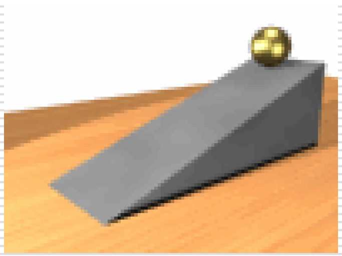
Wykład 3: Kinematyka

dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Wstęp



Opis ruchu

KINEMATYKA

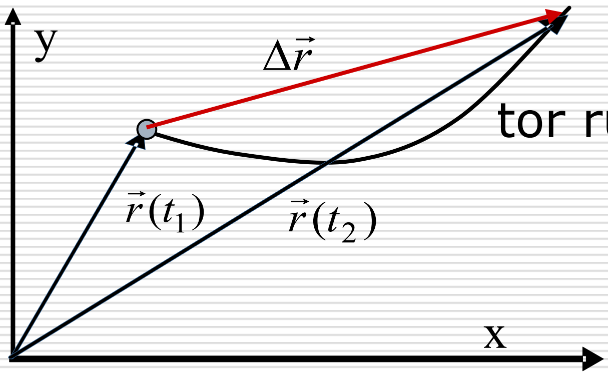
Dlaczego
taki ruch?

Przyczyny ruchu

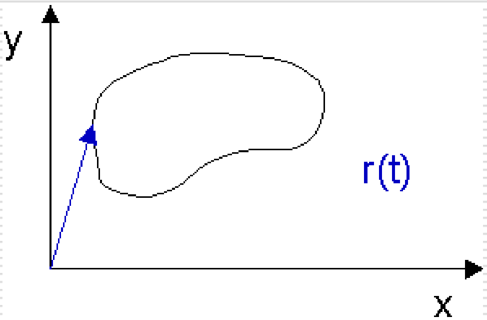
DYNAMIKA

MECHANIKA

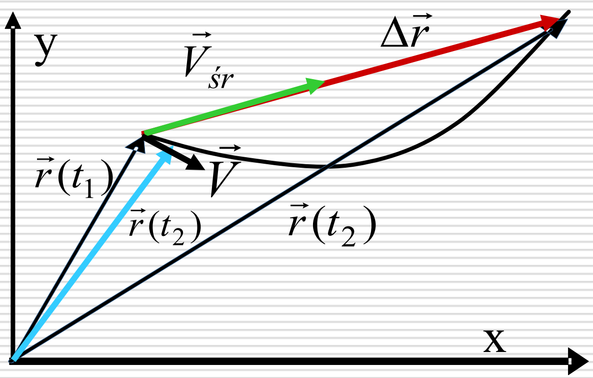
Podstawowe pojęcia dla ruchu prostoliniowego i krzywoliniowego.



przemieszczenie $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$



prędkość średnia



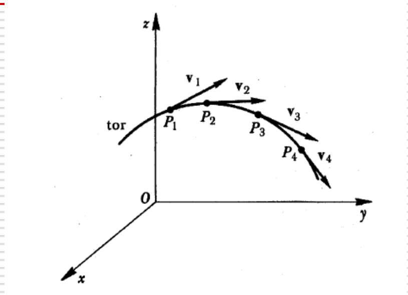
$$\vec{V}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

gdy $t_2 \to t_1$ $\Delta t \to dt$ to $\Delta r \to dr$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ prędkość chwilowa

Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$$



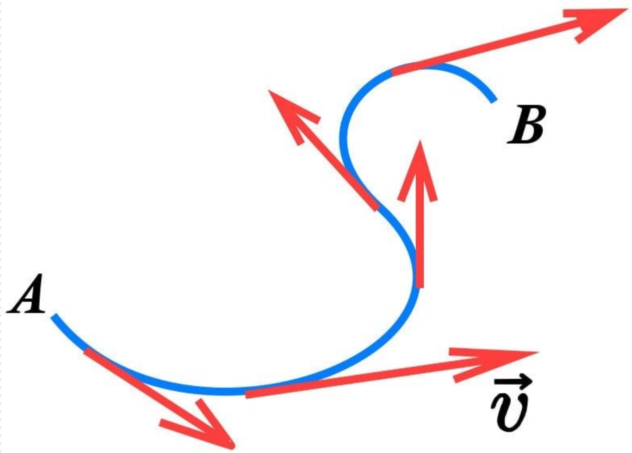
skoro $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ to $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru.



