Wykład 2: Wektory

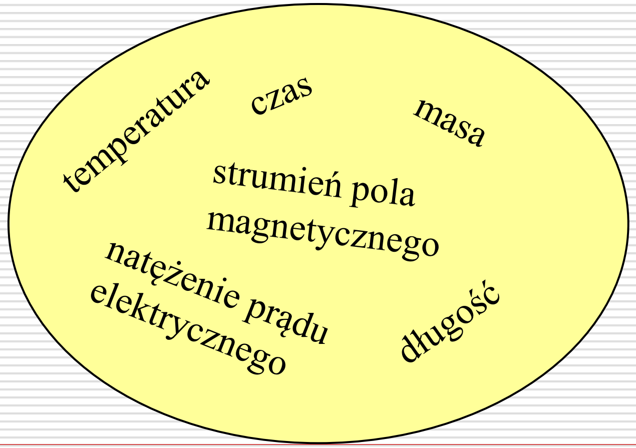
dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Wielkości fizyczne

Długość, czas, siła, masa, prędkość, pęd, przyspieszenie, temperatura, naprężenie, natężenie prądu elektrycznego, natężenie pola elektrycznego , moment bezwładności, przemieszczenie, strumień pola magnetycznego.

SKALARY

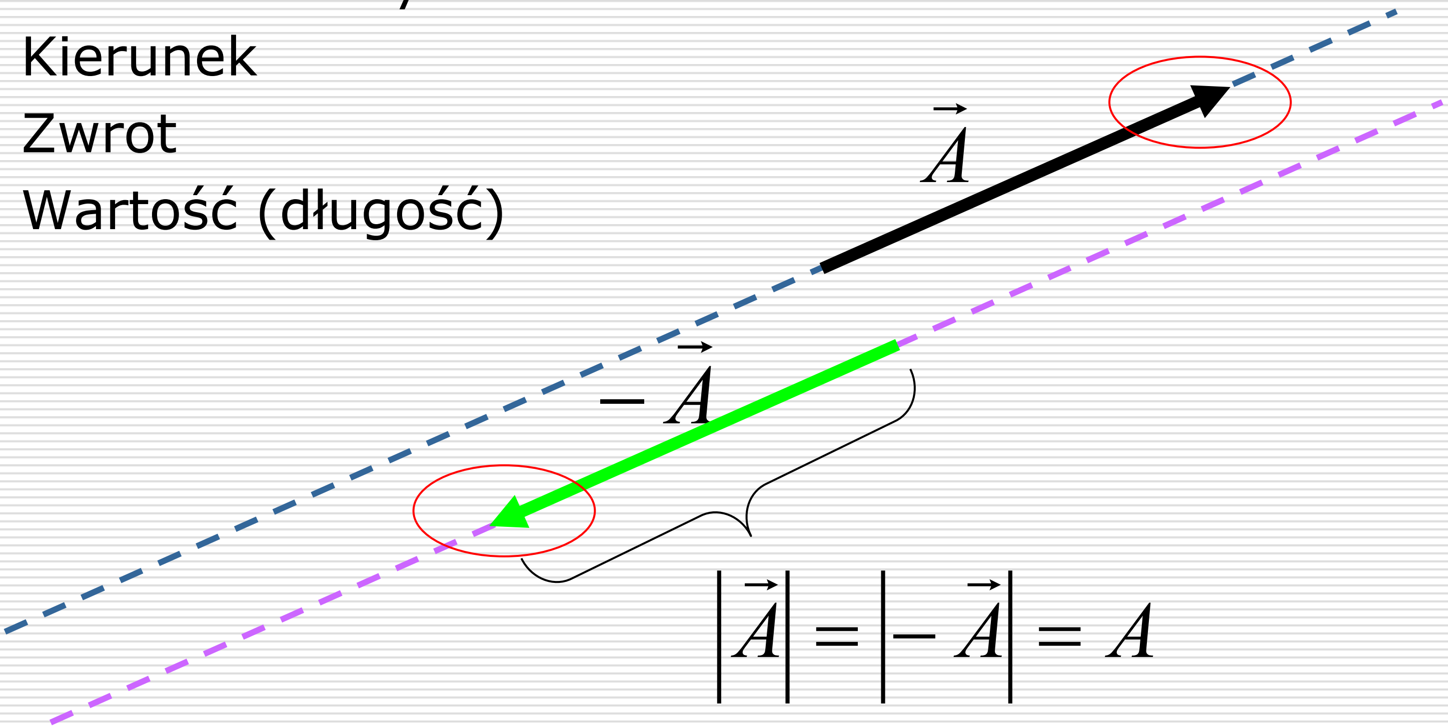


WEKTORY

Pojęcie wektora

Podstawowe cechy wektora:

