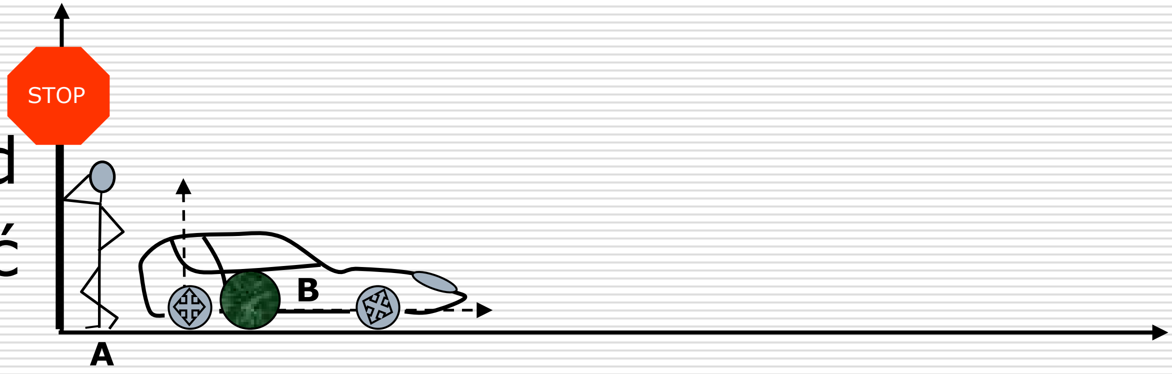
Wykład 3 cz.2: Kinematyka - względność ruchów

dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Względność ruchów

Każdy ruch opisujemy względem jakiegoś układu odniesienia

W chwili t_0
rusza samochód
i zaczyna toczyć
się piłka - oba



ciała mają taką samą szybkość względem układu A.

Piłka względem układu B jest nieruchoma!

Pierwsze sformułowanie zasady względności – Newton:

Ruchy ciał zawartych w danym obszarze są względem siebie takie same, niezależnie od tego, czy obszar ten znajduje się w spoczynku, czy też przesuwa się jednostajnie naprzód po linii prostej

Konsekwencja:

Nie można poprzez dokonywanie doświadczeń mechanicznych stwierdzić, czy układ się porusza czy nie.

Wszystkie układy odniesienia związane z ciałami swobodnymi – *układy inercjalne* są równoważne nie istnieje bezwzględny układ odniesienia (bezwzględny ruch).

Rozszerzenie Einsteina:

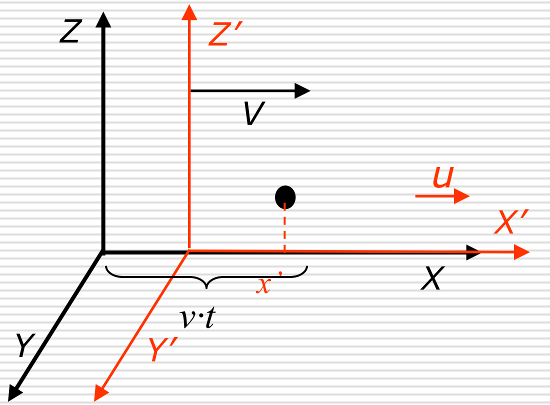
Równouprawnienie układów inercjalnych zachodzi ze względu na wszelkie możliwe typy procesów, a nie tylko ze względu na zjawiska mechaniczne.

Transformacja Galileusza- założenia

- Przestrzeń jest euklidesowa
- Przestrzeń jest izotropowa
- Rozpatrywane są układy inercjalne
- Prawa ruchu Newtona są słuszne w układzie inercjalnym-na Ziemi
- Obowiązuje prawo powszechnego ciążenia

Transformacja Galileusza (1564-1642)

- Ciało jest nieruchome w układzie *X′Y′Z′*, ma w nim współrzędną x'
- Układ *X′Y′Z′* porusza się względem układu *XYZ* wzdłuż osi *OX*.
- Czas w obu układach biegnie tak samo.



Współrzędne ciała widziane w układzie *XYZ:*

$x = x' + vt \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$

Transformacja odwrotna: $\boxed{x' = x - vt \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'}$

Przy ruchu ciała w *X′Y′Z′* z szybkością u

jego szybkość w układzie XYZ: $\boxed{V_{xyz} = v + u}$

Przykład 1

Podczas ćwiczeń ratownictwa morskiego, jednym z zadań jakie miał wykonać samolot ratowniczy było zrzucenie małego pojemnika z tratwą ratunkową możliwie blisko wzywającego pomocy rozbitka. W tym celu lecący z szybkością V_0 = 180 km/h samolot zszedł do lotu poziomego na wysokości h =100 m nad poziomem morza.

