

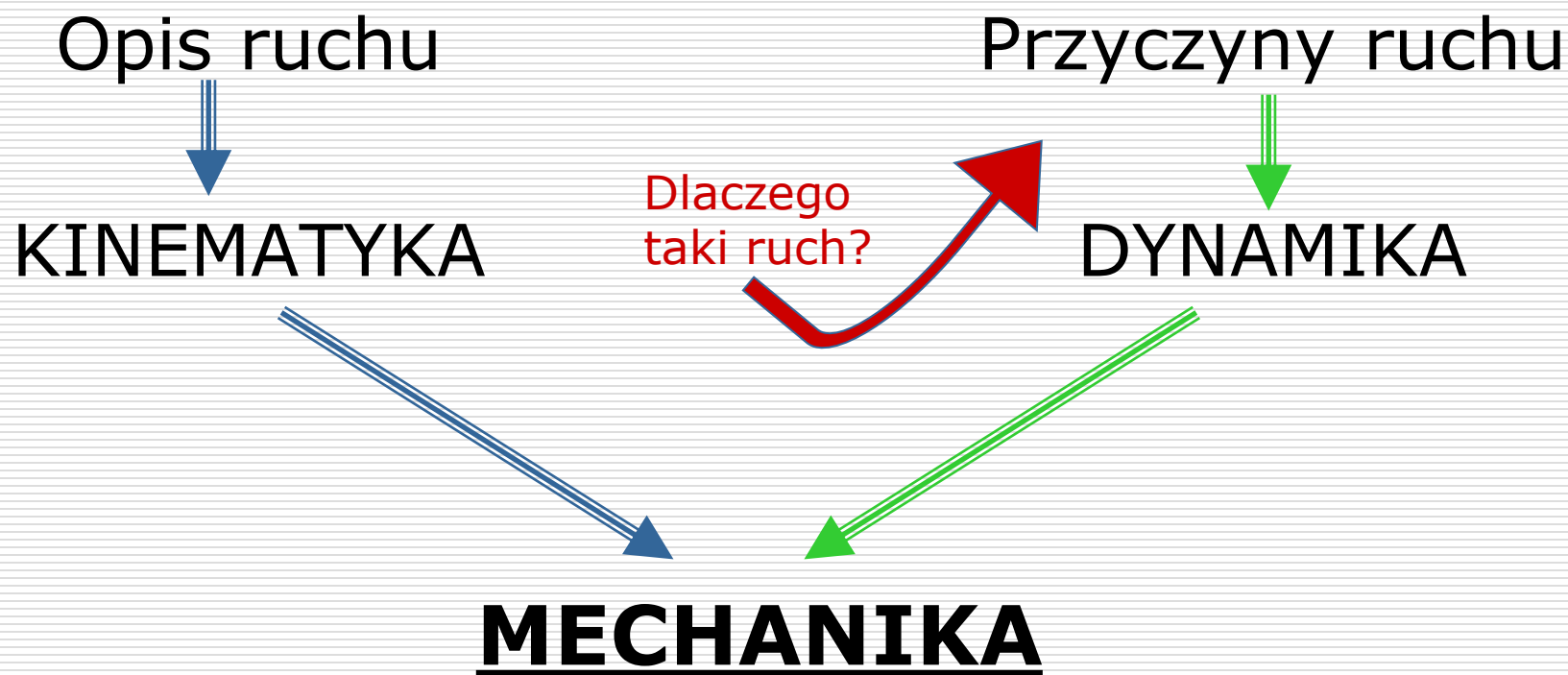
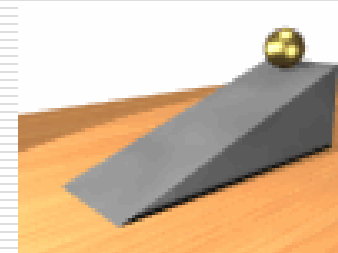
Wykład 3: Kinematyka

dr inż. Zbigniew Szklarski

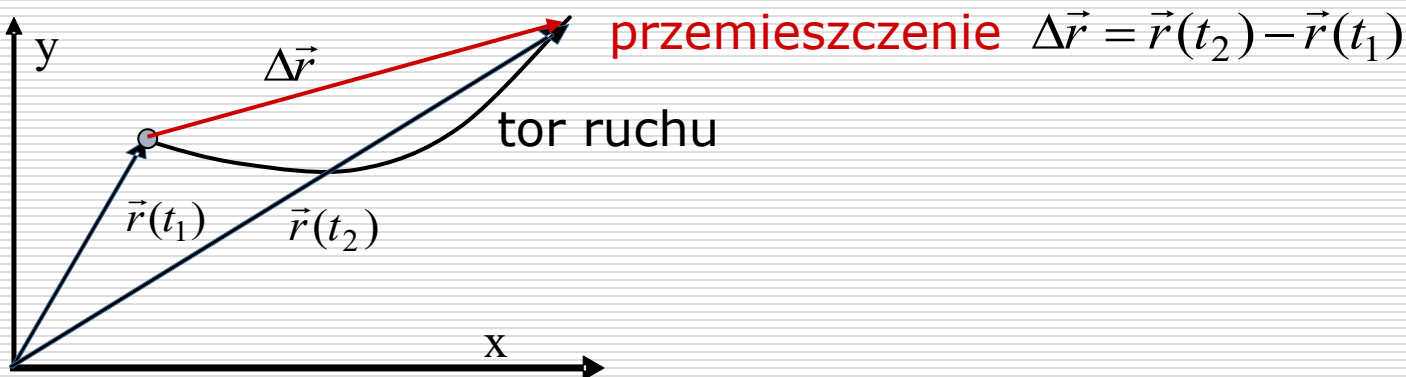
szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Wstęp



