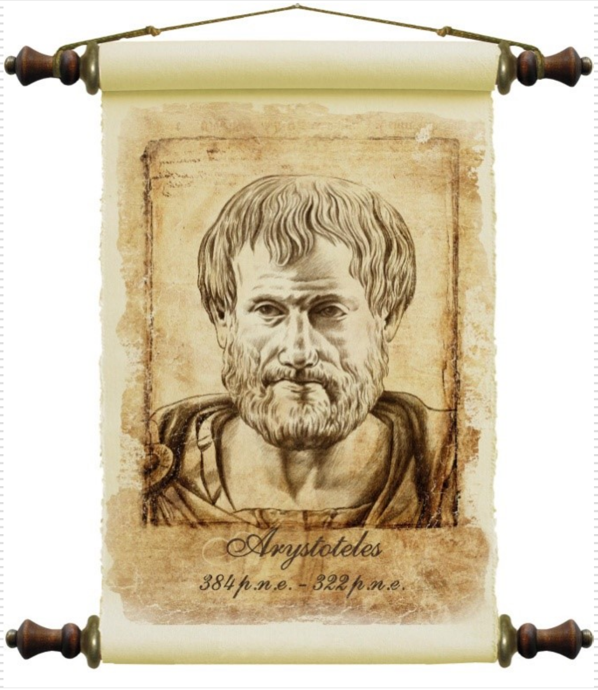
Wykład 4: Dynamika

dr inż. Zbigniew Szklarski

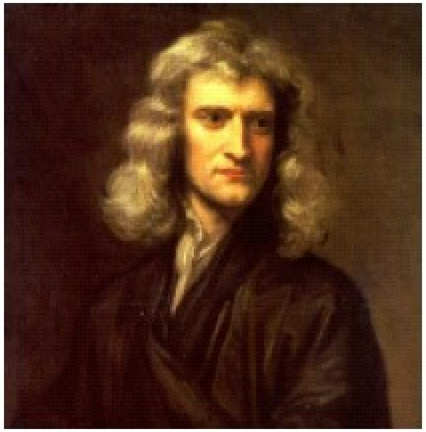
szkla@agh.edu.pl

http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Przyczyny ruchu - zasady dynamiki dla punktu materialnego



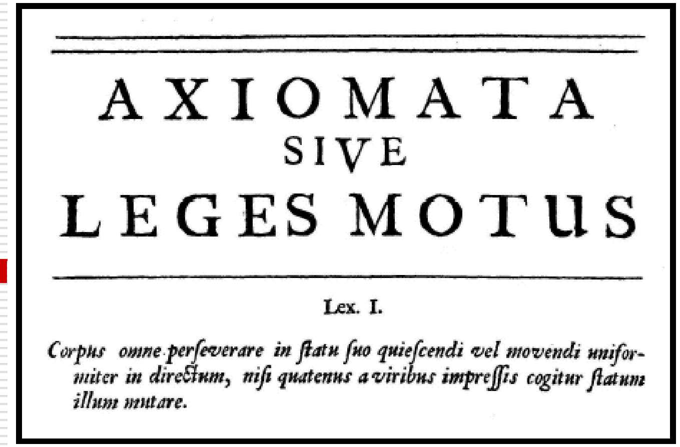
Jeśli ciało znajduje się we właściwym miejscu, to jego ruch jest możliwy jedynie pod wpływem działania sił zewnętrznych. Z wyjątkiem ciał niebieskich stanem normalnym jest stan spoczynku.


1642-1727
Isaac Newton

„Każde ciało trwa w swym stanie: spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu."

Principia Mathematica Philosophiae Naturalis

1687 – zasady dynamiki


AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Istnieje ***układ inercjalny*** – tzn. układ odniesienia, w którym ciało, na które nic nie działa, spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.

Zasada bezwładności Newtona jest <u>postulatem istnienia</u> układu inercjalnego.

Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością **V = const** jest też układem inercjalnym; istnieje więc nieskończenie wiele układów inercjalnych

Druga zasada dynamiki

Niezerowa wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało nadaje ciału przyspieszenie o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej oraz wartości wprost proporcjonalnej do wartości tej siły a odwrotnie proporcjonalnej do masy ciała.

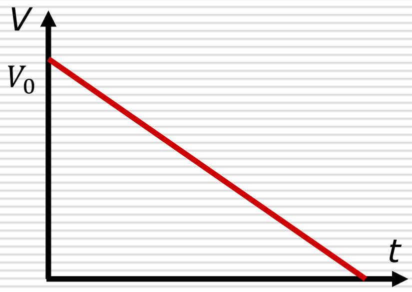
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{wyp}}{m}$$

stąd $\vec{F}_w = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ Czyli jeśli znamy rozkład sił i masę ciała oraz warunki początkowe dla położenia i prędkości, to rozwiązując równanie ruchu otrzymamy układ trzech równań skalarnych, opisujących zachowanie ciała w czasie:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

Przykład 1:

Obliczyć wartość siły hamowania koniecznej do zatrzymania na odcinku 55 m samochodu o masie 1500 kg jadącego z szybkością 100 km/h.