1. Jakim ruchem porusza się po opuszczeniu samolotu, pojemnik względem: pilota; rozbitka ?
2. Napisz równania (na x(t) i y(t)) opisujące położenie pojemnika względem: pilota; rozbitka;
3. Napisz równania opisujące prędkość (Vx(t) i Vy(t)) pojemnika względem: pilota; rozbitka;
4. W jakiej odległości od rozbitka należy upuścić pojemnik z tratwą ? W rozważaniach należy pominąć opór powietrza.
5. Oblicz z jaką szybkością pojemnik wpadnie do wody.
6. Oblicz pod jakim kątem pojemnik uderzy w wodę.

Przykład 2

Samochód jadący ze stałą szybkością V_S= 144 km/h, w pewnym momencie wyprzedza policjanta jadącego na motocyklu z szybkością V_P= 72 km/h. W momencie wyprzedzania policjant rozpoczyna pościg poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 4\ m/s^2$.

1. Napisz równania ruchu samochodu $x_S(t)$ i policjanta $x_P(t)$ w układzie związanym z ziemią przed i po wyprzedzeniu motocykla.
2. Zapisz równanie ruchu samochodu w układzie odniesienia związanym z policjantem po wyprzedzeniu policjanta.
3. Narysuj wykresy zależności prędkości policjanta i samochodu w funkcji czasu.
4. Oblicz po jakim czasie t_X policjant dogoni samochód i z jaką będzie się wówczas poruszał się z szybkością V_X.

Prawa Newtona maja taką samą postać zarówno w układzie nieruchomym jak i poruszającym się.

Sformułowane przez J.C.Maxwella w 1861 roku równania pola elektromagnetycznego – opisujące elektryczność, magnetyzm i światło jako jedną całość nie spełniają zasady względności Galileusza.
Oznacza to, że np. zjawiska optyczne na Ziemi i w pojeździe kosmicznym powinny się różnić!   A tak nie jest.

„Dopasowanie" równań Maxwella do transformacji Galileusza spowodowało pojawienie się nieobserwowanych zjawisk elektrycznych.

Rozwiązanie problemu podał w1895 – Lorentz, proponując wzory transformacyjne dla poruszającego się układu, które nie zmieniały równań Maxwella.

Spójną teorię usuwającą sprzeczności na styku mechaniki, optyki i elektromagnetyzmu sformułował A. Einstein w 1905 r. - **STW**

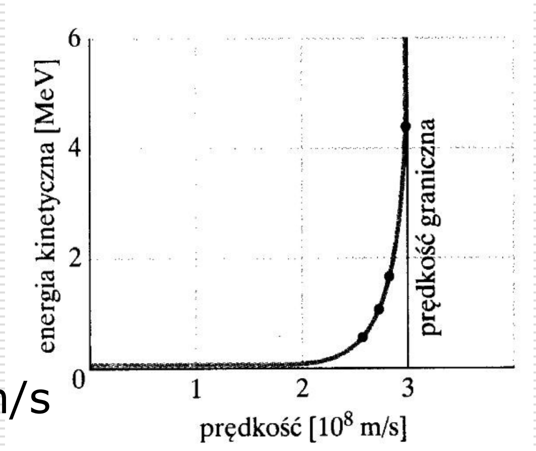
Transformacja Lorentza (1853-1928)

Postulaty Einsteina do szczególnej teorii względności:

I. Prawa przyrody są identyczne we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

II. Prędkość światła w próżni jest stała we wszystkich kierunkach i taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Prędkość żadnego ciała przenoszącego energię lub informację nie może przekroczyć prędkości granicznej (niezależnie od czasu przyspieszania!). Eksperyment Bertozziego (1964) – przyspieszanie elektronów c = 299 792 458 m/s

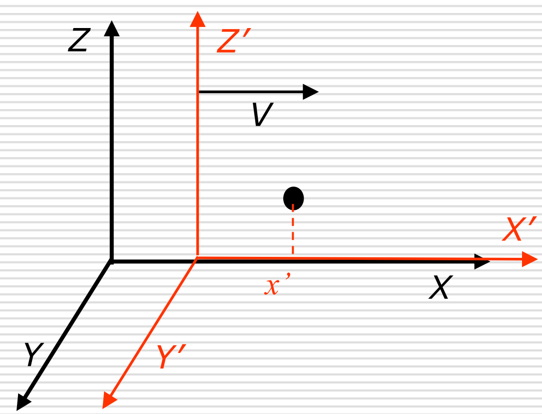


1889 – O.Heaviside wykazał, że ruch naładowanych cząstek ma bezpośredni wpływ na otaczające te cząstki pole elektromagnetyczne, w kierunku ruchu cząsteczek;
1893 – hipoteza Georga F.FitzGeralda, że wszystkie poruszające się względem eteru przedmioty ulegają skróceniu w tym samym kierunku, w którym odbywa się ruch przedmiotu.