Podstawowe pojęcia dla ruchu prostoliniowego i krzywoliniowego.

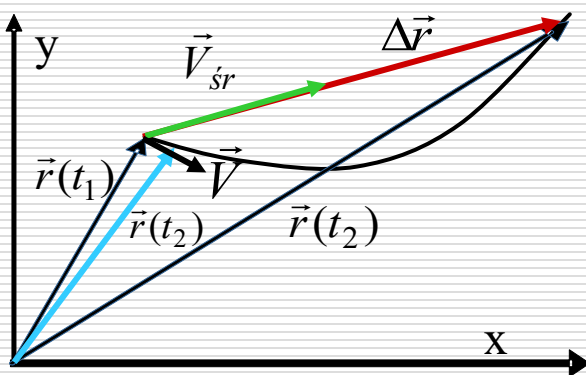


prędkość średnia

$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

gdy $t_2 \rightarrow t_1$ $\Delta t \rightarrow dt$ to $\Delta r \rightarrow dr$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{prędkość chwilowa}$$

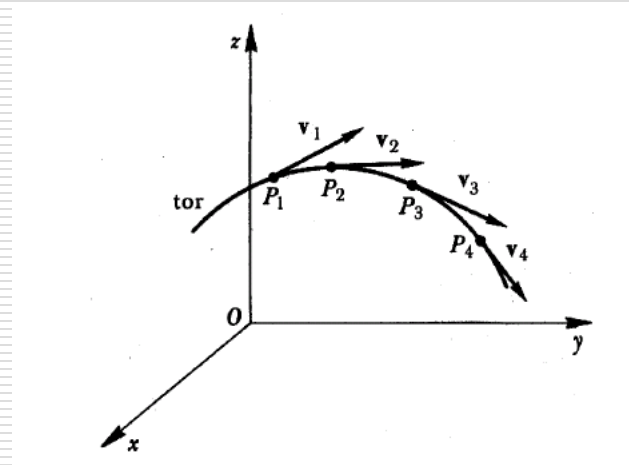


Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$$

skoro $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ to $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y$ $V_x = \frac{dx}{dt}$

Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru.



$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

Przyspieszenie

Przyspieszenie związane jest ze zmianą wektora prędkości

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{i} \frac{dV_x}{dt} + \hat{j} \frac{dV_y}{dt} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

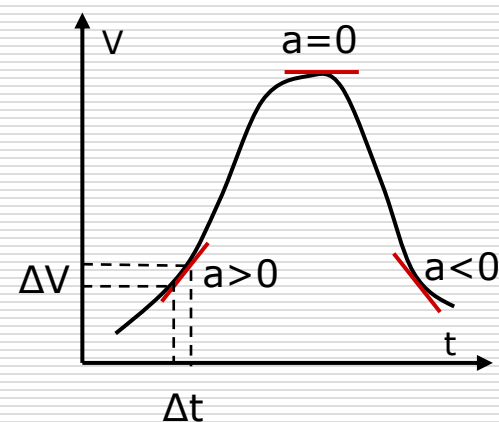
$$a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

Jeżeli $\vec{a} = \text{const}$ to $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$

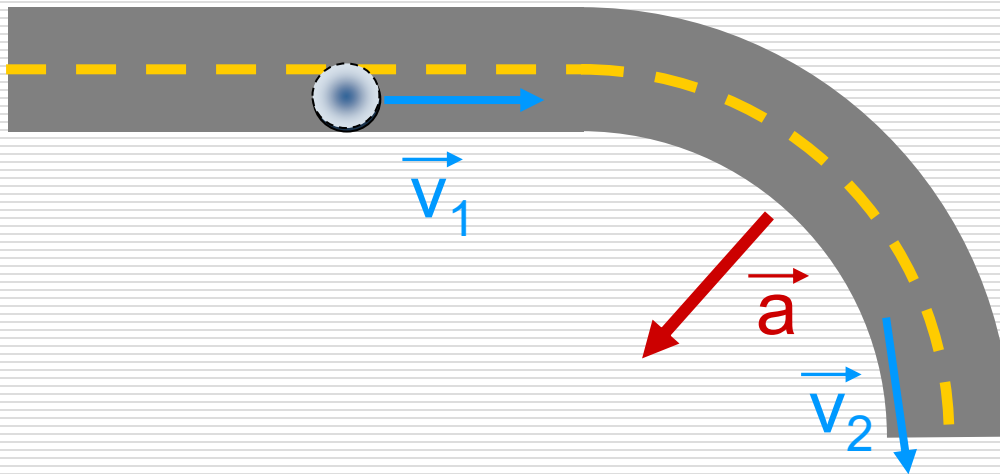
ponieważ:

$$\frac{dV}{dt} = a \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_{t=0}^t a dt$$