Rozwiązanie:

100 km/h ≈ 27,8 m/s

$$S = \frac{1}{2}V_0 t \Rightarrow t = \frac{2S}{V_0}$$

oraz $a = \frac{V_0}{t}$ gdzie a – opóźnienie !!

$$a = \frac{V_0^2}{2S} \Rightarrow a = 7{,}03 \text{ m/s}^2$$

$F = m \cdot a$ = 10 538,7 N – siła hamująca !

Przykłady równań Newtona:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}$$ Ruch ładunku w polu magnetycznym

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}$$ Ruch ładunku w polu elektrycznym

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g}$$ Ruch masy w polu grawitacyjnym

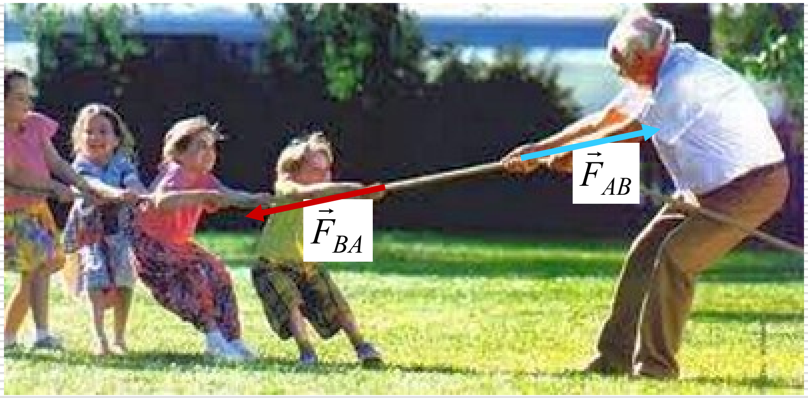
Uogólniona II zasada dynamiki:

Jeżeli $m = const$ to

$$\vec{F}_w = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Trzecia zasada dynamiki Newtona

Każdemu działaniu (akcji) towarzyszy przeciwdziałanie (reakcja)



Siła działająca na ciało A ze strony ciała B (F_{AB}) jest równa sile działającej na ciało B ze strony ciała A *(F_{BA}).*
Siły te występują parami. Czy one się równoważą ?
Nie! Każda siła działa na inne ciało !

Przykład 2:

Jeżeli brak jest siły zewnętrznej (układ izolowany)

$$F_w = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = const$$ (zasada zachowania pędu)

Samochód o masie *m* porusza się poziomo, prostoliniowo z szybkością *V* i zderza się czołowo z ciężarówką o masie *3m* jadącą z szybkością ½ *V.* W wyniku zderzenia ciężarówka zatrzymała się, a samochód osobowy został odrzucony wstecz.
Oblicz jaka część początkowej energii samochodów wydzieliła się w wyniku zderzenia.
Przeprowadź te obliczenia dla zderzenia całkowicie niesprężystego.

Rozpatrz pierwszą sytuację, gdy ciężarówka ma masę *5m.* Zinterpretuj wynik tych obliczeń.

Przykład 3:

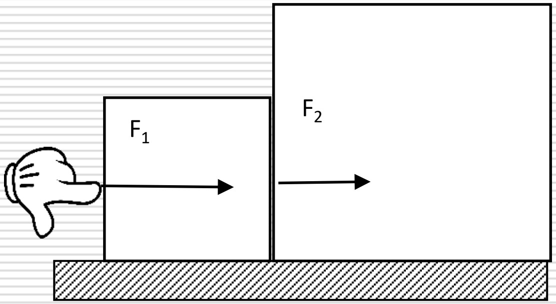
Z wysokości *h* nad ziemią spada swobodnie kula z gliny o masie M. Na wysokości *h/2* trafił ją w środek, poruszający poziomo się z prędkością V_0 pocisk o masie m, który utkwił w kuli.

Oblicz szybkość kuli po wbiciu się w nią pocisku.

Dane *g*.

Przykład 4:

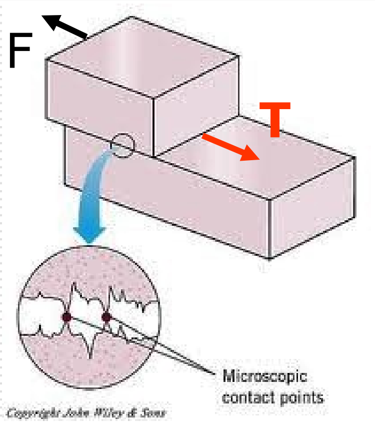
Dwa klocki o masach $m_1 = 0{,}40$ kg i $m_2 = 0{,}60$ kg zetknięte ze sobą poruszają się bez tarcia po gładkiej powierzchni pod działaniem siły $F_1 = 2$ N. Siła ta jest przyłożona do mniejszego z klocków.