1895 – Lorentz wzory transformacyjne dla poruszającego się układu:

Ciało w układzie XYZ o współrzędnych

x, y, z, ma w układzie X'Y'Z' współrzędne:



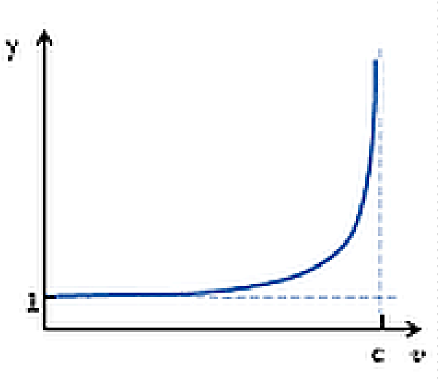
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

oraz:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Transformacja Galileusza: $x' = x - vt \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$

podstawiając $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$



otrzymamy dla transformacji odwrotnej:

$x = \gamma(x' + v \cdot t')$ $\quad y = y'$ $\quad z = z'$ $\quad t = \gamma\left(t' + \dfrac{x'v}{c^2}\right)$

oczywiście dla $v << c$ otrzymujemy:

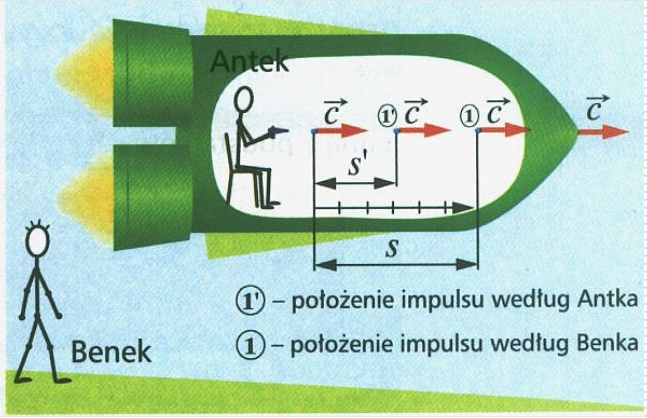
$x = x' + vt \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$

transformację Galileusza.

Z postulatów Einsteina wynika konieczność innego niż dotychczas sposobu opisywania czasu i przestrzeni.

Konsekwencje:

Obserwator siedzący w rakiecie obliczył prędkość impulsu świetlnego mierząc w czasie *t′* przebytą przez impuls drogę *s′*. Natomiast dla obserwatora stojącego nieruchomo, impuls w czasie *t* przebędzie odcinek s.

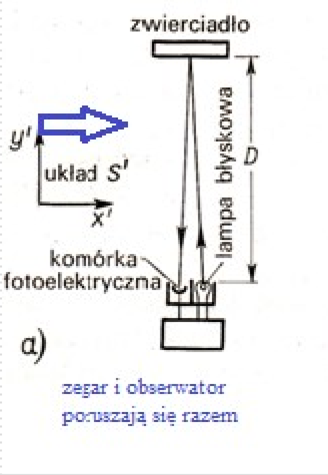


Ale: $c = \frac{s'}{t'} = \frac{s}{t}$ wynika z tego, że s′ < s (droga przebyta w układzie poruszającym się musi być **krótsza** niż w układzie spoczywającym) oraz

t′ < t (czas płynący w układzie poruszającym się musi płynąć **wolniej** niż w układzie spoczywającym).

1893 – hipoteza Fitzgeralda, że wszystkie poruszające się względem eteru przedmioty ulegają skróceniu w tym samym kierunku, w którym odbywa się ruch przedmiotu.

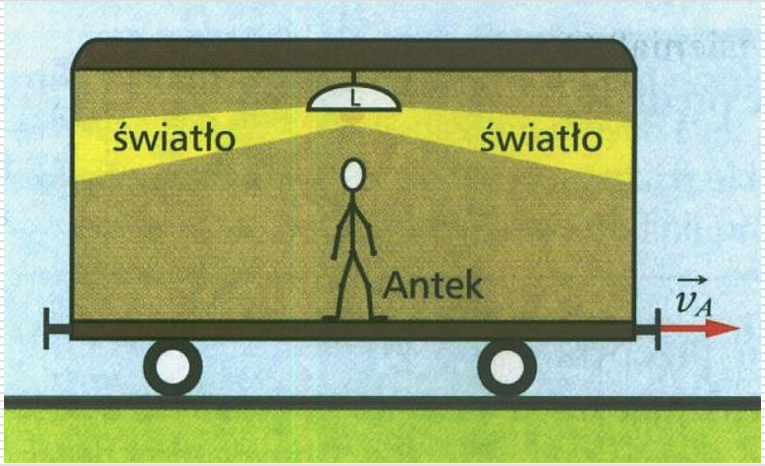
Synchronizujemy dwa zegary świetlne.
a) Podróżując z zegarem z szybkością *u* nie widzimy różnicy – działa zasada względności.
b) Obserwator z zewnątrz – światło porusza się po linii łamanej $\Rightarrow$ czas przejścia toru jest dłuższy im *u* większe.