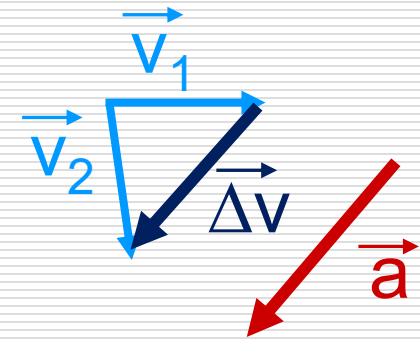
więc $V = V_0 + at$



Ruch krzywoliniowy



W ruchu krzywoliniowym występuje zmiana wektora prędkości.

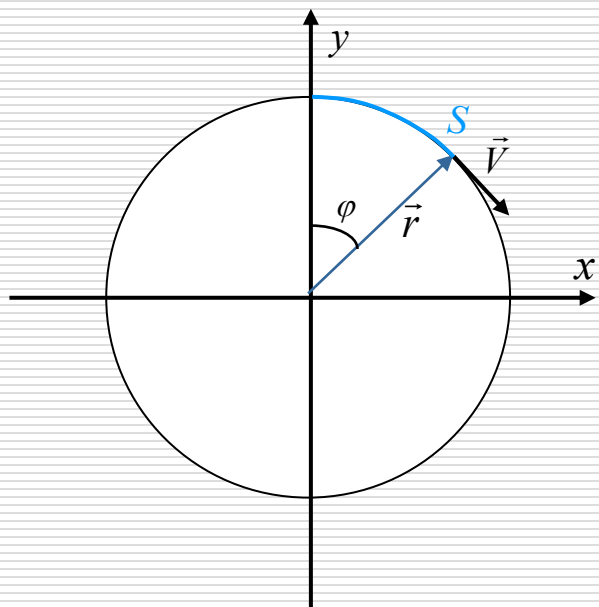


Konsekwencją tego jest występowanie przyspieszenia pomimo stałej wartości prędkości

Przyspieszenie styczne i normalne

Ruch jednostajny

$$V = \frac{S}{t} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi \\ S \\ r \end{array} \right\} S = \varphi \cdot r \quad \vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$



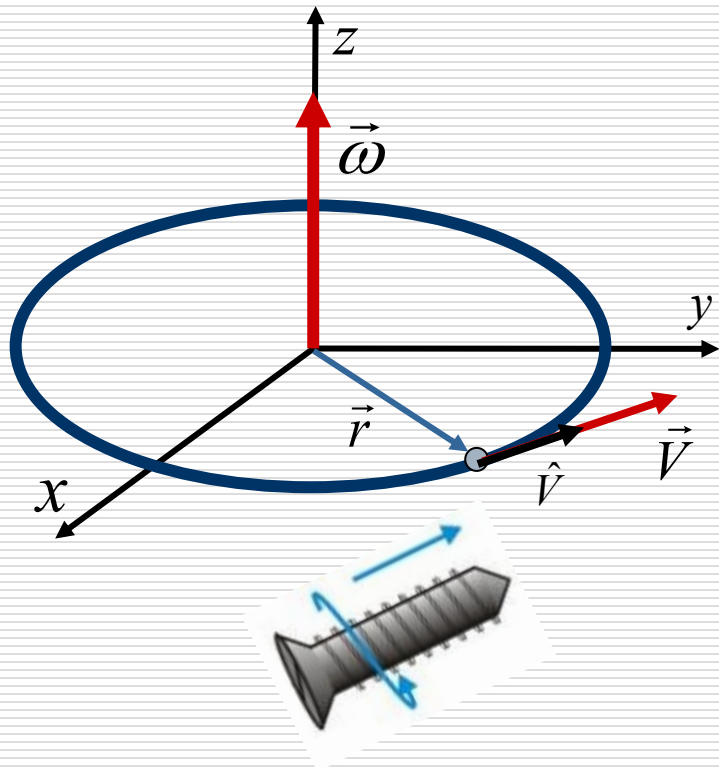
$$dS = r \cdot d\varphi$$

$$V = \frac{r \cdot d\varphi}{dt} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

czyli $V = \omega \cdot r$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Związek pomiędzy prędkością liniową i kątową