- Kierunek
- Zwrot
- Wartość (długość)

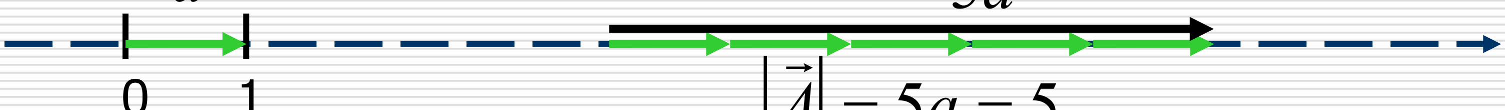


$$\left|\vec{A}\right| = \left|-\vec{A}\right| = A$$

Długość wektora, wersor

$\hat{a}$

$\vec{A} = 5\hat{a}$

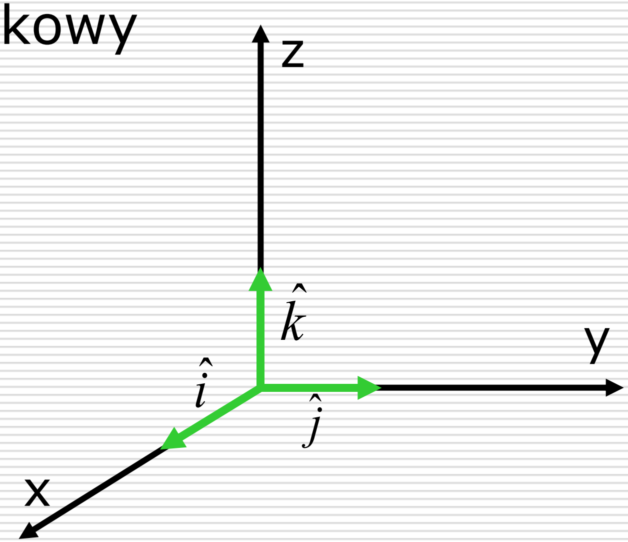


$\left|\vec{A}\right| = 5a = 5$

Oś liczbowa

Wersor to wektor jednostkowy

$$\left|\hat{a}\right| = 1$$



$\hat{k}$ $\hat{i}$ $\hat{j}$

$$\hat{i} = \hat{x}$$

$$\hat{j} = \hat{y}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

Działania na wektorach

Dodawanie

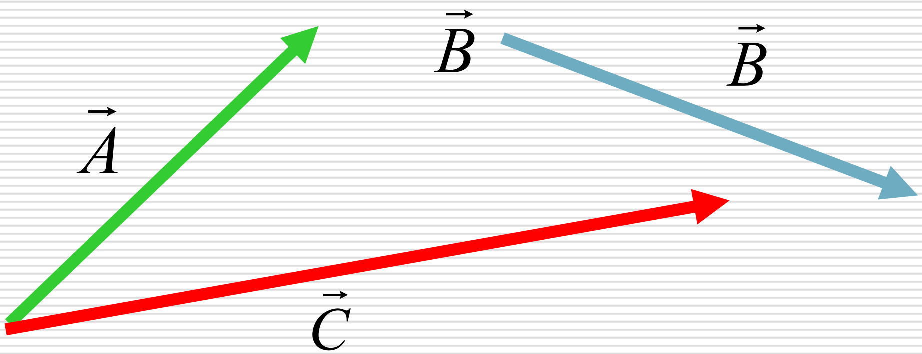
Odejmowanie

Mnożenie:

- Iloczyn wektora przez liczbę
- Iloczyn skalarny dwóch wektorów
- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

