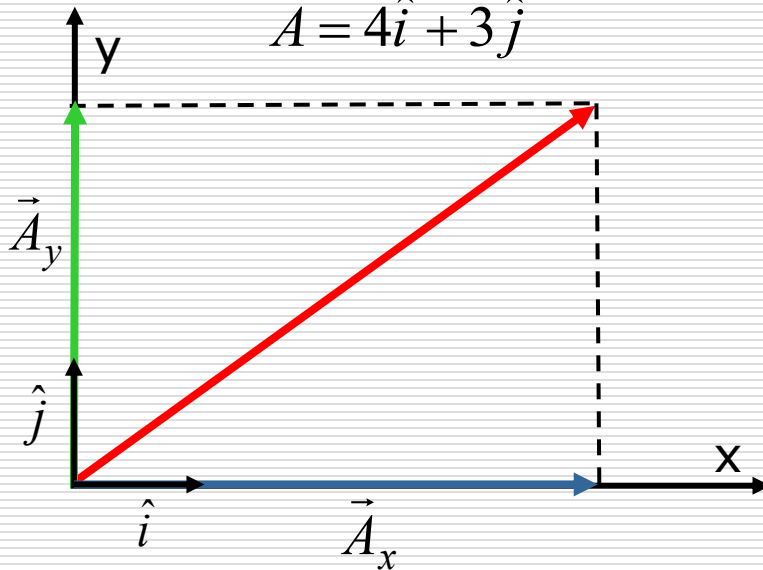


Rozkład wektora na składowe

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j}$$

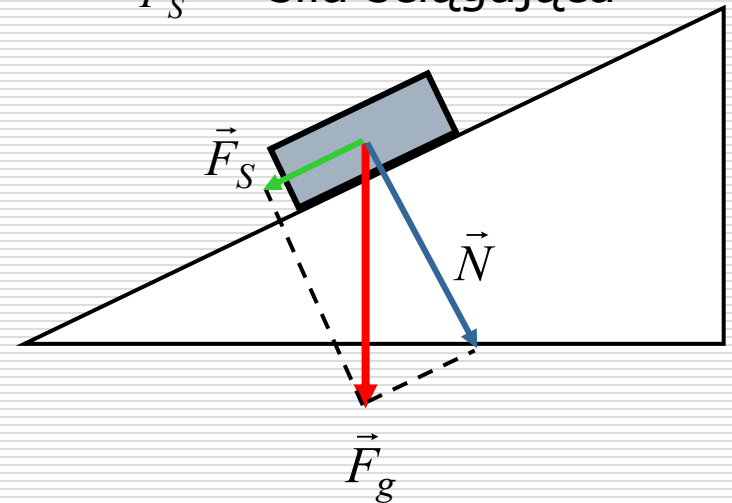
$$a_x = 4 \quad a_y = 3$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$



Przykład:
rozkład sił na równi

- \vec{F}_g - siła grawitacji
- \vec{N} - siła nacisku
- \vec{F}_S - siła ściągnająca



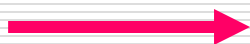
Iloczyn wektora przez liczbę

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

Wynik działania jest wektorem

Wektory \vec{a} i \vec{b} są równoległe - (mają ten sam kierunek)