Przyspieszenie

Przyspieszenie związane jest ze zmianą wektora prędkości

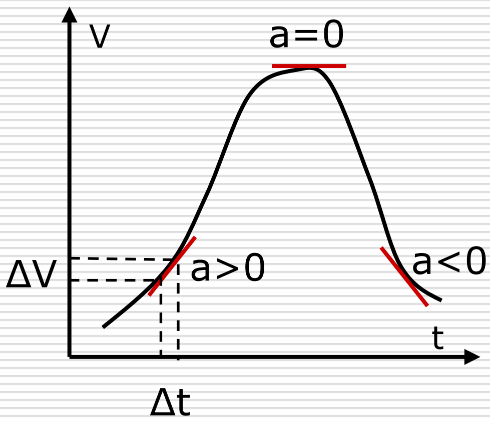
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{i}\frac{dV_x}{dt} + \hat{j}\frac{dV_y}{dt} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt}$$



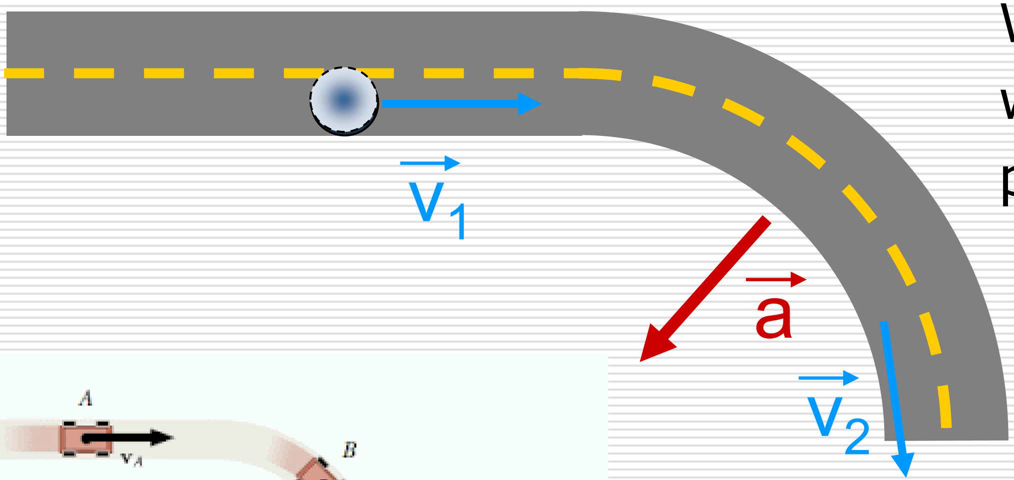
Jeżeli $\vec{a} = const$ to $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$

ponieważ:

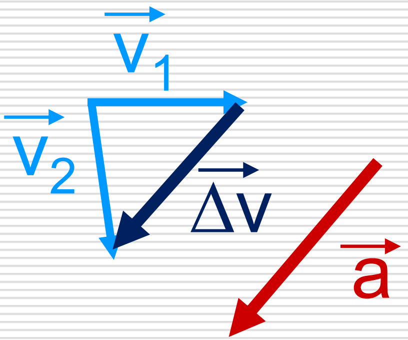
$$\frac{dV}{dt} = a \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_{t=0}^{t} a\,dt$$

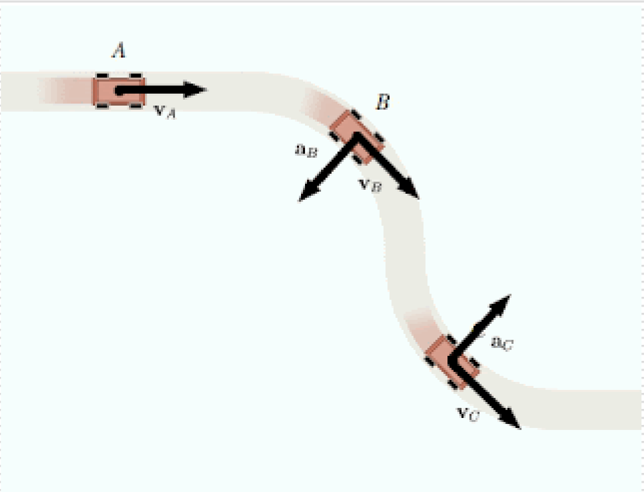
więc $V = V_0 + at$

Ruch krzywoliniowy



W ruchu krzywoliniowym występuje zmiana wektora prędkości.





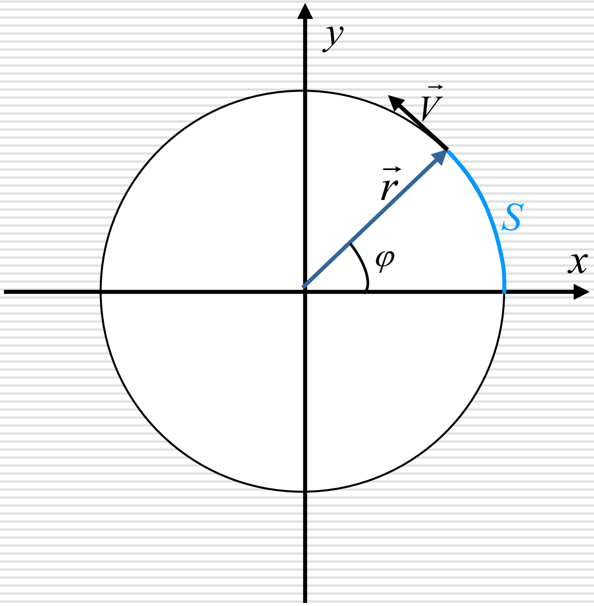
Konsekwencją tego jest występowanie przyspieszenia pomimo stałej wartości prędkości