Potwierdzenie: miony z promieniowania kosmicznego:
Czas życia mionu „laboratoryjnego” (–czas własny) to **2,2 μs**
a mionu z kosmosu, poruszającego się z szybkością *0,9c*, obserwowanego w laboratorium to **5,05 μs** !!

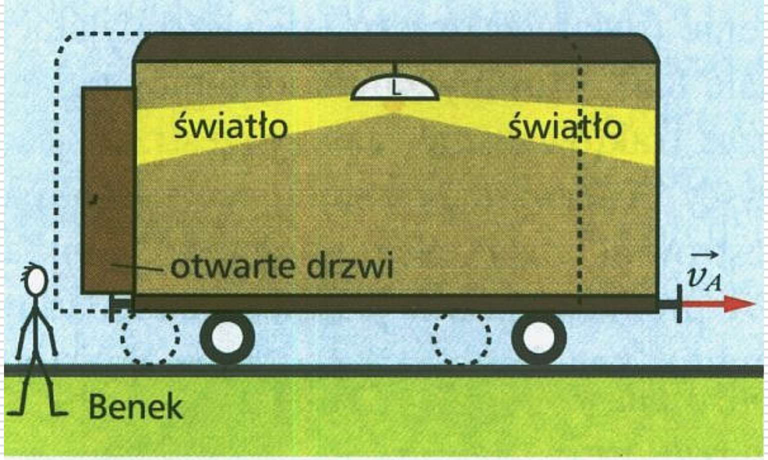
Różnica w skalach czasowych w układach nieruchomych i poruszających się prowadzi do tego, że zjawiska zachodzące w dwóch różnych miejscach w tym samym czasie w układzie nieruchomym nie są jednoczesne w układzie poruszającym się! –
WZGLĘDNOŚĆ RÓWNOCZESNOŚCI

Czyli kolejną ważną konsekwencją postulatów Einsteina jest stwierdzenie, że zdarzenia jednoczesne w jednym układzie odniesienia **nie muszą być jednoczesne** gdy obserwujemy je z innego układu !



Światło z lampy umieszczonej w suficie padając na czujniki otwiera drzwi w obu końcach wagonu.

Dla obserwatora poruszającego się drzwi otworzą się jednocześnie, ale dla obserwatora nieruchomego najpierw otworzą się tylne drzwi (które „doganiają" impuls świetlny).

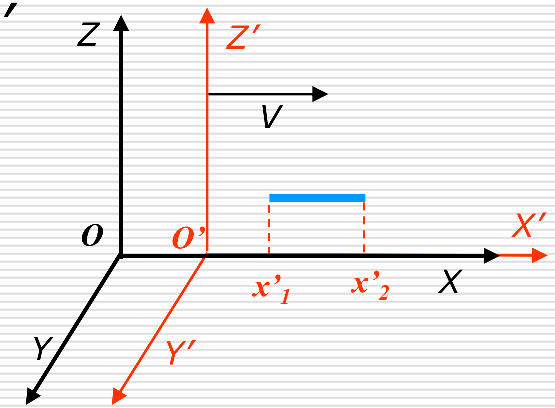


Który obserwator ma rację?

OBAJ !!

Kontrakcja długości

Pręt jest nieruchomy względem układu *O′* poruszającego się z szybkością *v* względem spoczywającego układu *O*.



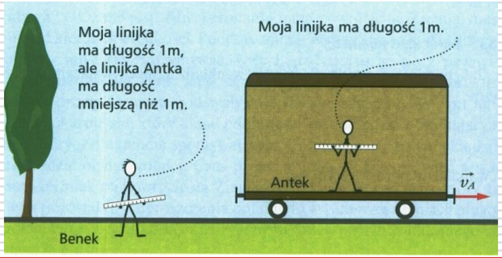
Długość odcinka zmierzona w układzie *O′* : $l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - v\cdot t) - \gamma(x_1 - v\cdot t)$ czyli

$$l_0 = \gamma\,(x_2 - x_1) = \gamma\cdot l$$

Skoro $\gamma > 1$ więc $l < l_0$!

a więc

$$l = \frac{1}{\gamma} l_o$$

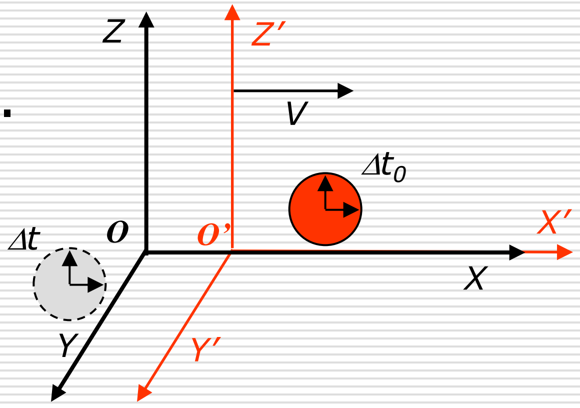


Dylatacja czasu

czyli wydłużenie odstępów czasu mierzonych przez zegar będący w ruchu.