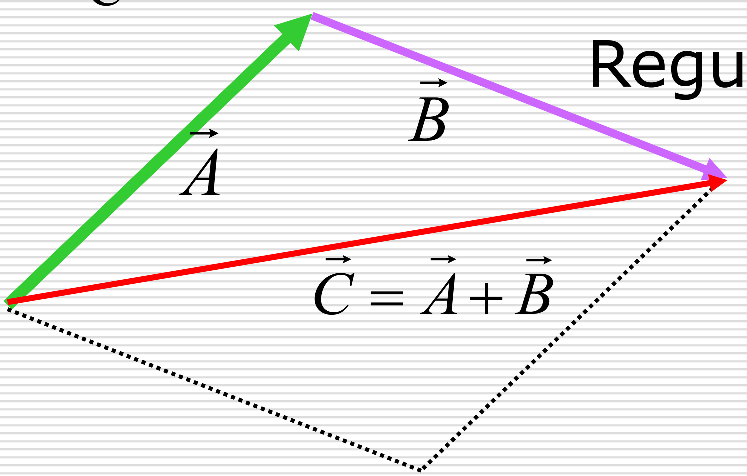
Nie ma dzielenia wektora przez wektor !

Dodawanie wektorów



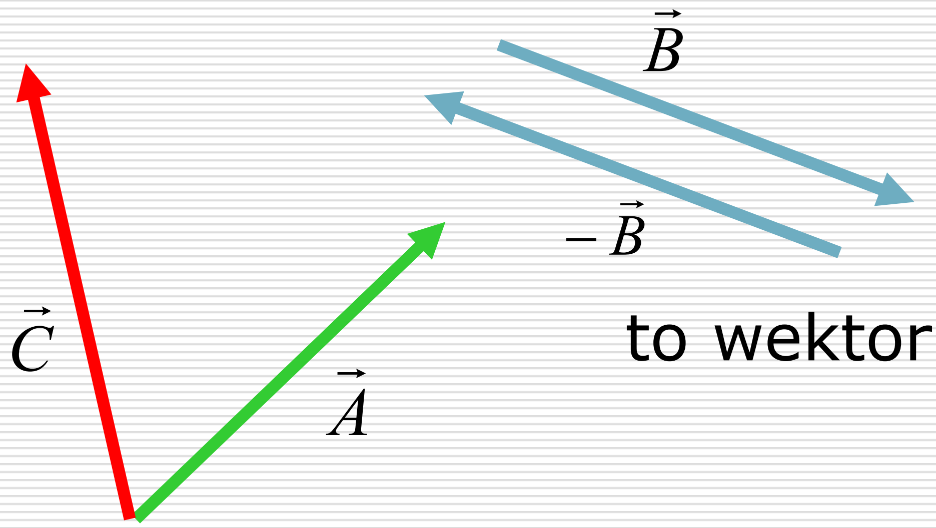
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