\vec{a}



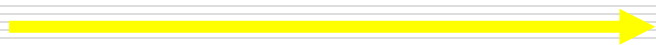
$$3 \vec{a} = \vec{b}$$

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Gdy $k > 0$, zwroty zgodne

Gdy $k < 0$, zwroty przeciwne

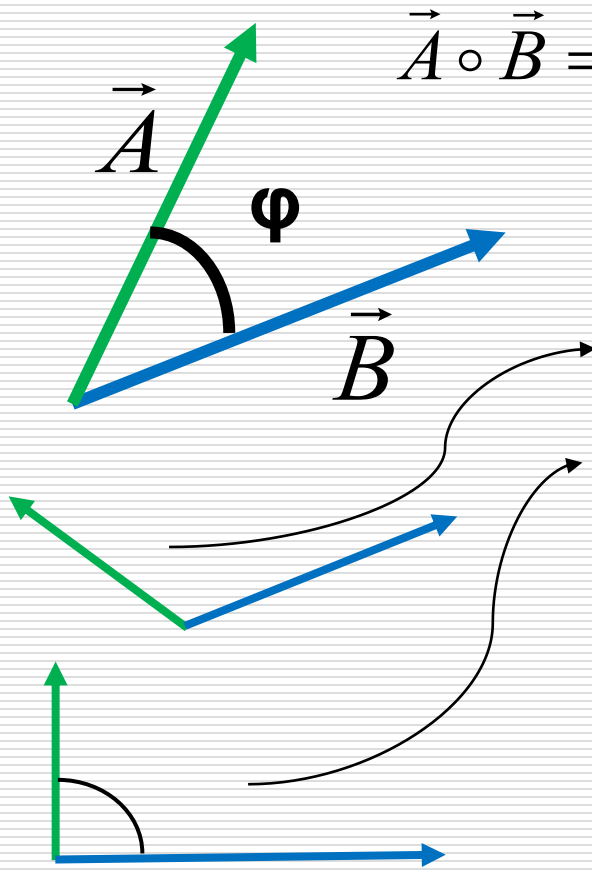
$$-1,5 \vec{a} = \vec{b}$$



Wartość (długość) wektora:

$$b = |k|a$$

Iloczyn skalarny wektorów



$$\vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi$$

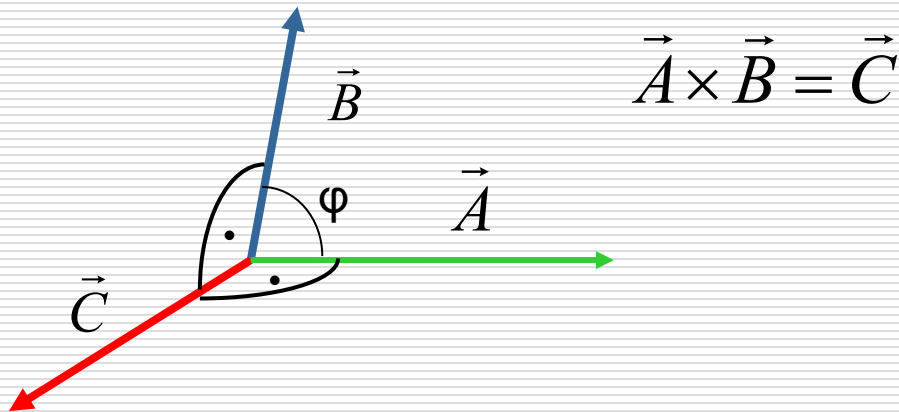
Wynik mnożenia jest liczbą:

- dodatnią
- ujemną (kiedy?)
- zero (kiedy?)

Iloczyn skalarny jest przemienny

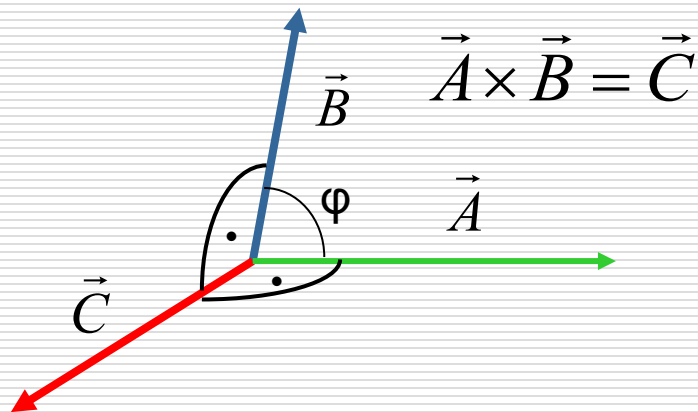
$$\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A}$$

Iloczyn wektorowy



Wynik działania jest wektorem.
Należy zatem podać nie tylko
wartość ale również kierunek i
zwrot wektora

Właściwości iloczynu wektorowego



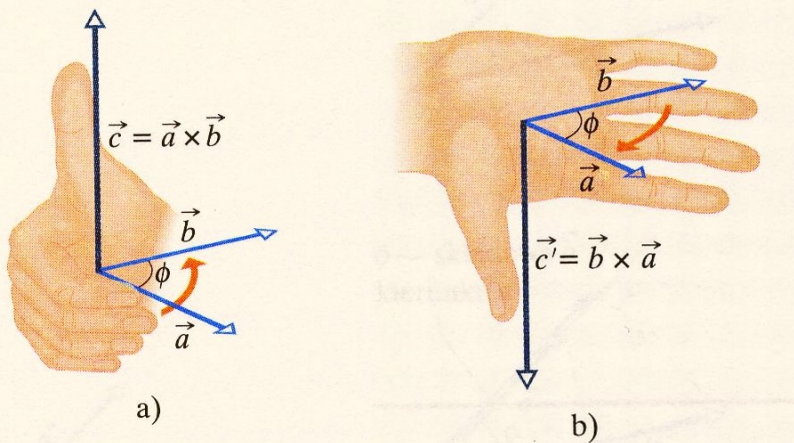
1. Kierunek

$$\vec{C} \perp \vec{A} \quad i \quad \vec{C} \perp \vec{B}$$

- jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory \vec{A} i \vec{B}

2. Zwrot \vec{C}

- określa reguła śruby prawoskrętnej (prawej ręki)