W układzie O′ mierzony jest tzw. *czas własny* Δt_0.

W układzie O mierzony jest czas Δt:



$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad \text{gdzie} \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)$$

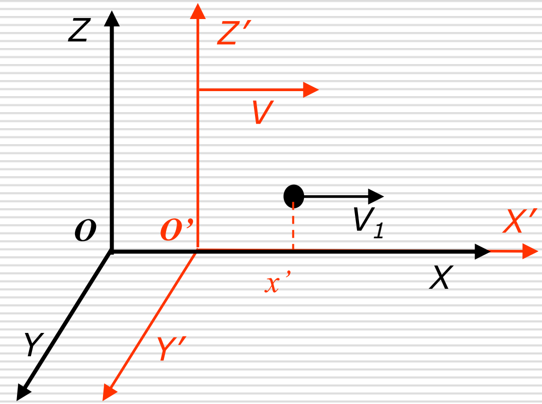
$$\Delta t = \gamma\left(t'_2 + \frac{x'v}{c^2}\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{x'v}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \gamma\left(t'_2 - t'_1\right)$$

Czyli $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0 \qquad \Delta t > \Delta t_0$

Relatywistyczna względność prędkości

Względem układu O' punkt materialny ma szybkość

$$V_1 = \frac{dx'}{dt}$$



względem układu O ma szybkość $v_2 = \frac{dx}{dt}$

Skoro $x = \gamma\cdot(x' + vt')$ to $dx = \gamma\cdot(dx' + vdt')$

Natomiast $t = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)$ więc $dt = \gamma\left(dt' + \frac{dx'\cdot v}{c^2}\right)$

a zatem $v_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{dx'\cdot v}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{dx'}{dt'}\frac{v}{c^2}} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}}$

Przykłady

- Dwa akceleratory dają strumienie cząstek poruszające się w przeciwne strony - każdy z szybkością $v_1 = v_2 = 0{,}9c$. Obliczyć względną szybkość strumieni cząstek.

Rozwiązanie:

Klasyczna superpozycja: $v_{wzgl} = v_1 + v_2 = 1{,}8\,c \Rightarrow$ wynik zły !! $v_{wzgl} > c$

Dodawanie relatywistyczne:

$$v_2 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}} = \frac{1{,}8c}{1 + \frac{0{,}81c^2}{c^2}} = 0{,}9945c$$

- W jaki sposób i z jaką szybkością powinien poruszać się prostopadłościenny kontener o wymiarach L_0 x L_0 x $1,5L_0$ aby nieruchomy obserwator widział go jako sześcian ?

Rozwiązanie

- po pierwsze: ruch wzdłuż najdłuższego wymiaru $1,5L_0$
- widziana długość ma być $L = L_0$ a nie $1,5\ L_0$ a więc

$$L = \qquad = L_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1,5$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,5 \qquad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{5}{9} c^2$$

- ostatecznie $v = 0,745\ c$

- Statek kosmiczny porusza się z szybkością 0,7c. na statku ustawiono stół konferencyjny wzdłuż osi statku. Długość stołu, jak zmierzył podczas lotu astronauta wynosiła 5m.

A. Jaka była długość stołu zmierzona przed odlotem z Ziemi 46 lat wcześniej?

Odp.: O ile stół się nie skurczył ze starości, to w każdym układzie względem którego stół jest nieruchomy, jego długość wynosi 5 m.

B. O ile krótszy stół widzieliby podczas lotu obserwatorzy z Ziemi?

Odp.: Związek między długością mierzoną na statku L_S a na Ziemi L_Z:

$$L_Z = \frac{L_S}{\gamma} \qquad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{0{,}49c^2}{c^2}} = 0{,}714$$

stąd $L_Z = 3{,}57\ m$ $\qquad \Delta L = 1{,}43\ m$

C. Ile lat wg czasu pokładowego minęło od startu?

Odp.: Związek między przedziałem czasu mierzonym na statku Δt_S a na Ziemi Δt_Z (46 lat):

$$\Delta t_Z = \gamma \cdot \Delta t_S$$

stąd $$\Delta t_S = \frac{1}{\gamma} \Delta t_Z$$

Δt_S = 0,714· 46 lat = 32,84 roku

- W wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego na górne warstwy atmosfery powstają cząsteczki elementarne mezony $\pi+$, których czas życia liczony w układzie własnym (związanym z cząstką) wynosi $2{,}6 \cdot 10^{-6}$ s ($0{,}924c$). Zakładając, że powstające mezony mają prędkość $V = 2{,}769 \cdot 10^{8}$ m/s, obliczyć:

A. Czas życia mezonu w układzie związanym z laboratorium na Ziemi.

Odp.: Związek między przedziałem czasu mierzonym w laboratorium Δt_L a czasem własnym Δt_0:

$$\Delta t_L = \gamma \cdot \Delta t_0 \qquad \Delta t_L = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-(0{,}924)^2}} = 6{,}8 \cdot 10^{-6}\ s$$

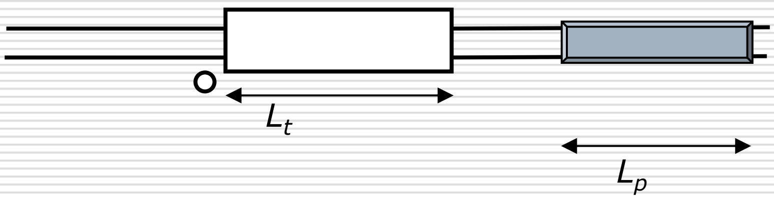
(ponad 2,5 razy dłuższy czas !!)