Przyspieszenie styczne i normalne

Ruch jednostajny $V = \dfrac{S}{t}$

$$\left.\begin{matrix}\varphi \\ S \\ r\end{matrix}\right\} \quad S = \varphi \cdot r$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$



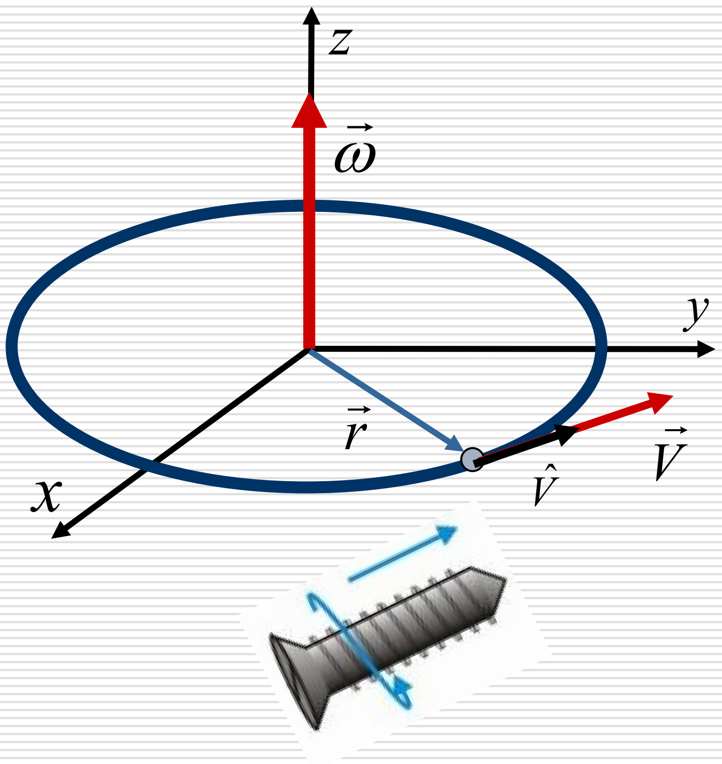
$$dS = r \cdot d\varphi$$

$$V = \frac{r \cdot d\varphi}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

czyli $V = \omega \cdot r$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Związek pomiędzy prędkością liniową i kątową

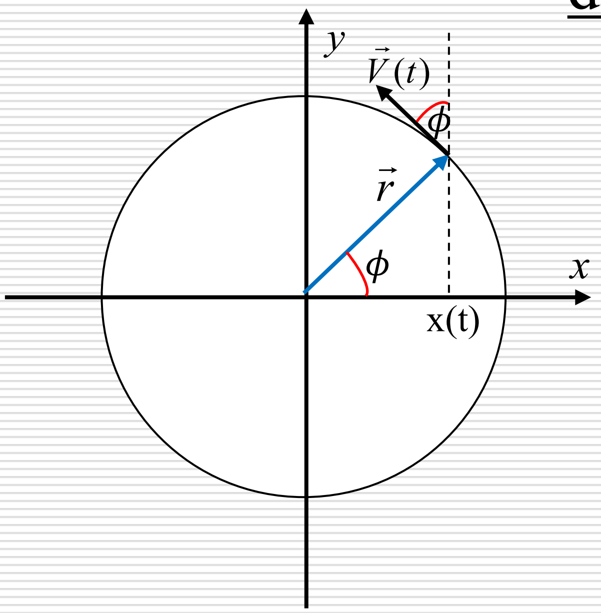


$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

w ruchu jednostajnym po okręgu, wektor prędkości kątowej jest stały

reguła śruby!!

Ruch niejednostajny po okręgu



<u>dla współrzędnej x:</u>

$$x = r \cdot \cos\phi\,(t)$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r\sin\phi\,(t)\,\frac{d\phi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r\cos\phi \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{d\phi}{dt} - r\sin\phi \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

skoro: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$$a_x = -r\,\omega^2\cos\phi - r\sin\phi\,\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$x = r \cdot \cos\phi\,(t)$$

$$V_x = -r\,\omega \cdot \sin\varphi\,(t)$$
$$V_x = -r\,\omega \cdot \sin\varphi\,(t)$$

$$a_x = -r\cos\phi \cdot \omega^2 - r\sin\phi\,\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

ponieważ: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ i $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

to $$a_x = -\omega^2 x - \frac{r\varepsilon\omega}{\omega}\sin\phi$$

czyli $$a_x = -\omega^2 x + \frac{\varepsilon}{\omega}V_x$$

analogicznie $y = r \cdot \sin\phi\,(t)$ $V_y = r\omega\cos\phi$

zatem $$a_y = -\omega^2 y + \frac{\varepsilon}{\omega}V_y$$

mamy: $a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} V_x - \omega^2 x$ $\quad a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} V_y - \omega^2 y$