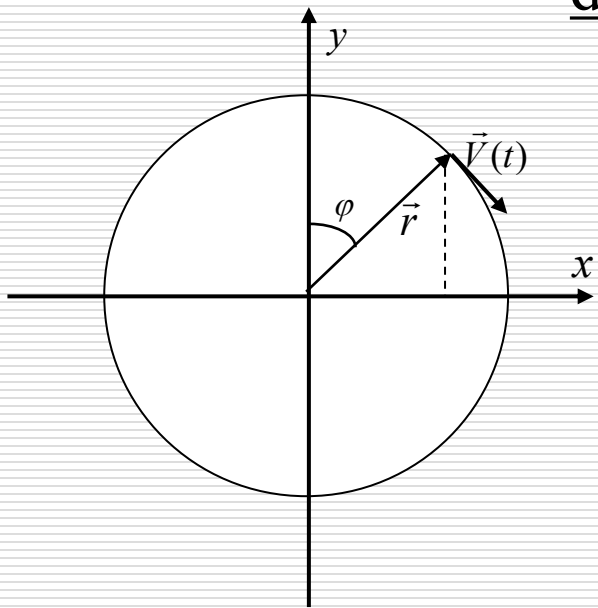


$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

w ruchu jednostajnym
po okręgu, wektor
prędkości kątowej
jest stały

reguła śruby!!

Ruch niejednostajny po okręgu



dla współrzędnej x : $x = r \cdot \sin \phi(t)$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = r \cos \phi(t) \frac{d\phi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{d\phi}{dt} + r \cos \phi \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

skoro: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

$$a_x = r \cos \phi \frac{d^2\phi}{dt^2} - r\omega^2 \sin \phi$$

$$x = r \cdot \sin \varphi(t)$$

$$V_x = r \cos \varphi(t) \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cos \varphi - r \omega^2 \sin \varphi$$

ponieważ: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ i $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$

to $V_x = r\omega \cos \varphi$ oraz $a_x = \frac{r\varepsilon\omega}{\omega} \cos \phi - \omega^2 x$

czyli $a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} V_x - \omega^2 x$

mamy:

$$a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} V_x - \omega^2 x$$

analogicznie $y = r \cdot \cos \varphi(t)$ $V_y = -r\omega \sin \varphi$ $a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} V_y - \omega^2 y$

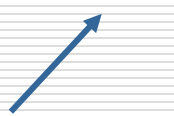
Skoro $\vec{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y$ to $\vec{a} = \hat{i} \frac{\varepsilon}{\omega} V_x - \hat{i} \omega^2 x + \hat{j} \frac{\varepsilon}{\omega} V_y - \hat{j} \omega^2 y$

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} (\hat{i} V_x + \hat{j} V_y) - \omega^2 (\hat{i} x + \hat{j} y)$$

ostatecznie:

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} \vec{V} - \omega^2 \vec{r}$$

przyspieszenie styczne



przyspieszenie dośrodkowe



Wnioski:

- *kiedy maleje składowa V_y prędkości, to rośnie składowa V_x*
- *przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest wzdłuż promienia, do środka okręgu*
- *wartość przyspieszenia dośrodkowego jest równa: $a_n = \frac{V^2}{r}$*

Przykład 1

1. Pająk porusza się po torze krzywoliniowym, którego długość opisana jest równaniem: $S(t) = S_0 e^{ct}$ gdzie S_0 i c to stałe. Wektor przyspieszenia pająka tworzy w każdym punkcie toru stały kąt φ ze styczną do jego toru.

Obliczyć wartość:

- a) przyspieszenia stycznego,
- b) przyspieszenia normalnego,
- c) promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

ROZWIĄZANIE:

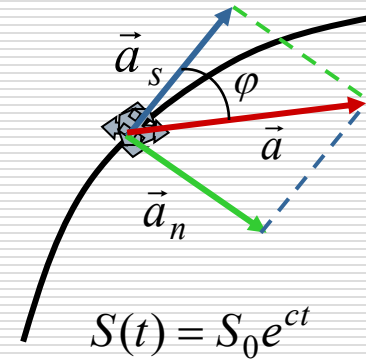
a) przyspieszenie styczne $a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad V = \frac{dS}{dt} = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

stąd $a_s = c^2 S_0 e^{ct}$

b) przyspieszenie normalne:

z rysunku wynika że $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_s}$

stąd



$$a_n = a_s \cdot \operatorname{tg} \varphi = c^2 S_0 e^{ct} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

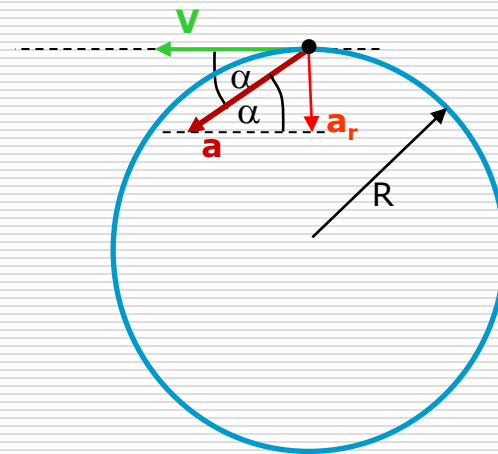
c) promień krzywizny toru jako funkcja długości łuku krzywej:

z innej definicji przyspieszenia dośrodkowego (normalnego):

$$a_n = \frac{V^2}{r} \quad \text{stąd podstawiając wyliczone wcześniej } V: \quad V = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$$