B. Długość drogi przebytej przez powstały mezon do chwili jego rozpadu mierzonej w układzie laboratoryjnym oraz w układzie własnym mezonu.

Odp.: $S_L = v \cdot \Delta t_L = 18{,}83$ m natomiast w układzie własnym mezonu: $S_0 = v \cdot \Delta t_0 = 7{,}19$m

- Długość nieruchomego pociągu jest taka sama jak długość tunelu i wynosi L_0. Pociąg ten jedzie z prędkością $V = 0{,}1\ c$.
- Czy opis przejazdu przez tunel dla obserwatora stojącego przy tunelu i dla obserwatora jadącego pociągiem będzie taki sam?

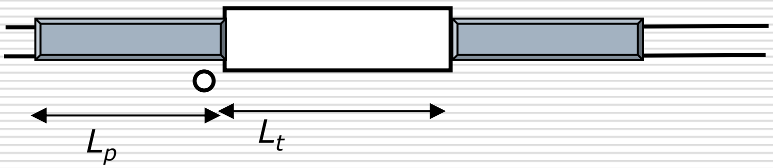
Opis obserwatora stojącego na ziemi:



Kolejność zdarzeń w tunelu:

1. Wjazd przodu
2. Wjazd tyłu
3. Wyjazd przodu
4. Wyjazd tyłu

Przebyta przez pociąg droga:

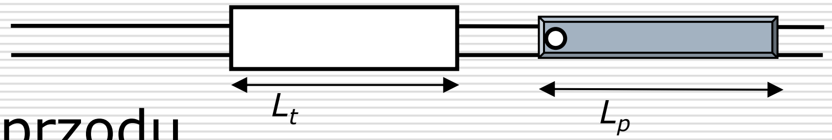


$$S_z = L_t + L_p$$

gdzie $L_p = L_t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad L_p < L_t \qquad L_p = 0.995 \cdot L_t$

Droga przebyta względem obserwatora na ziemi: $S_z = L_t + L_p = 1,995L_t$

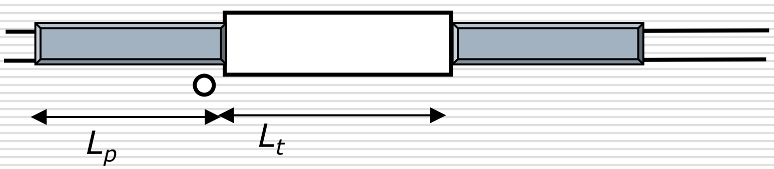
Opis obserwatora jadącego pociągiem:



Kolejność zdarzeń:

1. Wjazd przodu
2. Wyjazd przodu
3. Wjazd tyłu
4. Wyjazd tyłu

Przebyta przez pociąg droga:



$S_p = L_t + L_p$

gdzie $L_t = L_p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow L_p > L_t$ $L_p = 1{,}005 \cdot L_t$

Droga przebyta przez pociąg względem obserwatora w pociągu:

$$S_p = L_t + L_p = 2{,}005L_t$$

- Jak długo trwał przejazd pociągu dla tych obserwatorów?

- obserwator na ziemi: $t_z = \frac{L_t + L_p}{V} = \frac{1{,}995L_t}{0{,}1c} = 19{,}95\frac{L_t}{c}$