Skoro $\vec{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y$ to $\vec{a} = \hat{i} \frac{\varepsilon}{\omega} V_x - \hat{i} \omega^2 x + \hat{j} \frac{\varepsilon}{\omega} V_y - \hat{j} \omega^2 y$

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega}(\hat{i} V_x + \hat{j} V_y) - \omega^2(\hat{i} x + \hat{j} y)$$

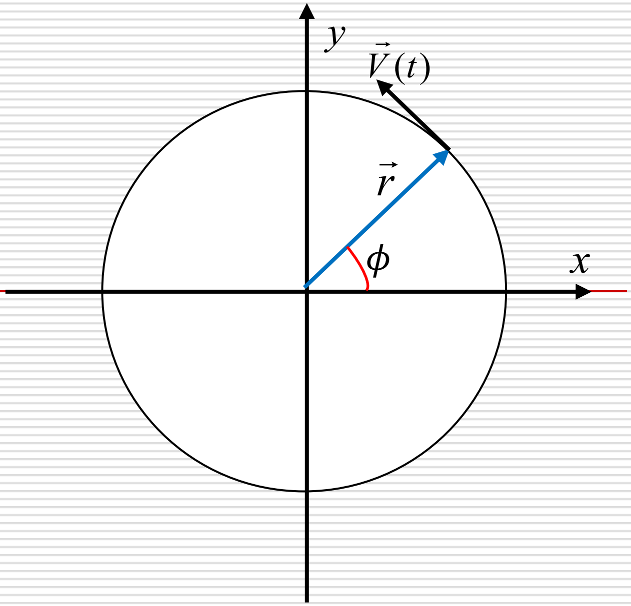
ostatecznie:

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega}\vec{V} - \omega^2 \vec{r}$$

przyspieszenie styczne

przyspieszenie dośrodkowe

Wnioski:



- *kiedy maleje składowa* V_y *prędkości, to rośnie składowa* V_x

- *przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest wzdłuż promienia, do środka okręgu*

- *wartość przyspieszenia dośrodkowego jest równa:* $a_n = \dfrac{V^2}{r}$

Przykłady

1. Pająk porusza się po torze krzywoliniowym, którego długość opisana jest równaniem: $S(t) = S_0 e^{ct}$
   gdzie S_0 i c to stałe. Wektor przyspieszenia pająka tworzy w każdym punkcie toru stały kąt φ ze styczną do jego toru.

Obliczyć wartość:

a) przyspieszenia stycznego,

b) przyspieszenia normalnego,

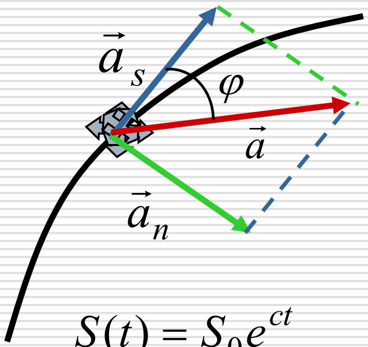
c) promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

ROZWIĄZANIE:

a) przyspieszenie styczne $a_s = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$ $\quad V = \dfrac{dS}{dt} = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

stąd $a_s = c^2 S_0 e^{ct}$

b) przyspieszenie normalne:



z rysunku wynika że $tg\varphi = \dfrac{a_n}{a_s}$

$$S(t) = S_0 e^{ct}$$

stąd

$$a_n = a_s \cdot tg\varphi \;\; = c^2 S_0 e^{ct} \cdot tg\varphi$$

c) promień krzywizny toru jako funkcja długości łuku krzywej:

z innej definicji przyspieszenia dośrodkowego (normalnego):

$a_n = \dfrac{V^2}{r}$ stąd podstawiając wyliczone wcześniej *V*: $V = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

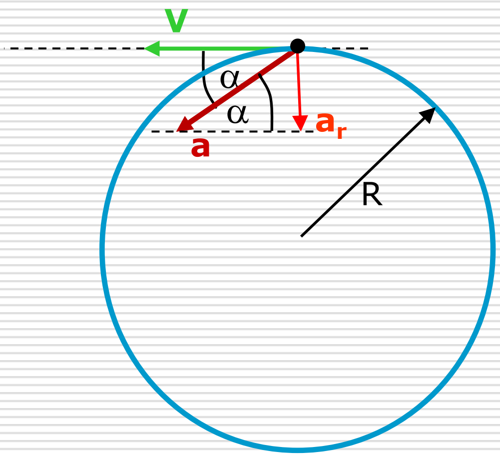
$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{c^2 S_0^2 \cdot \left(e^{ct}\right)^2}{c^2 S_0 \cdot e^{ct} \cdot tg\varphi} \quad = S_0 \cdot e^{ct} \cdot ctg\varphi = S \cdot ctg\varphi$$

2. Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu R = 3,6 m. W pewnej chwili na cząsteczkę zaczyna działać przyspieszenie o wartości 0,21*g*, tworzące w każdym punkcie okręgu po jakim nadal porusza się cząsteczka, stały kąt 30^0 ze styczną do jego toru.