Reguła równoległoboku



Odejmowanie wektorów

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right) = \vec{C}$$



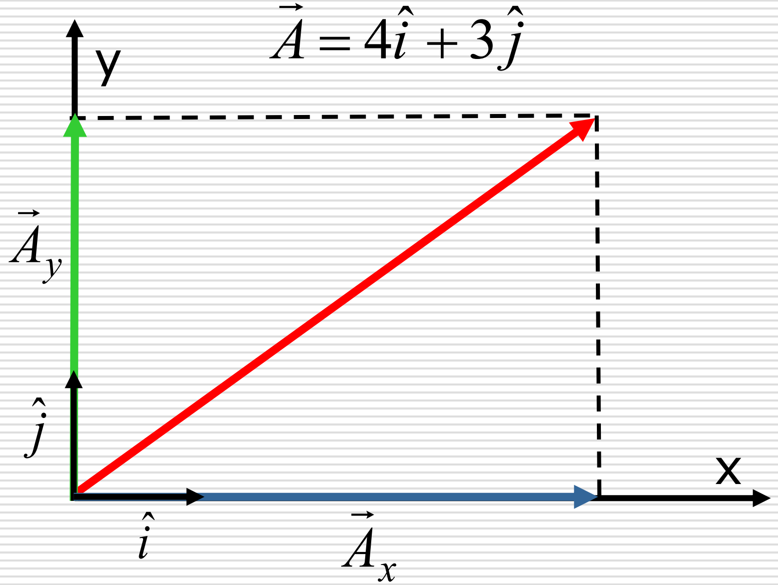
to wektor przeciwny

Rozkład wektora na składowe

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j}$$

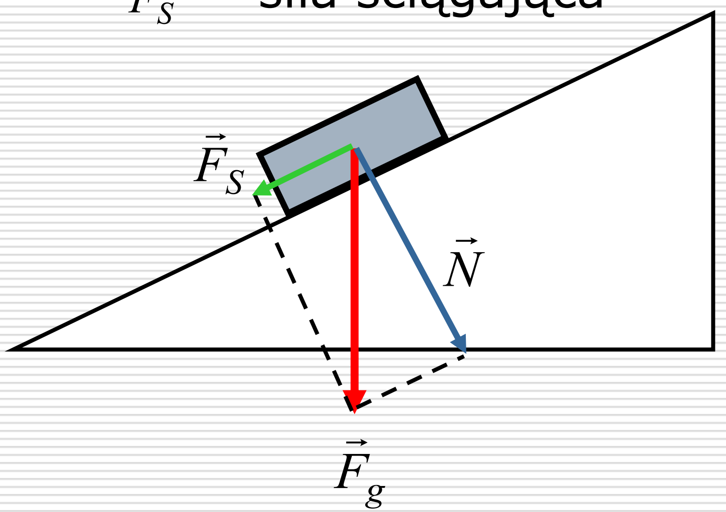
$$a_x = 4 \qquad a_y = 3$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$



Przykład:
rozkład sił na równi

$\vec{F}_g$ - siła grawitacji
$\vec{N}$ - siła nacisku
$\vec{F}_S$ - siła ściągająca



Iloczyn wektora przez liczbę

$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ Wynik działania jest wektorem

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe - (mają ten sam kierunek)

$\vec{a}$

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$3\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$

Gdy k>0, zwroty zgodne

$-1{,}5\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$

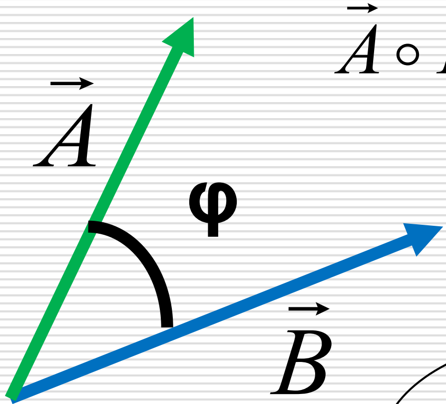
Gdy k<0, zwroty przeciwne

$0{,}5\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$

Gdy k<1 ?

Wartość (długość) wektora: $b = |k|a$

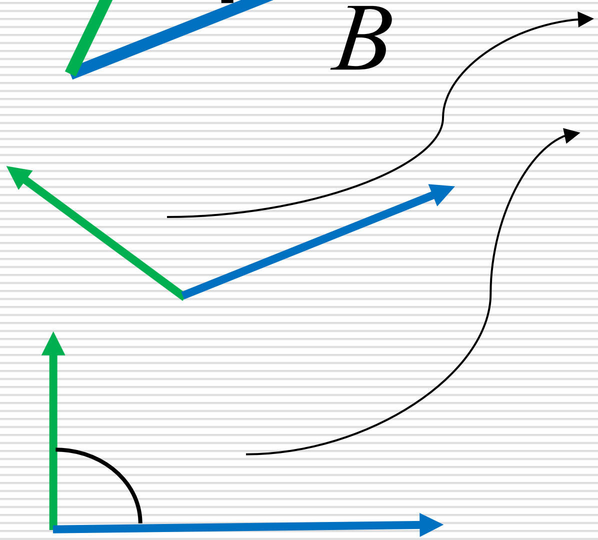
Iloczyn skalarny wektorów



$$\vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\varphi$$

Wynik mnożenia jest liczbą:

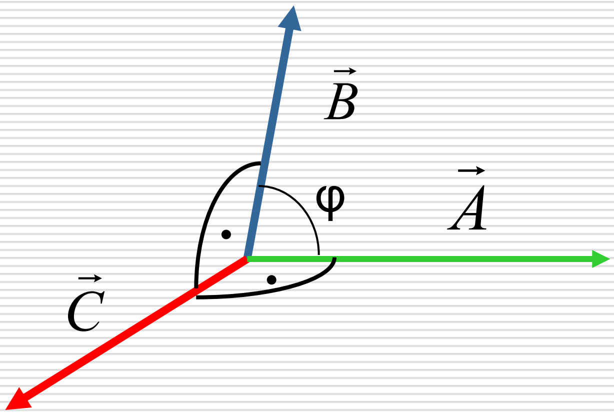
- dodatnią
- ujemną (kiedy?)
- zero (kiedy?)