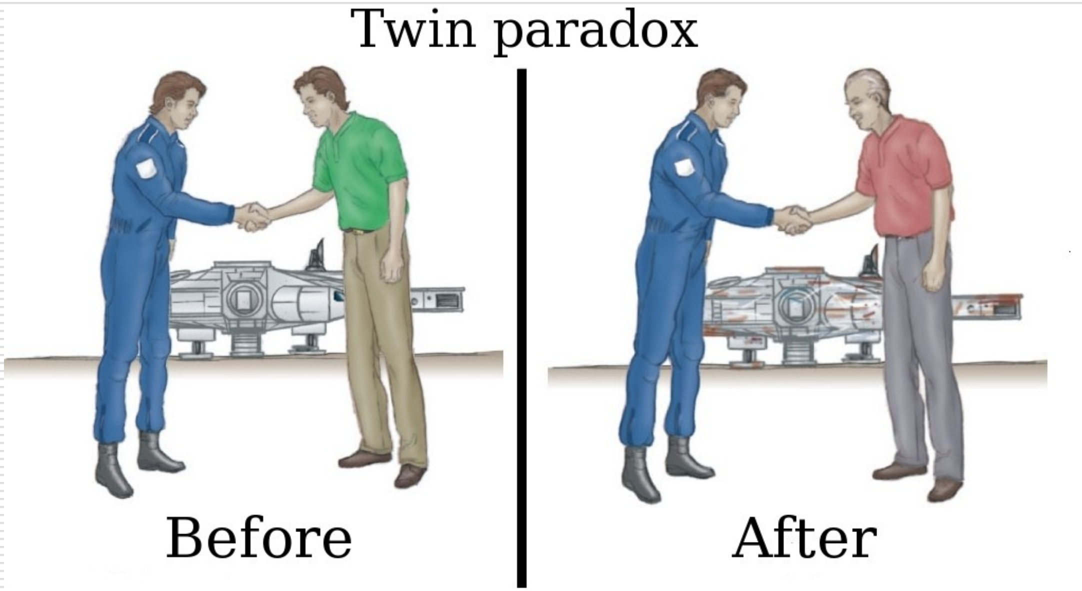
- obserwator w pociągu: $t_p = \frac{L_t + L_p}{V} = \frac{2{,}005L_t}{0{,}1c} = 20{,}05\frac{L_t}{c}$

Paradoks bliźniąt – na czym polega?

Astronauta zostaje wysłany w kosmos i lecąc z szybkością zaledwie 0,9c odkrywa nieznany układ słoneczny i wraca na Ziemię z wynikami badań. Zegar pokładowy wskazuje czas trwania podróży na 2 lata.

Brat bliźniak astronauty spotyka go po powrocie i mówi:

„Dobrze Cię widzieć, minęło ponad 4,5 roku! Jestem teraz starszy od Ciebie!"



$$\Delta t_Z = \gamma \cdot \Delta t_A$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}} = 2{,}294$$

$$\Delta t_Z = \frac{2}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}} = 4{,}6 \text{ roku}$$

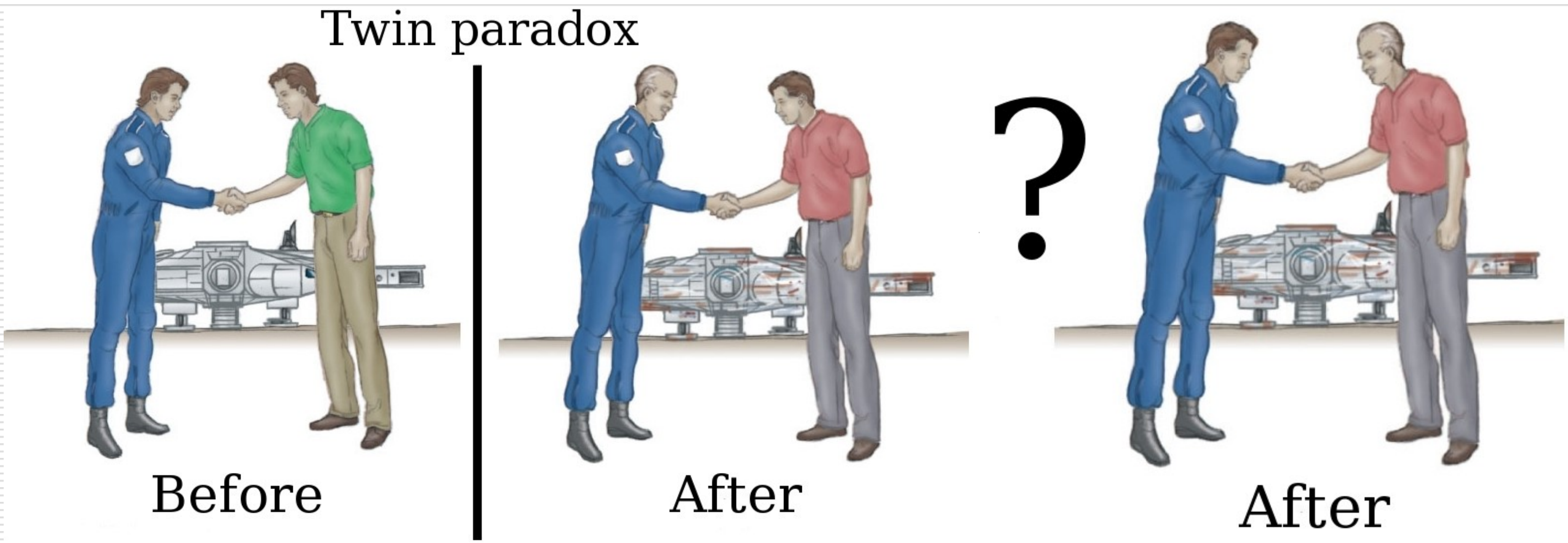
„Ciebie też dobrze zobaczyć” – odpowiada astronauta -

„Ale dla mnie to Ziemia się poruszała, a ja tkwiłem w statku i u Ciebie minęło tylko trochę ponad 10 miesięcy! Teraz to ja jestem starszy!”

$$\Delta t_A = \frac{1}{\gamma}\Delta t_Z \qquad \Delta t_A = \sqrt{1-(0{,}9)^2}\cdot 2 = 0{,}436\cdot 2 = 0{,}87\, roku = 10{,}5\, m-cy$$

Więc to kto jest starszy ??