Właściwości iloczynu wektorowego

3. Wartość iloczynu $\rightarrow |\vec{C}| = A \cdot B \cdot \sin \varphi$

Pozostałe właściwości:

- Nie jest przemienny $\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Jeżeli przynajmniej jeden z wektorów jest zerowy $\rightarrow \vec{A} \times \vec{0} = 0$
lub wektory mają ten sam kierunek (pokrywają się lub są równoległe) $\rightarrow \vec{A} \times \vec{A} = 0$

Algebra wektorów

Rozdzielność iloczynu skalarnego i wektorowego
względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{A} \circ (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \circ \vec{B} \pm \vec{A} \circ \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}$$

Przykład:

Obliczyć wektor \vec{X} z równania:

$$2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{X} \left[(\vec{A} + \vec{B}) \circ \vec{B} \right] = 0$$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{X} \left[(\vec{A} + \vec{B}) \circ \vec{B} \right] = 0$$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{X} \left[\vec{A} \circ \vec{B} + \vec{B} \circ \vec{B} \right] = 0$$

ale: $\vec{B} \circ \vec{B} = B^2$ więc $2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{X} \left[\vec{A} \circ \vec{B} + B^2 \right] = 0$

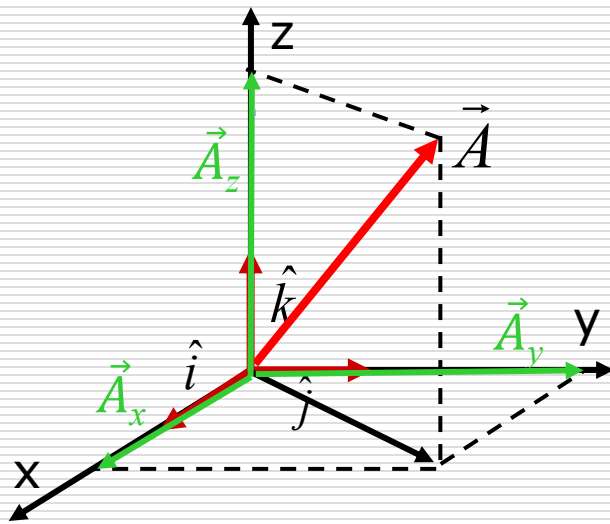
dodając i odejmując stronami jak w „zwykłym”

równaniu: $\vec{X} \left[\vec{A} \circ \vec{B} + B^2 \right] = -2\vec{A} + 3\vec{B}$

skoro wyrażenie w nawiasie

jest liczbą, to otrzymujemy: $\vec{X} = \frac{-2\vec{A} + 3\vec{B}}{\vec{A} \circ \vec{B} + B^2}$

Wektor w układzie kartezjańskim



Oblicz:

$$\begin{array}{ccc} \hat{i} \times \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{i} \\ \hat{j} \circ \hat{k}, & \hat{i} \circ \hat{k}, & \hat{j} \circ \hat{j} \end{array}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

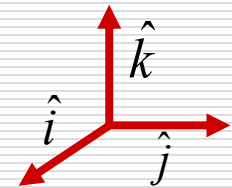
zależności między wersorami:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$



Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Dodawanie: $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ $\vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

- Iloczyn skalarny

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \circ (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

$$= a_x b_x \hat{i} \circ \hat{i} + \cancel{a_x b_y \hat{i} \circ \hat{j}} + \cancel{a_x b_z \hat{i} \circ \hat{k}} + \dots =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi$$

⇓

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1; \quad \hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

■ Przykład:

1. Wędrowiec przeszedł 25 km w kierunku północnym, a następnie 35 km w kierunku południowo-zachodnim. Oblicz wartość przemieszczenia wędrowca. ($\sin 45^\circ = 0,7071$)
2. Wektor $\vec{V} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$. Ile razy dłuższy/krótszy jest wektor $\vec{W} = n \cdot \vec{V}$, który ma długość $|\vec{W}| = 7$?
3. Wektor \vec{A} o długości 6 jednostek jest skierowany przeciwnie do osi OY, a wektor \vec{B} o długości 4,5 jednostek jest skierowany pod kątem 45° w kierunku dodatnim osi OX i OY. Oblicz sumę tych wektorów.
4. Położenie cząsteczki opisane jest równaniem: $\mathbf{r}(t) = 2,6t\mathbf{i} + 3,85\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$. Oblicz szybkość cząsteczki w drugiej sekundzie ($t = 2\text{s}$).