Iloczyn skalarny jest przemienny

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A}$$

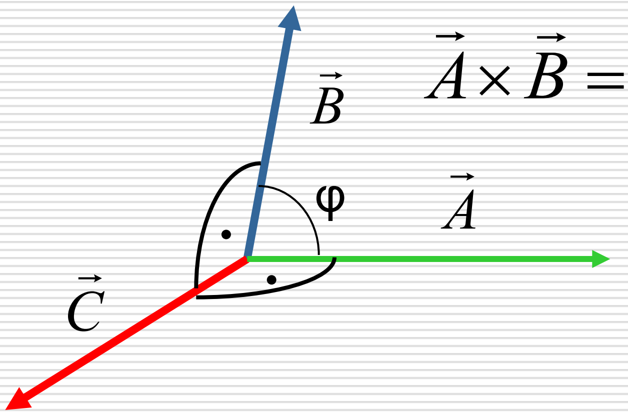
Iloczyn wektorowy



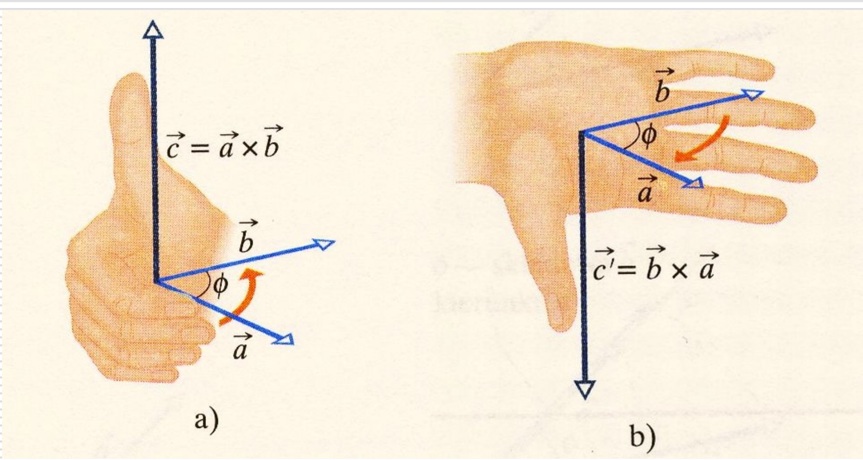
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

Wynik działania jest wektorem. Należy zatem podać nie tyko wartość ale również kierunek i zwrot wektora

Właściwości iloczynu wektorowego



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$



1. Kierunek

   $\vec{C} \perp \vec{A} \quad i \quad \vec{C} \perp \vec{B}$

   - jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$

2. Zwrot $\vec{C}$

   - określa reguła śruby prawoskrętnej (prawej ręki)

Właściwości iloczynu wektorowego

3. Wartość iloczynu → $\left|\vec{C}\right| = A \cdot B \cdot \sin\varphi$

Pozostałe właściwości:

- Nie jest przemienny → $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Jeżeli przynajmniej jeden z wektorów jest zerowy → $\vec{A} \times \vec{0} = 0$
  lub wektory mają ten sam kierunek (pokrywają się lub <u>są równoległe</u>) → $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

Algebra wektorów

Rozdzielność iloczynu skalarnego i wektorowego względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{A} \circ \left(\vec{B} \pm \vec{C}\right) = \vec{A} \circ \vec{B} \pm \vec{A} \circ \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \pm \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}$$

Przykład:

Obliczyć wektor $\vec{X}$ z równania:

$$2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{X}\left[\left(\vec{A} + \vec{B}\right) \circ \vec{B}\right] = 0$$

$$2\vec{A}-3\vec{B}+\vec{X}\left[\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\circ\vec{B}\right]=0$$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