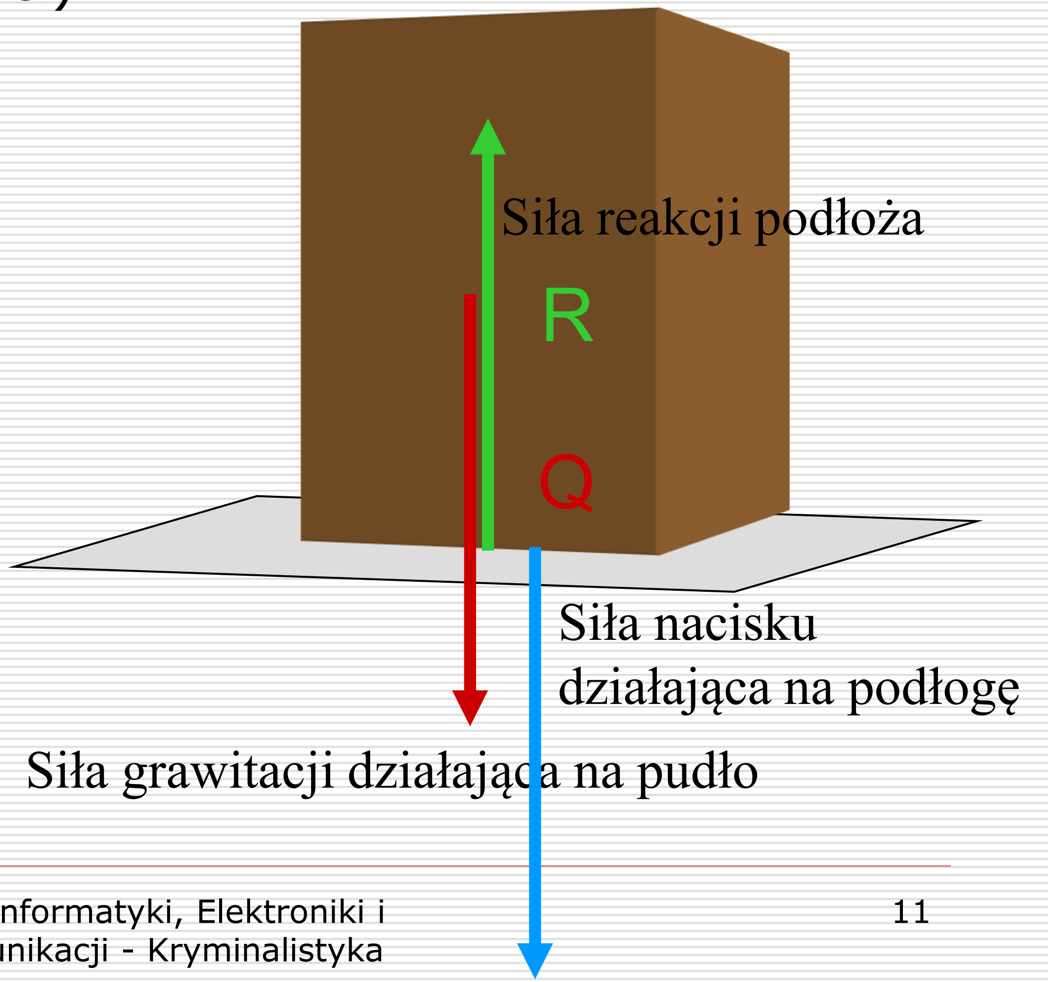
a) Oblicz przyspieszenie klocka m_1.
b) Oblicz z jaką siłą F_2 jest popychany większy klocek.
c) Podaj z jaką siłą klocek większy oddziałuje na mniejszy.

Przykłady istotnych sił rzeczywistych

- Siła grawitacji (ciężkości)
- Siła nacisku/reakcji
- Siła naprężenia
- Siła tarcia (oporu)

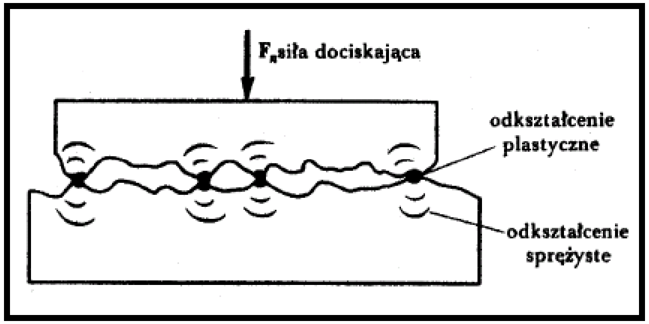


- Siła dośrodkowa



Tarcie

- Źródłem siły tarcia jest oddziaływanie pomiędzy ciałem a powierzchnią, po której jest wprawiane w ruch.
- Tarcie jest powodowane przez oddziaływanie elektromagnetyczne między cząstkami/atomami stykających się ciał.



- Siła tarcia jest sumą wektorową sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała.
- Powierzchnia rzeczywistego kontaktu mikroskopowego obu ciał może być nawet 10 000 razy mniejsza od powierzchni pozornego makroskopowego kontaktu.