Tylko układ „Ziemi” jest stałym układem inercjalnym i tylko dla niego można stosować szczególną teorię względności. Zatem…?

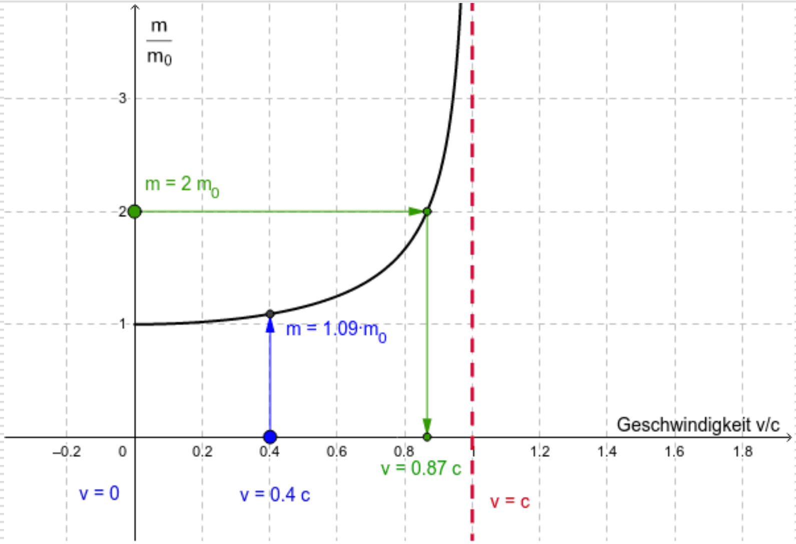


A co z prawami dynamiki w transformacji Lorentza?

Co będzie gdy na ciało działa stała siła i z II zasady dynamiki Newtona $F = \frac{d(mv)}{dt}$ $\Rightarrow$ *v* rośnie do ∞ !!

Wyjaśnienie Einsteina: gdy *F= const* to rośnie nie *v* ale *p,* co oznacza, że masa nie jest stała!!

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$



Np. masa elektronów przyspieszanych w synchrotronie: $m = 2000m_0 \approx m_p$

Masa jest równoważna…..

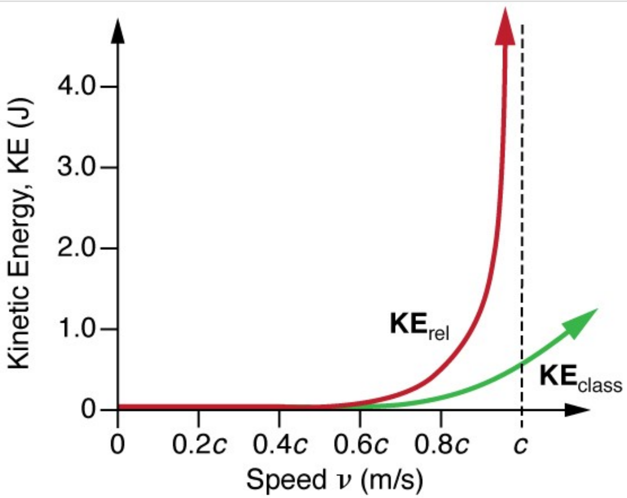
Ogrzewamy gaz w zbiorniku ⇒ rośnie szybkość cząsteczek ⇒ rośnie ich masa. Rozwijając w szereg potęgowy:

$$m = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) \Rightarrow m \cong m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Wynika stąd, że wzrost masy jest proporcjonalny do wzrostu temperatury, ale skoro występuje we wzorze klasyczna E_{kin} to $\boxed{\Delta m = \Delta(E_{kin})/c^2}$ Z rozwinięcia potęgowego – energia całkowita to:

$mc^2 = m_0c^2 + ½\, m_0v^2 + \ldots$

energia spoczynkowa i energia kinetyczna



Podsumowanie

- Transformacja Galileusza opiera się na założeniu, że czas płynie jednakowo w inercjalnych układach odniesienia i dotyczy obiektów poruszających się z prędkościami dużo mniejszymi od prędkości światła.
- Transformacja Lorentza zakłada, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.
- Konsekwencjami transformacji Lorentza są między innymi: nowe spojrzenie na równoczesność zjawisk, skrócenie długości, dylatacja czasu oraz inne zasady składania prędkości.
- Transformacja Galileusza wynika z transformacji Lorentza przy założeniu małej prędkości.