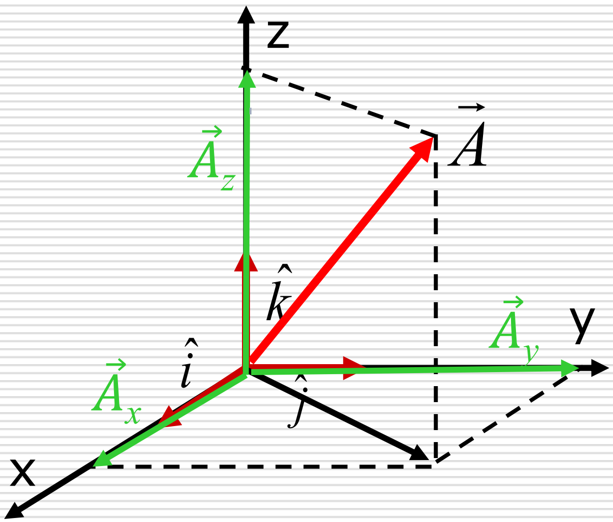
$$2\vec{A}-3\vec{B}+\vec{X}\left[\vec{A}\circ\vec{B}+\vec{B}\circ\vec{B}\right]=0$$

ale: $\vec{B}\circ\vec{B}=B^2$ więc $2\vec{A}-3\vec{B}+\vec{X}\left[\vec{A}\circ\vec{B}+B^2\right]=0$

dodając i odejmując stronami jak w „zwykłym” równaniu: $\vec{X}\left[\vec{A}\circ\vec{B}+B^2\right]=-2\vec{A}+3\vec{B}$

skoro wyrażenie w nawiasie jest liczbą, to otrzymujemy: $\vec{X}=\dfrac{-2\vec{A}+3\vec{B}}{\vec{A}\circ\vec{B}+B^2}$

Wektor w układzie kartezjańskim



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

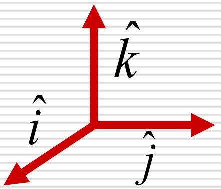
zależności między wersorami:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$



Oblicz:

$$\hat{i} \times \hat{k}, \qquad \hat{j} \times \hat{k}, \qquad \hat{j} \times \hat{i}$$

$$\hat{j} \circ \hat{k}, \qquad \hat{i} \circ \hat{k}, \qquad \hat{j} \circ \hat{j}$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Dodawanie: $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ $\quad \vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

- Iloczyn skalarny

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \circ (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$

$$= a_x b_x \hat{i} \circ \hat{i} + \cancel{a_x b_y \hat{i} \circ \hat{j}} + \cancel{a_x b_z \hat{i} \circ \hat{k}} + ... =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boxed{\vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1; \qquad \hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

- **Przykład:**

1. Wędrowiec przeszedł 25 km w kierunku północnym, a następnie 35 km w kierunku południowo-zachodnim. Oblicz wartość przemieszczenia wędrowca. ($\sin 45^0 = 0{,}7071$)

2. Wektor $\vec{V} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. Ile razy dłuższy/krótszy jest wektor $\vec{W} = n \cdot \vec{V}$, który ma długość $|W| = 7$?

3. Wektor $\vec{A}$ o długości 6 jednostek jest skierowany przeciwnie do osi OY, a wektor $\vec{B}$ o długości 4,5 jednostek jest skierowany pod kątem 45^0 w kierunku dodatnim osi OX i OY. Oblicz sumę tych wektorów.

4. Położenie cząsteczki opisane jest równaniem: **r**(t) = 2,6*t***i** + 3,85**j** - t^2**k**. Oblicz szybkość cząsteczki w drugiej sekundzie (*t* = 2s).

Iloczyn wektorowy c.d.