Obliczyć:

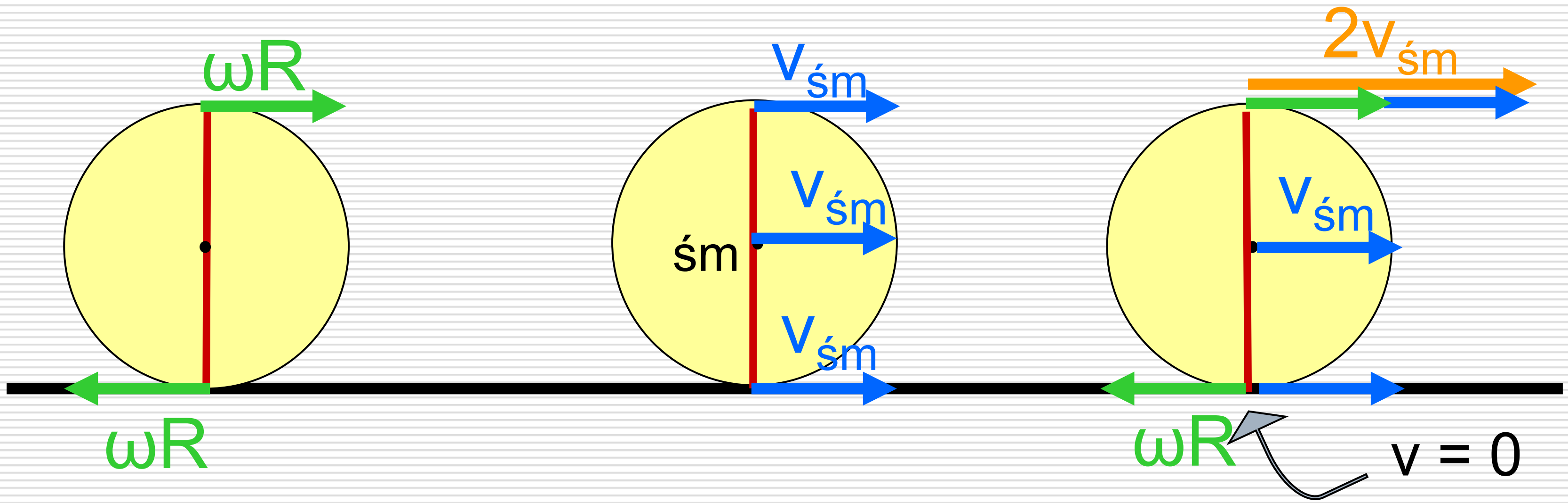
a) szybkość cząsteczki w momencie zadziałania przyspieszenia,

b) szybkość cząsteczki w dwie sekundy później.



Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu – musi występować tarcie między ciałem a podłożem, jest specyficznym rodzajem ruchu ciała, będącym złożeniem ruchu postępowego (środka masy) i ruchu obrotowego - wokół środka masy.

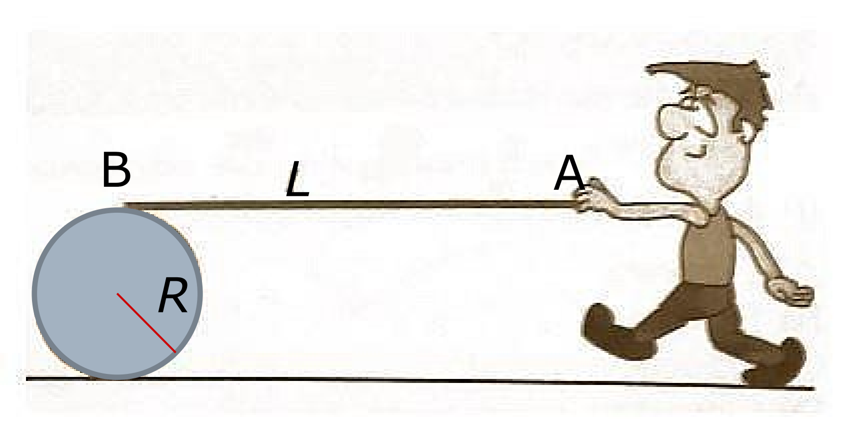


Przykład:

Człowiek trzyma za jeden koniec deski A o długości L opartej drugim końcem B na walcu o promieniu R. Następnie człowiek zaczyna iść pchając deskę, która bez poślizgu toczy się po walcu, który toczy się po podłożu.

Jaką odległość musi przejść człowiek aby punkt A deski dotarł do walca ?

Czy/jak zależy to od promienia walca ?