Tarcie

- zewnętrzne
  - poślizgowe
    - statyczne
    - kinetyczne
  - toczne
- wewnętrzne

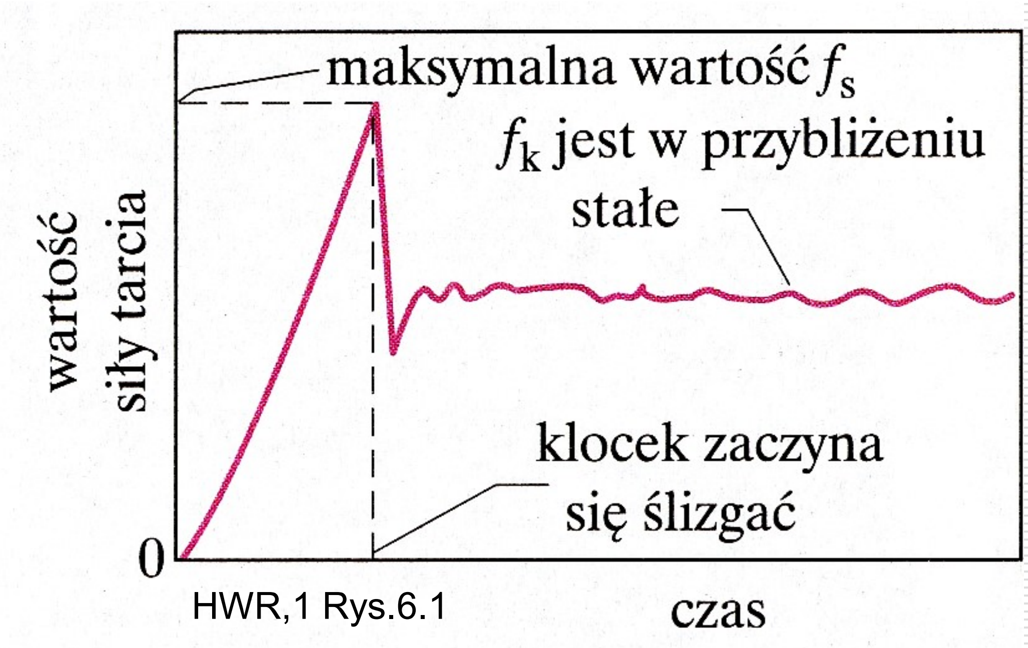
Właściwości siły tarcia

1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego równoważy składową siły równoległą do powierzchni. Siła tarcia statycznego dopasowuje się do siły usiłującej wprawić ciało w ruch.
2. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego dana jest wzorem $T_{Smax} = \mu_s N$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, N jest wartością siły nacisku - prostopadłej do powierzchni, równej sile reakcji działającej na ciało.
3. Jeżeli wartość składowej siły *F*, równoległej do powierzchni przekracza wartość T_{Smax} to ciało zaczyna się ślizgać. Wartość siły tarcia gwałtownie wówczas maleje do

   $T_k = \mu_k N$, gdzie jest μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego

Przykładowe współczynniki tarcia:

Materiał	Wsp. tarcia statycznego μ_s	Wsp. tarcia kinetycznego μ_k
stal / stal	0.6	0.4
po dodaniu smaru do stali	0.1	0.05
metal / lód	0.022	0.02
opona / sucha nawierzchnia	0.9	0.8
opona / mokra nawierzchnia	0.8	0.7

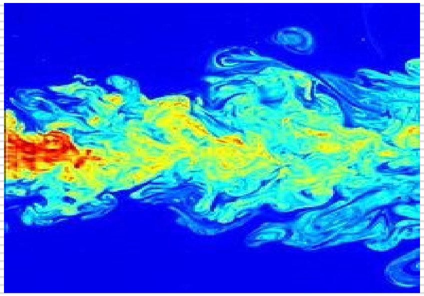


HWR,1 Rys.6.1

Tarcie toczne

- wynika ono z braku symetrii oddziaływań w obszarze styku,
- siła reakcji podłoża nie przypada w miejscu działania nacisku lecz jest przesunięta w kierunku toczenia i jest odchylona od pionu,
- przy toczeniu tworzą się i rozrywają połączenia mostkowe (adhezyjne) między ciałami *(ważne w F1 !)*,
- następuje deformacja plastyczna w miejscu styku ciał.
  - opona z większą zawartością siarki – mniejsze opory toczenia!
  - wpływ ugięcia ścian opony - szersze mają mniejsze ugięcie - mniejsze opory
  - gruba rzeźba bieżnika – większy opór
  - większy rozmiar koła – mniejszy opór
  - ciśnienie w oponie – większe, to mniejszy opór ale straty energii przy „przeskoku” nad nierównościami

Tarcie wewnętrzne – lepkość



- Lepkość to opór, powstający pomiędzy warstwami (strugami) cieczy lub gazu przemieszczającymi się względem siebie.
- Rodzaj przepływu określa liczba Reynoldsa:

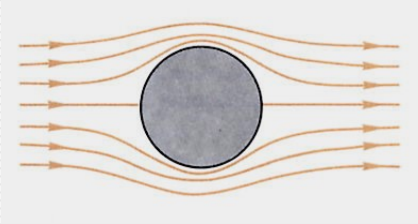
$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{v}\,\rho L}{\eta} = \frac{\mathrm{v}\,L}{\upsilon}$$

V – prędkość; ρ - gęstość

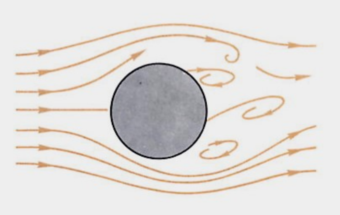
L – charakterystyczny rozmiar ciała

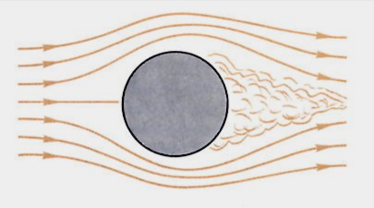
η - wspł. lepkości (dynamiczny) $\left[Pa \cdot s\right]$