$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad \vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Oblicz: $\vec{A} \circ \vec{B}$, $\quad \vec{A} \times \vec{B}$ oraz kąt między wektorami:

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{j} + 3\hat{k}$$

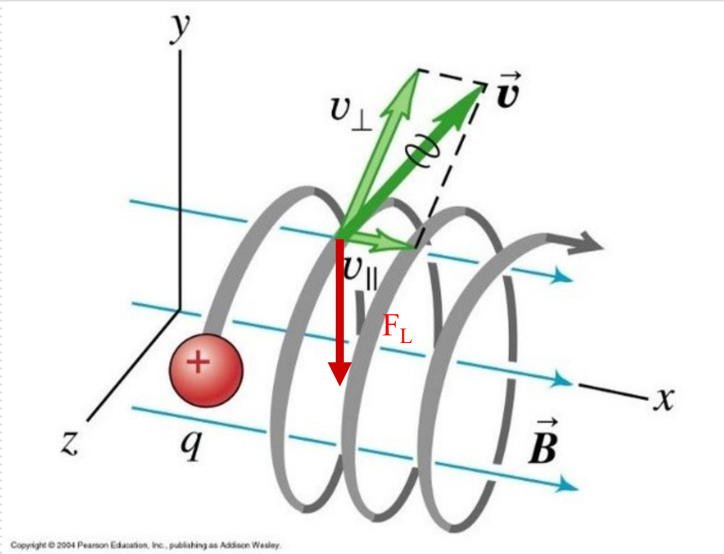
Zastosowanie rachunku wektorowego w fizyce

Iloczyn skalarny:

Praca $W = F{\cdot}S{\cdot}\cos\alpha = \vec{F} \circ \vec{S}$

Iloczyn wektorowy: $\vec{F}_L = q\vec{V} \times \vec{B}$

siła dośrodkowa zakrzywiająca tor: $F_L = qV_{\perp}B = \dfrac{mV^2}{r}$



Zastosowanie rachunku wektorowego w fizyce - **zadanie**

Stałe siły $\mathbf{F_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ [N] oraz $\mathbf{F_2} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **[N]** (gdzie **i, j, k** są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę.

przesuwając ją z punktu A (0, 4, 0) do B (2, 3, 4).

- Oblicz:

  a) wektor przesunięcia;

  b) wypadkową siłę;

  c) kąt między siłami składowymi;

  d) pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki;
- Moment siły wypadkowej działającej na cząstkę w punkcie B względem środka układu.

Przykład

Wykazać, że pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej poruszającej się w nim, naładowanej cząsteczki.

$$E_k = \frac{m}{2}\vec{\mathbf{v}} \circ \vec{\mathbf{v}}$$

Stała energia $\Rightarrow$ $\frac{\mathrm{dE_k}}{\mathrm{dt}} = 0$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \circ \vec{\mathbf{v}}) = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \circ \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \circ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right) = \frac{m}{2} 2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \circ \vec{\mathbf{v}}$$

ale $\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$ gdzie $\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$

czyli $\frac{dE_k}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \circ \vec{\mathbf{v}} = q\,\underbrace{(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \circ \vec{\mathbf{v}}}_{0}$

$\boxed{\mathrm{E_k = const}}$

Podsumowanie

Działanie	Wynik	Metoda postępowania	Zastosowanie
dodawanie $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$	wektor	reguła równoległo-boku	wypadkowe przemieszczenie wypadkowa siła
odejmowanie $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$	wektor		algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń
rozkład wektora	wektory składowe		równia pochyła, rzut ukośny, itp.

Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezj.	W mate-matyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}$	skalar	$\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}} = \mathrm{a\ b} \cos\varphi$	$\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}} = \mathrm{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$	prosto-padłość wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$	wektor	$\left\|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right\| = a\ b \sin\varphi$ 1. kierunek 2. zwrot 3.wartość	$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z} \\ \mathrm{b_x} & \mathrm{b_y} & \mathrm{b_z} \end{vmatrix}$	równo-ległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę *k*	wektor	$k \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$ 1. kierunek 2. zwrot 3.wartość	$\mathrm{ka_x = b_x}$ $\mathrm{ka_y = b_y}$ $\mathrm{ka_z = b_z}$	równo-ległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki

Przykłady

- Stałe siły $\mathbf{F_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{F_2} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (gdzie **i, j, k** są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę przesuwając ją z punktu A (3, 8, 12) do B (0, 0, 7). Obliczyć pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki.

- Wektor położenia ciała o masie m = 2 kg dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało w ciągu drugiej sekundy jego ruchu.

- Cząsteczka o ładunku Q = 2C porusza się w próżni torem opisanym równaniem $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ i wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego $\mathbf{B} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Oblicz działającą tu siłę Lorentza. Oblicz pracę wykonaną przez tą siłę na bardzo małym odcinku drogi.