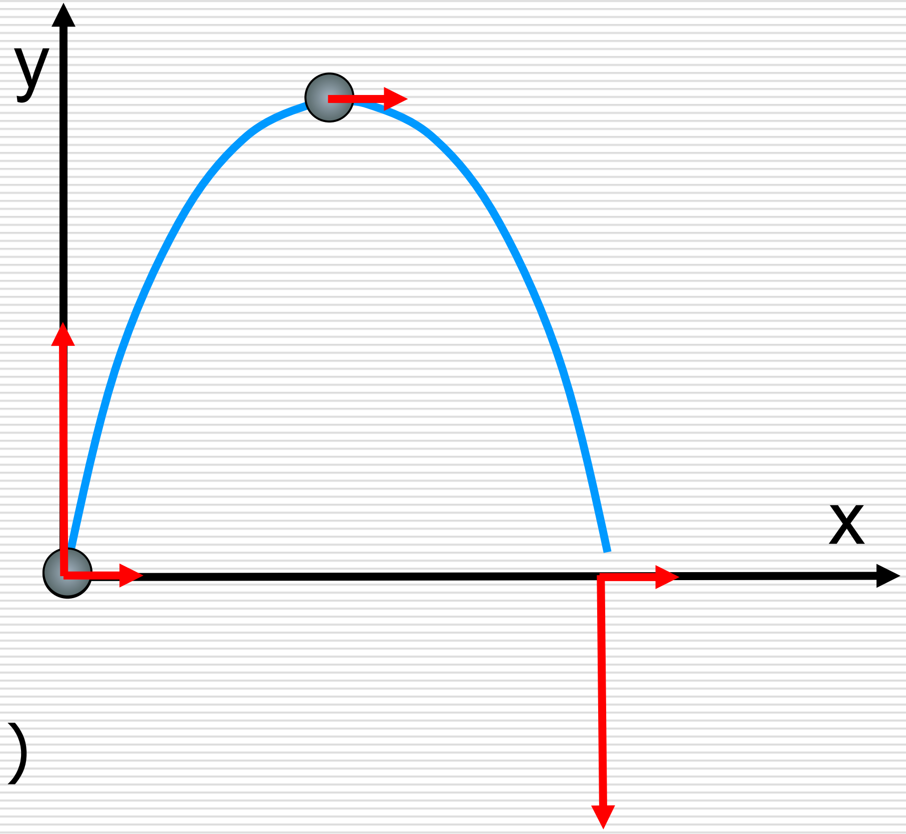
Rozwiązanie:

W czasie t środek walca przebędzie Z szybkością v odległość $S=L=v\cdot t$ W tym samym czasie górny punkt styczności z deską przesunie się na odległość $2\,v\cdot t = 2L$ Czyli człowiek będzie musiał przebyć odległość $2L$ niezależnie od promienia walca.

Inne ruchy krzywoliniowe

- Rzut ukośny

jest to złożenie dwóch niezależnych ruchów-
- ruchu jednostajnego (poziomo)
- ruchu jednostajnie zmiennego (pionowo)



Oś x:

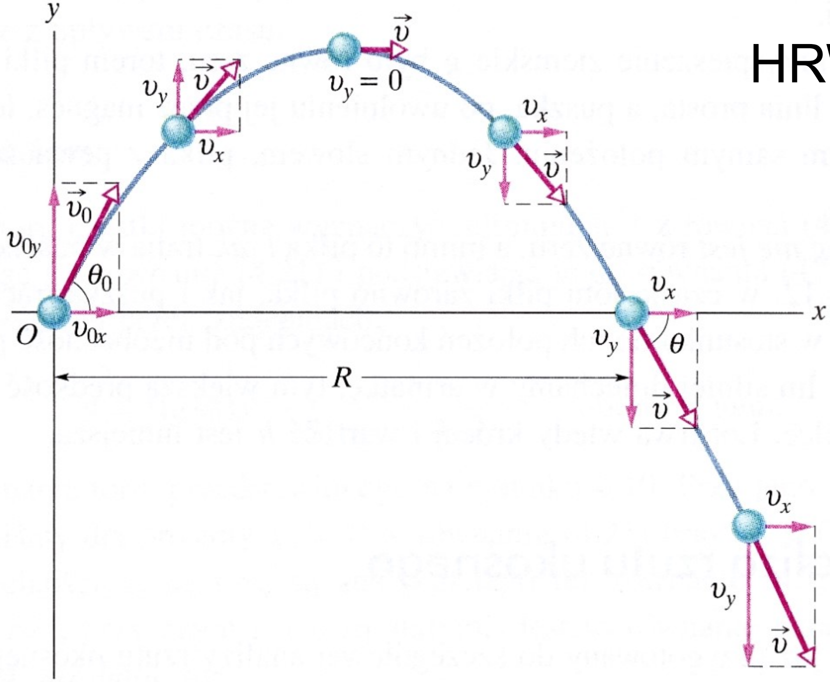
$F_x=0$; $a_x=0$,

ruch jednostajny

Oś y:

$F_y=mg$; $a_y=g$,

ruch jednostajnie zmienny



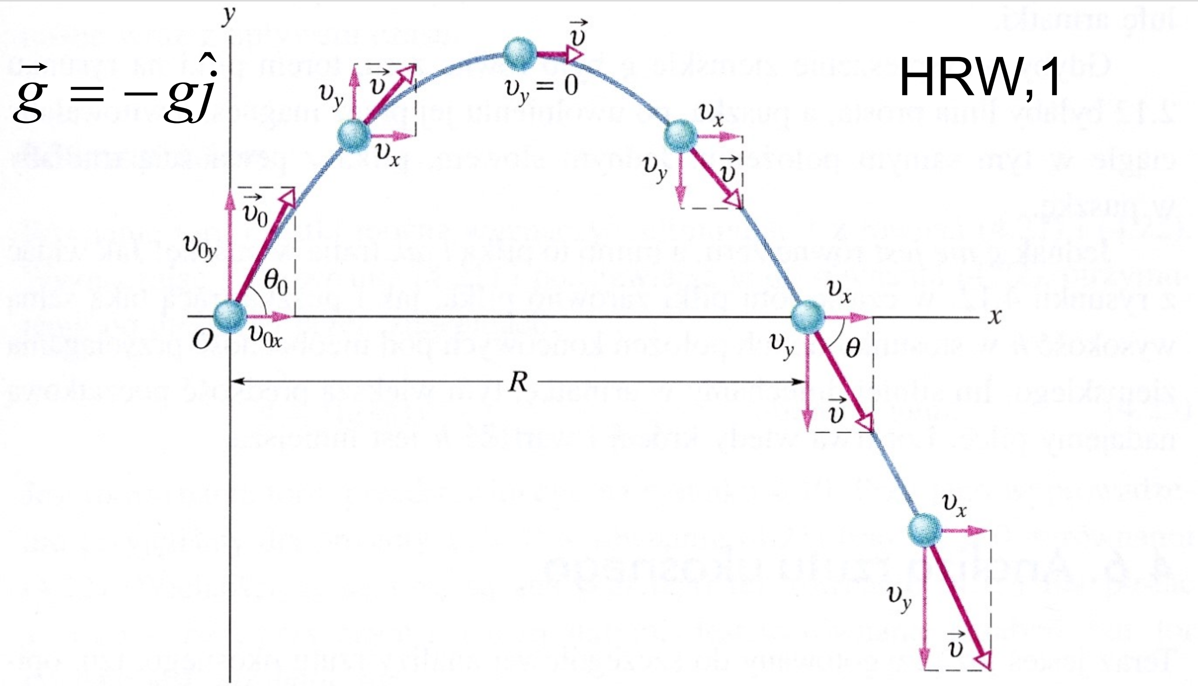
HRW,1

Rys. 4.10. Tor pocisku wystrzelonego z punktu o współrzędnych $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, z prędkością początkową $\vec{v}_0$. Na rysunku pokazano wektor prędkości początkowej i wektory prędkości cząstki w różnych punktach jej toru oraz składowe tych wektorów. Należy zauważyć, że składowa pozioma prędkości pozostaje stała, a jej składowa pionowa zmienia się w sposób ciągły. *Zasięg rzutu R* jest to droga, którą przebywa cząstka w poziomie *do chwili jej powrotu na wysokość, z której została wyrzucona*

Oś x:

$$v_x = v_{0x} = const$$
$$x = v_x t = v_{0x} t$$

$$\vec{g} = -g\hat{j}$$



Oś y:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

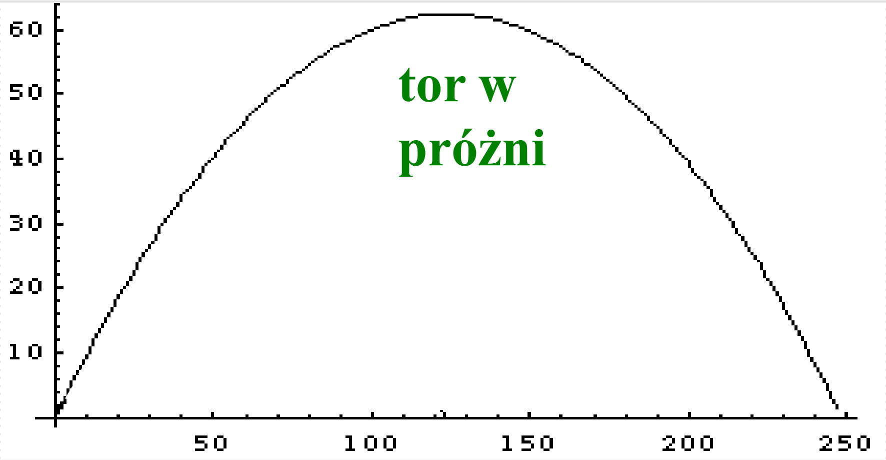
ponieważ $t = \frac{x}{v_{0x}} \rightarrow y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_{0x}^2}$ i $\frac{V_{0y}}{V_{0x}} = tg\theta_0 \rightarrow V_{0y} = V_{0x}\ tg\theta_0$

oraz $\frac{V_{0x}}{V_0} = cos\theta_0 \rightarrow V_{0x} = V_0 cos\theta_0$

$$y = (\mathrm{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$ równanie toru - parabola