υ - wspł. lepkości (kinematyczny) $\left[\frac{m^2}{s}\right]$



przepływ laminarny Re << 1





przepływ turbulentny Re > 2000

Prędkość graniczna

$$V_{gr} = \sqrt{\frac{2F_g}{C \cdot \rho \cdot S}}$$

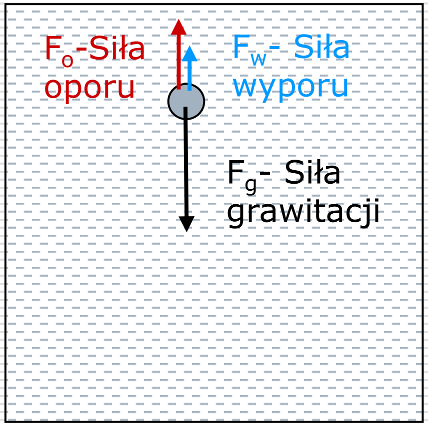
C – współ. oporu

ρ - gęstość ośrodka

S - pole przekroju

Siła Stokes'a

Kulka o promieniu *r* porusza się w ośrodku lepkim (mała liczba Reynoldsa)



$F_o = 6\pi\eta rV$

$F_w = m_p \cdot g$

$F_g = m_k \cdot g$

gdzie:

m_p- *masa płynu wypartego przez kulkę*

m_k- *masa kulki*

Równanie ruchu kulki:

$$V_{gr} = \frac{(m_k - m_p) \cdot g}{6\pi\eta r}$$ prędkość graniczna kulki $\Leftarrow$ $$m_k \frac{dV}{dt} = m_k \cdot g - m_p \cdot g - 6\pi\eta r \cdot V$$

Przykład 5:

Kierowca samochodu jadącego z szybkością *V* zobaczył nagle przed sobą szeroki mur.

Co powinien zrobić aby uniknąć zderzenia – zahamować czy skręcić zataczając łuk? Współczynnik tarcia kół o jezdnię wynosi μ.

Rozwiązanie:

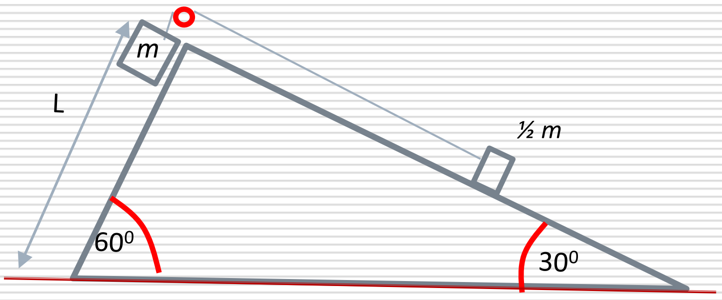
Siła tarcia: $F = mg\mu$ odległość przebyta przy hamowaniu podczas jazdy na wprost:

$$S = \frac{V^2}{2g\mu}$$

Promień najciaśniejszego zakrętu zależy od - siły tarcia, która nadaje przyspieszenie dośrodkowe:

$$R = \frac{V^2}{g\mu} \quad \Rightarrow \quad S < R \,! \quad \textit{(przy założeniu jednakowego } \mu\textit{)}$$

Przykład 6:



Dwie masy: *m* oraz *½m* połączone nieważką nicią spoczywają na bokach równi pochyłej nachylonych pod kątami odpowiednio: $\alpha = 60^0$ i $\beta = 30^0$ oraz długości krótszego zbocza L = 0,5 m – jak na rysunku. Współczynnik tarcia mas o równię wynosi 1/3. Opory nici na krążku są do zaniedbania.

a) oblicz po jakim czasie większa masa uderzy w podłoże,

b) oblicz jaką szybkość uzyska wówczas mniejsza masa.

Odp.:
T = 0,7 s
V = 1,42 m/s

Dynamika w układach nieinercjalnych

ZASADY DYNAMIKI NEWTONA OBOWIĄZUJĄ W UKŁADACH INERCJALNYCH !!

Co można zrobić aby móc stosować te zasady w układach nieinercjalnych?

Siły pozorne,

Siły bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

przyspieszenie układu

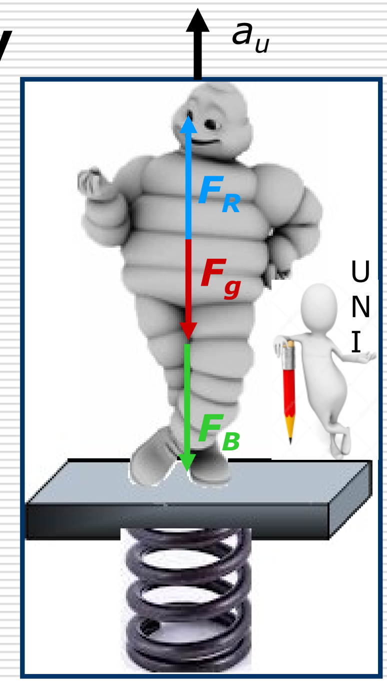
II zasada dynamiki:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{rz} + \vec{F}_b = m\vec{a}$$

Przykład – ciężar pozorny

Winda rusza w górę ze stałym przyspieszeniem *a.* Jaki ciężar wskaże waga sprężynowa?