Iloczyn wektorowy c.d.

$$\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad \vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Oblicz: $\vec{A} \circ \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{B}$ oraz kąt między wektorami:

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{j} + 3\hat{k}$$

Zastosowanie rachunku wektorowego w fizyce

Iloczyn skalarny:

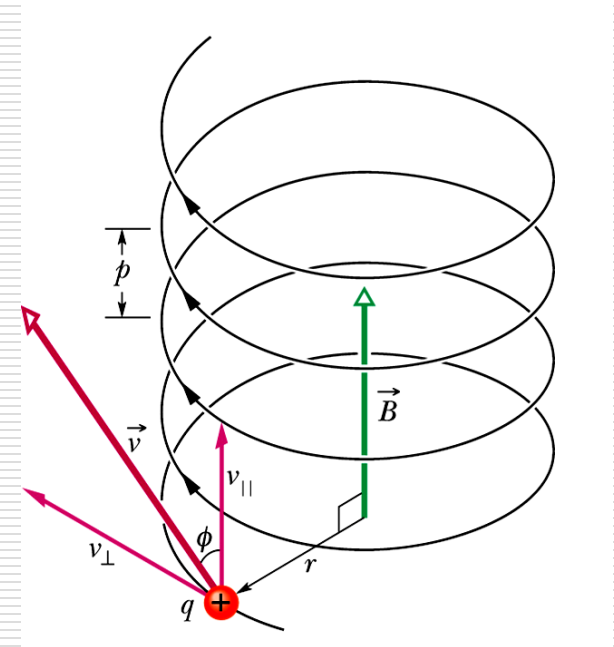


Praca $W = F \cdot S \cdot \cos \alpha = \vec{F} \circ \vec{S}$

Iloczyn wektorowy: $\vec{F}_L = q\vec{V} \times \vec{B}$

siła dośrodkowa

zakrzywiająca tor: $F_L = qV_{\perp}B = \frac{mV^2}{r}$



Zastosowanie rachunku wektorowego w fizyce - **zadanie**

Stałe siły $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ [N] oraz $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ [N] (gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę.

przesuwając ją z punktu A (0, 4, 0) do B (2, 3, 4).

- Oblicz:
 - a) wektor przesunięcia;
 - b) wypadkową siłę;
 - c) kąt między siłami składowymi;
 - d) pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki;
- Moment siły wypadkowej działającej na cząstkę w punkcie B względem środka układu.

Przykład

Wykazać, że pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej poruszającej się w nim, naładowanej cząsteczki.

$$E_k = \frac{m}{2} \vec{v} \circ \vec{v} \quad \text{Stała energia} \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} = 0$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \circ \vec{v}) = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{m}{2} 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \circ \vec{v}$$

$$\text{ale } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{gdzie} \quad \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{czyli } \frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v} = q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \circ \vec{v}}_0$$

$$E_k = \text{const}$$

Podsumowanie

Działanie	Wynik	Metoda postępowania	Zastosowanie
dodawanie $\vec{a} + \vec{b}$	wektor	reguła równoległoboku	wypadkowe przemieszczenie wypadkowa siła
odejmowanie $\vec{a} - \vec{b}$	wektor		algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń
rozkład wektora	wektory składowe		równia pochyła, rzut ukośny, itp.

Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezyj.	W matematyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$	skalar	$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \varphi$	$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	prostopadłość wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$	wektor	$ \vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \varphi$ 1. kierunek 2. zwrot 3.wartość	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	równoległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę k	wektor	$k \cdot \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ 1. kierunek 2. zwrot 3.wartość	$ka_x = b_x$ $ka_y = b_y$ $ka_z = b_z$	równoległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki

Przykłady

- Stałe siły $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{F}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę przesuając ją z punktu A (3, 8, 12) do B (0, 0, 7).
Obliczyć pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki.
- Wektor położenia ciała o masie $m = 2$ kg dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało w ciągu drugiej sekundy jego ruchu.
- Cząsteczka o ładunku $Q = 2C$ porusza się w próżni torem opisanym równaniem $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ i wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego $\mathbf{B} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Oblicz działającą tu siłę Lorentza. Oblicz pracę wykonaną przez tą siłę na bardzo małym odcinku drogi.