..a tak jest naprawdę:

<u>Siła oporu powietrza wpływa na tor rzutu ukośnego !</u>



Piłka do gry w baseball rzucona pod kątem 45° z prędkością v = 50 m/s osiąga:

- bez oporu powietrza -
  - wysokość 63 m,
  - zasięg 254 m,
- z oporem powietrza -
  - wysokość 31 m,
  - zasięg 122 m

optymalny kąt rzutu wynosi:

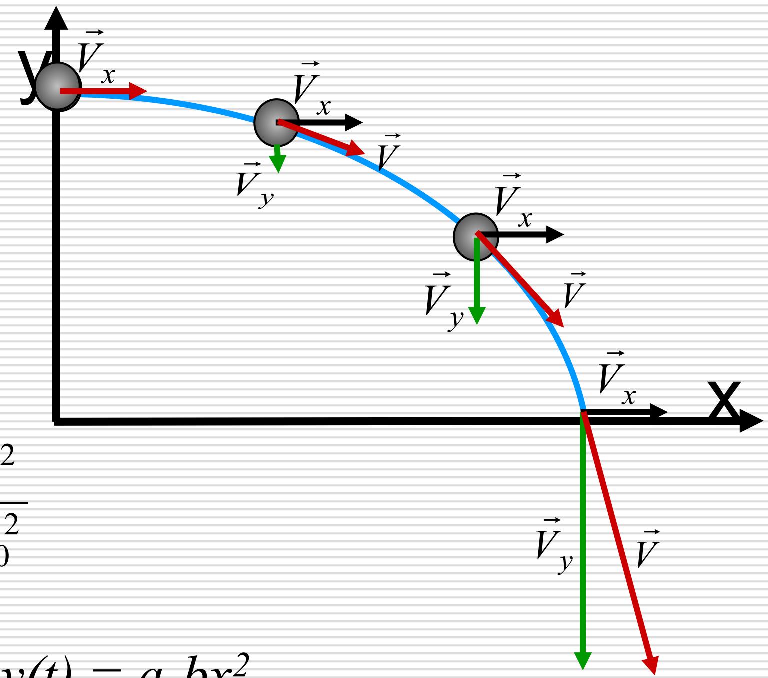
20^o- 30^o 45^o

Rzut poziomy

$V_0 = V_x = \text{const}$

Dla osi OX	Dla osi OY
ruch jednostajny	*ruch jednostajnie przyspieszony*
$X(t) = V_x \cdot t$	$Y(t) = H - \dfrac{gt^2}{2}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$

$$t = \frac{x}{V_0} \quad \Rightarrow \quad y(t) = H - \frac{g\left(\dfrac{x}{V_0}\right)^2}{2} = H - \frac{gx^2}{2V_0^2}$$



Równanie toru – parabola – typu: $y(t) = a\text{-}bx^2$

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_x + \vec{V}_y(t) = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Przykład

Piłkę wyrzucono ukośnie w górę pod kątem 45^0 z prędkością początkową V_0= 12 m/s. W odległości 12 m od miejsca wyrzutu stoi pionowa ściana. Oblicz:

1. czas t_t po którym piłka trafi w ścianę,
2. czy piłka uderzy w ścianę wznosząc się czy już opadając?
3. oblicz składowe prędkości piłki V_x i V_y w momencie trafienia i szybkość wypadkową V,
4. kąt pod jakim piłka trafi w ścianę,
5. maksymalną wysokość H na jaką wzniesie się piłka,
6. wysokość od podstawy ściany h na jakiej piłka w nią uderzy,
7. w jakiej odległości X od ściany piłka po sprężystym od niej odbiciu uderzy w ziemię.

Odp.: 1. 440 m
2. $V_{\downarrow}$=6,06 m/s
3. V=93,4 m/s

Zadanie domowe:

Wspinacze utknęli na szczycie skały wznoszącej się 250 m nad poziomem ziemi. Samolot mający dostarczyć zaopatrzenie leci poziomo na wysokości 200 m ponad wspinaczami, z szybkością 250 km/h. Gdy znajduje się w pewnej odległości od szczytu skały następuje wyrzut zasobnika.

1. W jakiej odległości od celu zasobnik powinien zostać upuszczony z samolotu?
2. Jeżeli samolot zbliży się na odległość 400 m, to z jaką szybkością pionową (w górę czy w dół?) zasobnik musi być wyrzucony aby trafił w cel?
3. Z jaką szybkością uderzy on w szczyt skały?