Układ Inercjalny **Układ Nie Inercjalny**



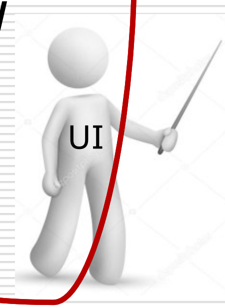
$$F_R - F_g = a_u \cdot m$$

$$F_R - F_g - F_B = 0$$

$$F_B = m \cdot a_u$$

waga wskazuje siłę F_N - *nacisku*

ale $F_R = F_N$ *więc*



$$F_N = F_g + m \cdot a_u$$

Dynamika w ruchu po okręgu

Rotor

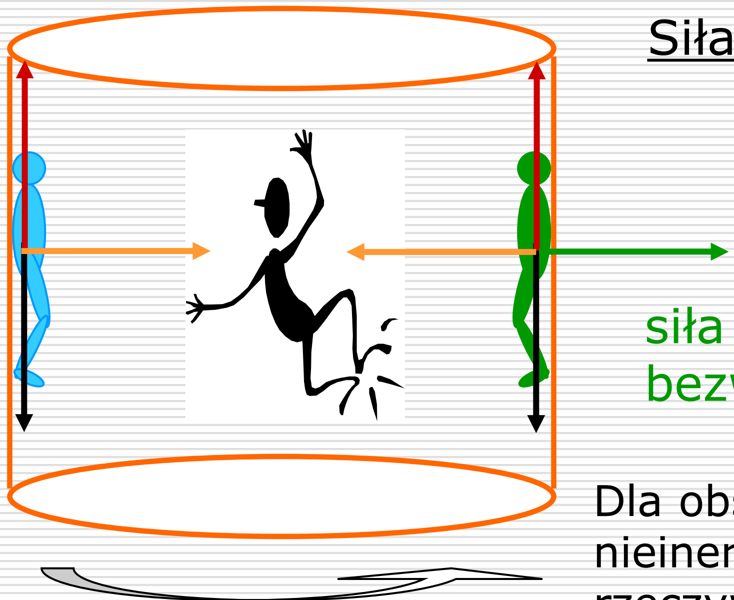
Obserwator w układzie inercjalnym wskaże

Siły rzeczywiste:

siła grawitacji
siła reakcji na nacisk
siła tarcia

Obserwator w układzie nieinercjalnym

Siła pozorna:



siła odśrodkowa bezwładności

Dla obserwatora w układzie inercjalnym siła reakcji na nacisk pełni rolę siły dośrodkowej

Dla obserwatora w układzie nieinercjalnym wszystkie siły: rzeczywiste i siła odśrodkowa (bezwładności) się równoważą

Czy Ziemia jest układem inercjalnym ?

Rotacja Ziemi wokół własnej osi

$$\Downarrow$$

$$a_Z \approx 3 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$$

Obieg wokół Słońca

$$\Downarrow$$

$$a_O \approx 6 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$$

Obieg Słońca w Galaktyce

$$\Downarrow$$

$$a_S \approx 3 \cdot 10^{-10}\ m/s^2$$

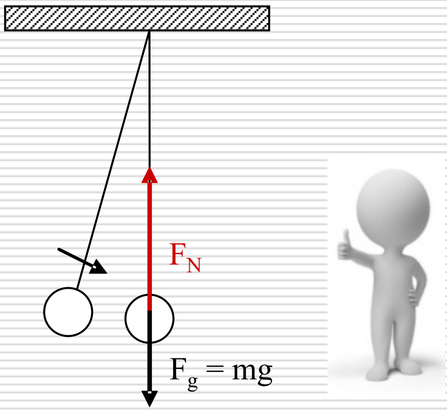
Z czym porównać oszacowane wartości przyspieszeń?

$$g = 9,81 m/s^2$$

Wniosek?

Wahadło matematyczne

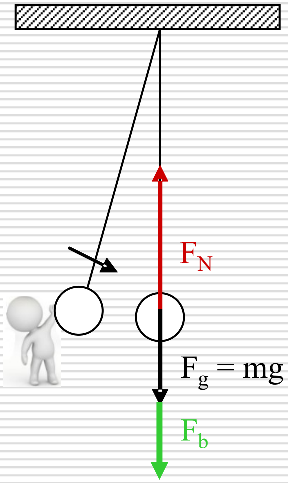
Układ inercjalny



$$\vec{F}_d = \vec{F}_N + \vec{F}_g \qquad \text{czyli} \quad F_d = F_N - F_g$$

$$\frac{mV^2}{r} = F_N - mg \qquad \Rightarrow F_N = \frac{mV^2}{r} + mg$$

Układ nieinercjalny



$$\vec{F}_{wyp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_b = 0$$

czyli $F_N = F_g + F_b$

$$F_N = mg + \frac{mV^2}{r}$$

Przykład 7:

Kulka o masie **m** jest zawieszona na nici o długości **R** i wiruje ze stałą szybkością w płaszczyźnie pionowej po okręgu tak, że w górnym położeniu nitka nie jest napięta.

a) Zrób odpowiedni rysunek z zaznaczeniem sił działających na kulkę w górnym oraz w dolnym położeniu – w układzie inercjalnym i nieinercjalnym.