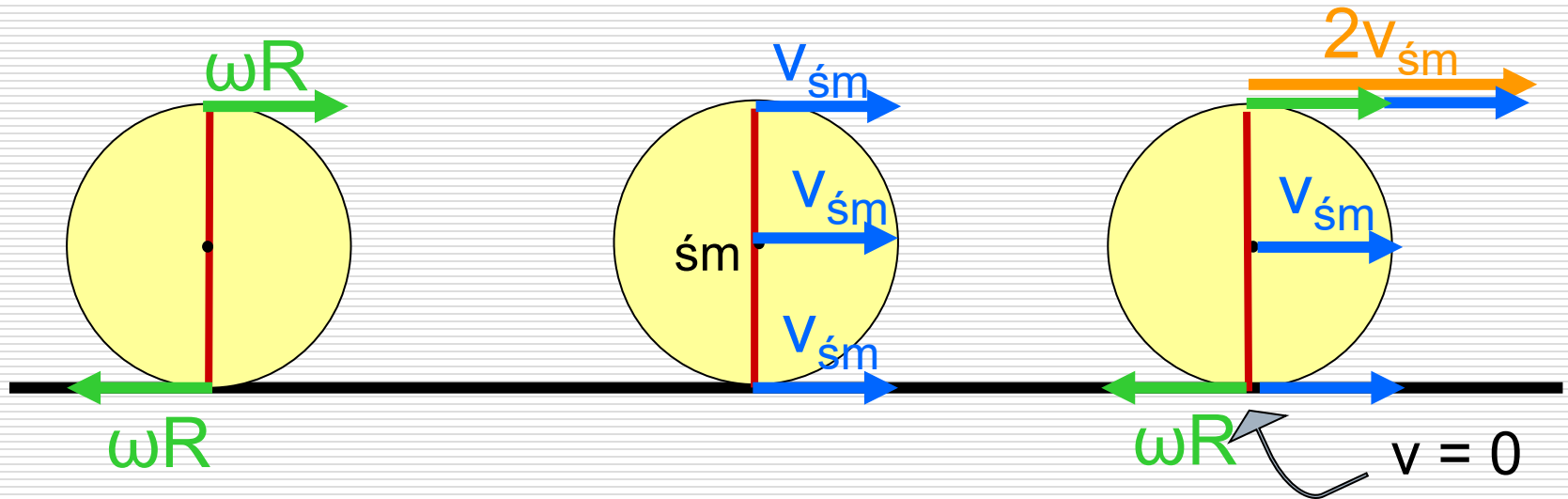
$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{c^2 S_0^2 \cdot (e^{ct})^2}{c^2 S_0 \cdot e^{ct} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = S_0 \cdot e^{ct} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = S \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$

2. Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu $R = 3,6$ m. W pewnej chwili na cząsteczkę zaczyna działać przyspieszenie o wartości $0,21g$, tworzące w każdym punkcie okręgu po jakim nadal porusza się cząsteczką, stały kąt 30° ze styczną do jego toru. Obliczyć:
- a) szybkość cząsteczki w momencie zadziałania przyspieszenia,
 - b) szybkość cząsteczki w dwie sekundy później.



Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu – musi występować tarcie między ciałem a podłożem, jest specyficznym rodzajem ruchu ciała, będącym złożeniem ruchu postępowego (środka masy) i ruchu obrotowego - wokół środka masy.



Przykład:

Człowiek trzyma za jeden koniec deski o długości L opartej drugim końcem na walcu o promieniu R . Następnie człowiek zaczyna iść pchając deskę, która bez poślizgu toczy się po walcu, który toczy się po podłożu.

Jaką odległość musi przejść człowiek aby dotrzeć do walca ?

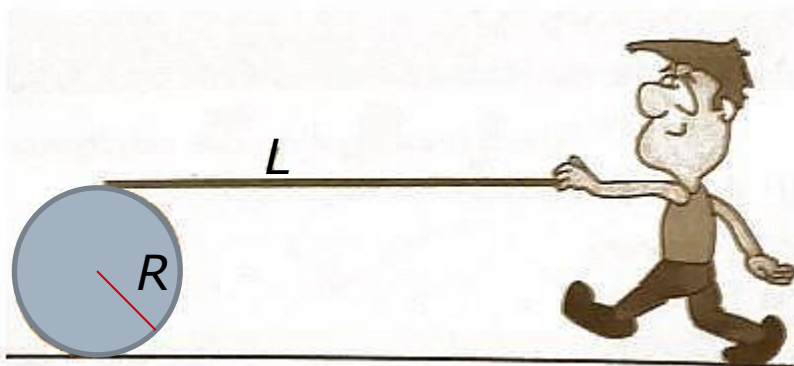
Czy/jak zależy to od promienia walca ?