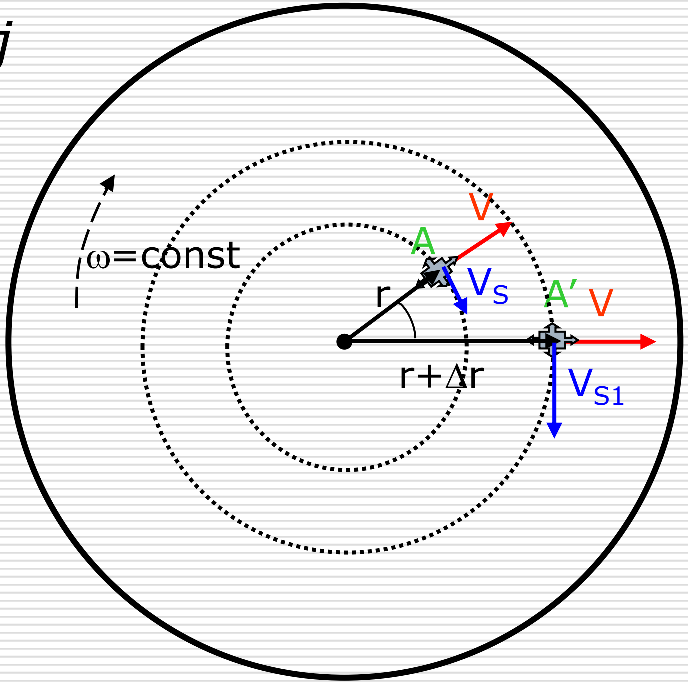
b) Oblicz szybkość kulki w górnym położeniu.

c) Oblicz ile razy naciąg nici w dolnym położeniu jest większy od ciężaru kulki ?

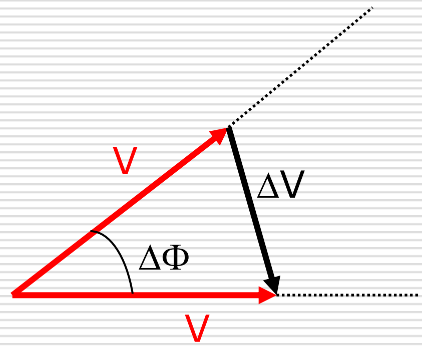
Przyspieszenie i siła Coriolisa

- *Mrówka na płycie gramofonowej*

Płyta obraca się ze stałą prędkością kątową ω.
Mrówka porusza się względem płyty ruchem jednostajnym, prosto-liniowym - wzdłuż promienia, z punktu A do punktu A' w czasie Δt z prędkością V.
Prędkość styczna V_S rośnie wraz z odległością od środka płyty.
W tym czasie płyta obraca się o kąt $\Delta\varphi$



Skoro $\Delta\Phi$ jest małe to $\Delta V = V \cdot \Delta\Phi$



czyli $\frac{\Delta V}{\Delta t} = V \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ dla $\Delta t \to 0$ można zapisać:

$\frac{dV}{dt} = V \frac{d\Phi}{dt}$ czyli $a_1 = V \cdot \omega$

Prędkość V_S zmienia się od: $V_S = \omega \cdot r$

do wartości $V_{S1} = \omega \cdot (r + \Delta r)$

a więc $\Delta V_S = \omega \cdot (r + \Delta r) - \omega \cdot r$ czyli $\Delta V_S = \omega \cdot \Delta r$ $|:\Delta t$

otrzymujemy $\frac{\Delta V_s}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t}$ dla $\Delta t \to 0$ $\frac{dV_s}{dt} = \omega \frac{dr}{dt}$ czyli $a_2 = V \cdot \omega$

a_1 i a_2 to wartości wektorów o tym samym kierunku-wzrastającego φ

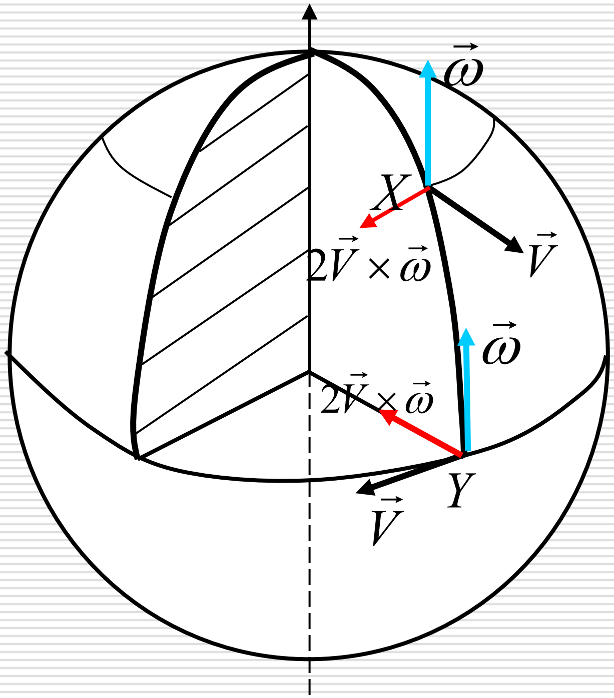
Całkowite przyspieszenie $a_C = a_1 + a_2 = 2V \cdot \omega$ $\leftarrow$ *przyspieszenie Coriolisa*