Rozwiązanie:

W czasie t środek walca przebędzie odległość $S=L=v \cdot t$

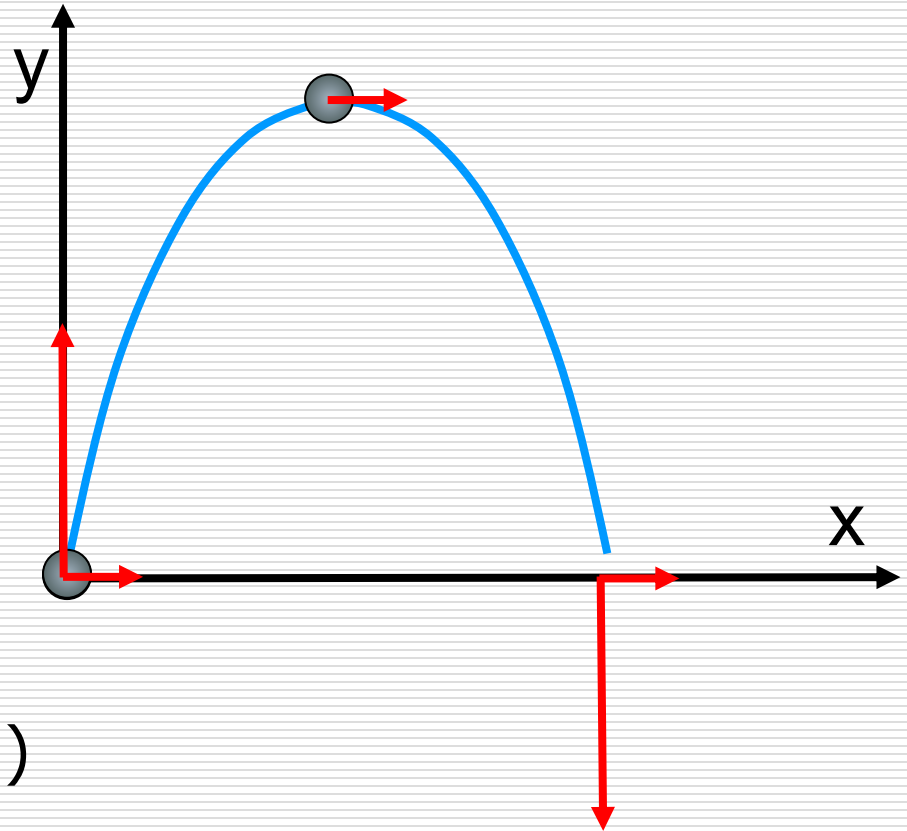
W tym samym czasie górny punkt styczności z deską przesunie się na odległość $2 v \cdot t = 2L$

Czyli człowiek będzie musiał przebyć odległość $2L$ niezależnie od promienia walca.



Inne ruchy krzywoliniowe

- Rzut ukośny
jest to złożenie dwóch
niezależnych ruchów-
- ruchu jednostajnego
(poziomo)
 - ruchu jednostajnie
zmiennego (pionowo)



Oś x:

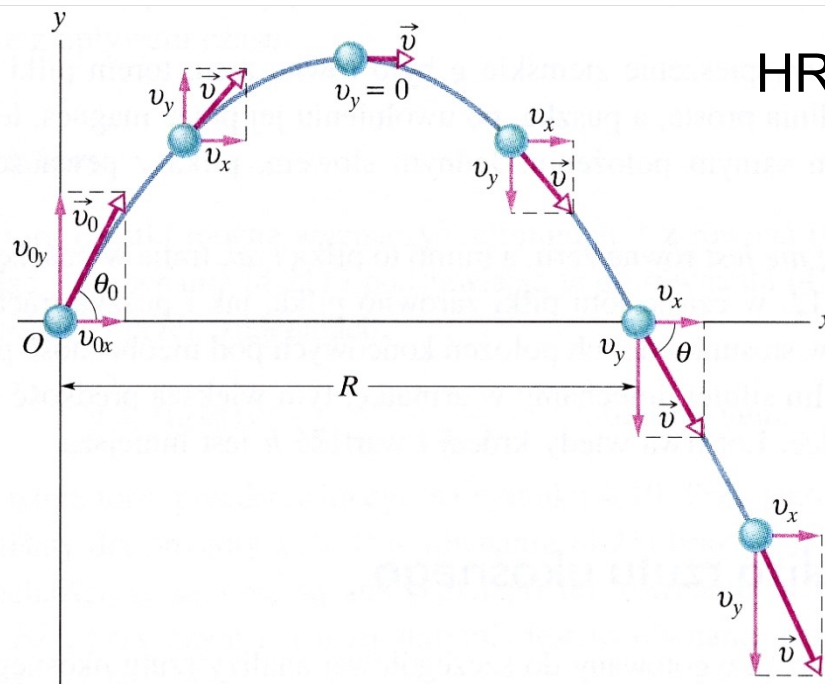
$F_x=0$; $a_x=0$,

ruch jednostajny

Oś y:

$F_y=mg$; $a_y=g$,

ruch jednostajnie
zmienny



Rys. 4.10. Tor pocisku wystrzelonego z punktu o współrzędnych $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, z prędkością początkową $\vec{v}_0$. Na rysunku pokazano wektor prędkości początkowej i wektory prędkości cząstki w różnych punktach jej toru oraz składowe tych wektorów. Należy zauważyć, że składowa pozioma prędkości pozostaje stała, a jej składowa pionowa zmienia się w sposób ciągły.

Zasięg rzutu R jest to droga, którą przebywa cząstka w poziomie *do chwili jej powrotu na wysokość, z której została wyrzucona*

Oś x:

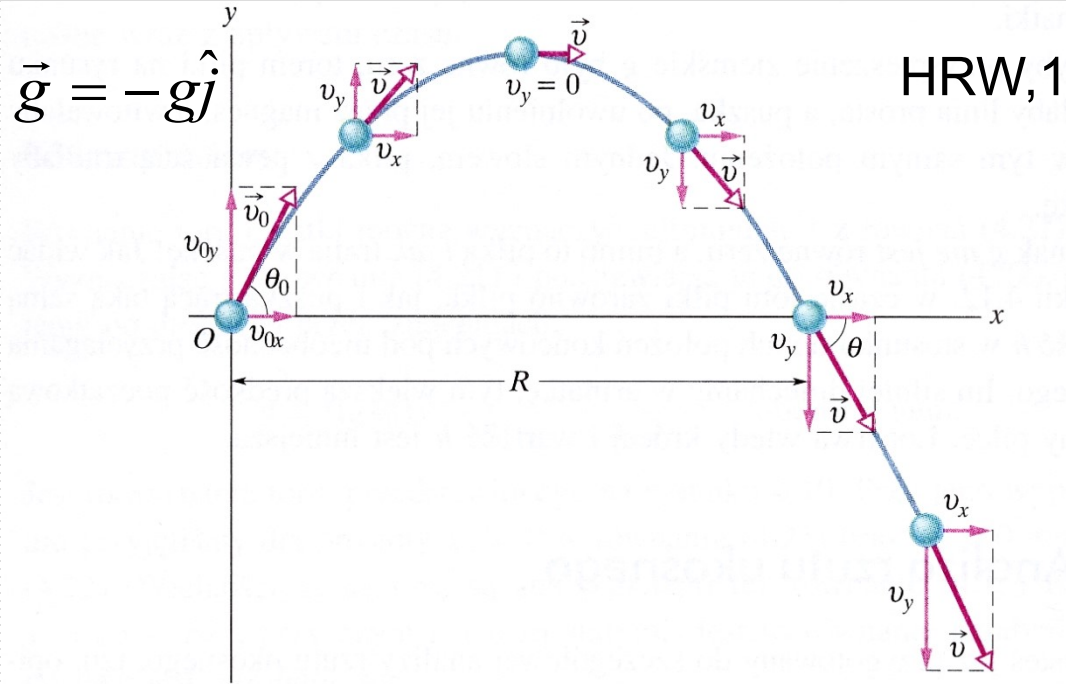
$$v_x = v_{0x} = \text{const}$$

$$x = v_x t = v_{0x} t$$

Oś y:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$



ponieważ

$$\frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \tan \theta_0 \rightarrow V_{0y} = V_{0x} \tan \theta_0 \quad \text{ i } \quad t = \frac{x}{v_{0x}}$$

oraz

$$\frac{V_{0x}}{V_0} = \cos \theta_0 \rightarrow V_{0x} = V_0 \cos \theta_0$$

$$y = (\tan \theta_0) x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

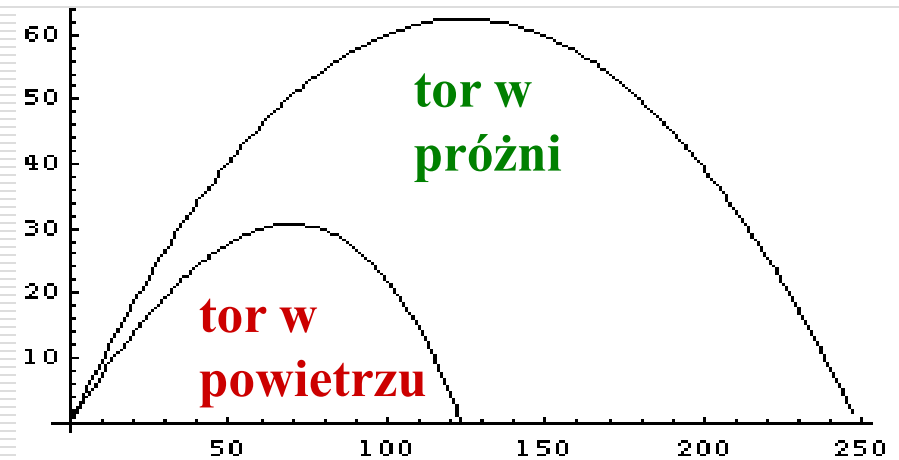
równanie toru -
parabola

..a tak jest naprawdę:

Siła oporu powietrza wpływa na tor rzutu ukośnego !

Piłka do gry w baseball
rzucona pod kątem 45° z
prędkością $v = 50 \text{ m/s}$
osiąga:

- bez oporu powietrza -
 - wysokość 63 m,
 - zasięg 254 m,
- z oporem powietrza -
 - wysokość 31 m,
 - zasięg 122 m



optymalny kąt rzutu wynosi:

20°- 30°

45°

Rzut poziomy

Dla osi OX

ruch jednostajny

$$X(t) = V_x \cdot t$$

$\Downarrow$

$$t = \frac{x}{V_0}$$

$\Rightarrow$

Dla osi OY

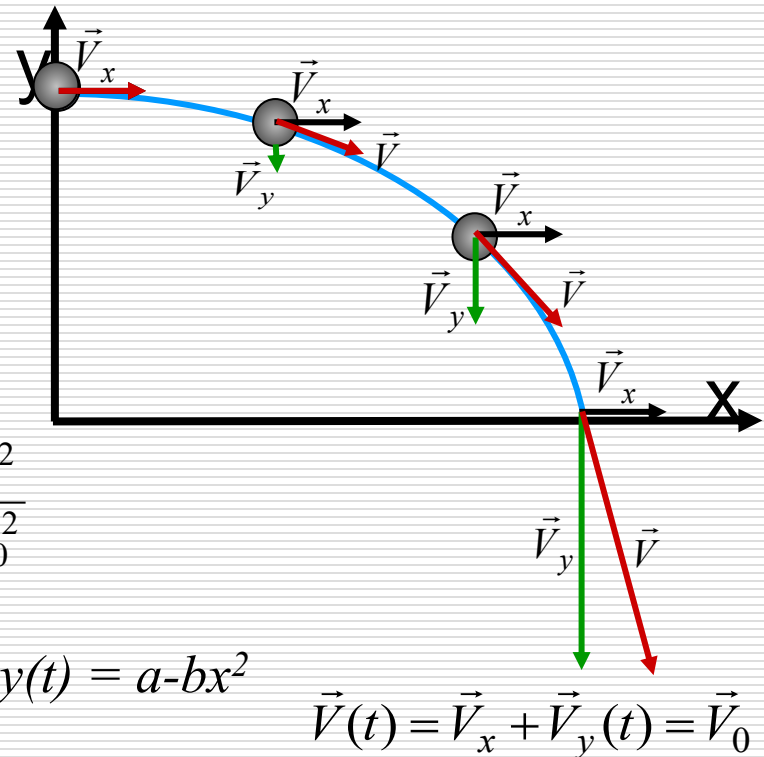
ruch jednostajnie przyspieszony

$$Y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$$

$\Downarrow$

$$y(t) = H - \frac{g\left(\frac{x}{V_0}\right)^2}{2} = H - \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

$$V_0 = V_x = \text{const}$$



Równanie toru – parabola – typu: $y(t) = a - bx^2$

Przykład 3

Piłkę wyrzucono ukośnie w górę pod kątem 45° z prędkością początkową $V_0 = 12 \text{ m/s}$. W odległości 12 m od miejsca wyrzutu stoi pionowa ściana. Oblicz:

1. czas t_t po którym piłka trafi w ścianę,
2. czy piłka uderzy w ścianę wznosząc się czy już opadając?
3. oblicz składowe prędkości piłki V_x i V_y w momencie trafienia i szybkość wypadkową V ,
4. kąt pod jakim piłka trafi w ścianę,
5. maksymalną wysokość H na jaką wzniesie się piłka,
6. wysokość od podstawy ściany h na jakiej piłka w nią uderzy,
7. w jakiej odległości X od ściany piłka po sprężystym od niej odbiciu uderzy w ziemię.

Przykład 4

Z wieży o wysokości $H = 34,6$ m rzucono poziomo przedmiot z prędkością $V_x = 20$ m/s.

Równocześnie przy podstawie wieży wyrzucono ukośnie w górę, z szybkością $V_0 = 40$ m/s – w tej samej płaszczyźnie – kamień, który trafił w przedmiot.

- Pod jakim kątem rzucono kamień?
- Na jakiej wysokości nastąpiło zderzenie?

Przyjąć $g = 10$ m/s²

- Odp.: 1. 440 m
2. $V_{\downarrow} = 6,06 \text{ m/s}$
3. $V = 93,4 \text{ m/s}$

Zadanie domowe:

Wspinacze utknęli na szczycie skały wznoszącej się 250 m nad poziomem ziemi. Samolot mający dostarczyć zaopatrzenie leci poziomo na wysokości 200 m ponad wspinaczami, z szybkością 250 km/h. Gdy znajduje się w pewnej odległości od szczytu skały następuje wyrzut zasobnika.

1. W jakiej odległości od celu zasobnik powinien zostać upuszczony z samolotu?
2. Jeżeli samolot zbliży się na odległość 400 m, to z jaką szybkością pionową (w górę czy w dół?) zasobnik musi być wyrzucony aby trafił w cel?
3. Z jaką szybkością uderzy on w szczyt skały?