W układzie nieinercjalnym mrówka jest w stanie równowagi $\Rightarrow$

Tarcie działające na mrówkę ma dwie składowe:
radialną – równoważona przez siłę odśrodkową oraz
styczną (zgodną z kierunkiem obrotu płyty) – równoważoną przez siłę działającą stycznie, przeciwnie do kierunku obrotu płyty – *siłę Coriolisa – jest to SIŁA POZORNA działa w obracającym się układzie odniesienia!*

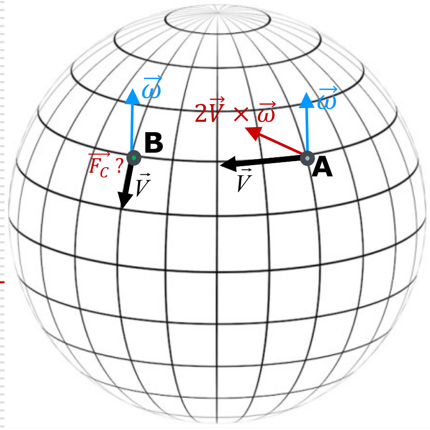
$$\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}}$$

*Ciało wyrzucone w punkcie X, na półkuli północnej, pionowo w górę z prędkością **V,** doznaje przyspieszenia Coriolisa stycznego do równoleżnika przechodzącego przez punkt X.*



Z kolei ciało poruszające się z prędkością styczną do równoleżnika przechodzącego przez punkt Y doznaje przyspieszenia Coriolisa skierowanego do środka Ziemi.

Siła Coriolisa - przykłady



Przykładowe zadania na siłę Coriolisa

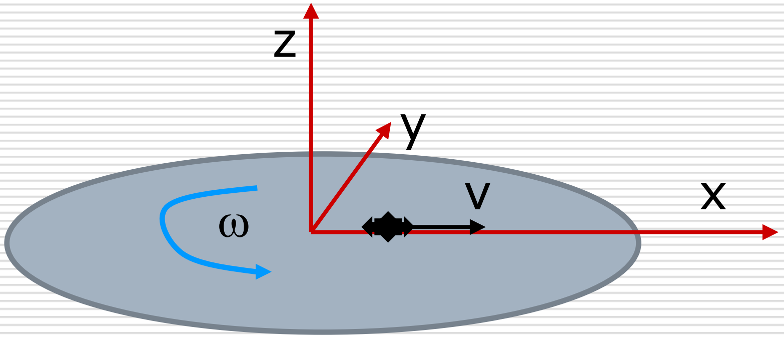
Dwaj myśliwi strzelali do tarcz strzelniczych. **A** strzelał do tarczy znajdującej się na zachód od niego, **B** do tarczy znajdującej się w kierunku południowym. Obydwaj spudłowali i tłumaczyli swoje niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa. Który z nich miał większe prawo tak się tłumaczyć – odchylenie którego pocisku pod wpływem siły Coriolisa było większe? Jak jest wielkość odchylenia pocisku, jeżeli średnia prędkość v_0= 300m/s, czas lotu t = 1s a szerokość geograficzna $\varphi = 49^0$.

ODP.: $\Delta x_A \approx$ 2,2 cm $\Delta x_B \approx$ 1,7 cm

Przykład 8:

Zapisz – w układzie nieinercjalnym, wektory wszystkich sił działających na mrówkę wędrującą po płycie gramofonowej z przykładu powyżej. Zapisz wektor wypadkowy tych sił.

- Siła grawitacji
- Siła reakcji
- Siła Coriolisa
- Siła odśrodkowa bezwładności
- Siła tarcia
- Siła boczna wywierana przez płytę na mrówkę.



$$\overrightarrow{F_w} = -mg\hat{k} + mg\hat{k} - 2\omega v m\hat{j} + mr\omega^2\hat{\imath} - mgf\hat{\imath} + F_s\hat{j} = 0$$

Podsumowanie

- Błędnym jest przekonanie, że do podtrzymania ruchu potrzebna jest siła (patrz zasada bezwładności – I zasada dynamiki Newtona)
- Pojęcia: ruch i spoczynek mają sens jedynie względem konkretnego układu odniesienia
- Zasady dynamiki obowiązują w układzie inercjalnym. W układach nieinercjalnych wprowadza się siły pozorne, aby móc nadal stosować zasady dynamiki
- Ziemia może być traktowana jak układ inercjalny, lecz są zjawiska, które mogą być wyjaśnione jedynie przy uwzględnieniu sił pozornych: odśrodkowej i Coriolisa

Dynamika układów o zmiennej masie

- Ruch pod wpływem stałej siły *F* pojazdu o rosnącej masie.
  (*m_0- masa początkowa)*

stały przyrost masy

$$\frac{dm}{dt} = \mu = const \qquad \Rightarrow \qquad m = m_0 + \mu \cdot t$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$F = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = \mu \cdot v + \left(m_0 + \mu \cdot t\right)\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt}$$

rozdzielamy zmienne:

$$F-\mu v=(m_0+\mu t)\frac{dv}{dt}\Rightarrow\frac{dv}{F-\mu v}=\frac{dt}{m_0+\mu t}$$ po scałkowaniu:

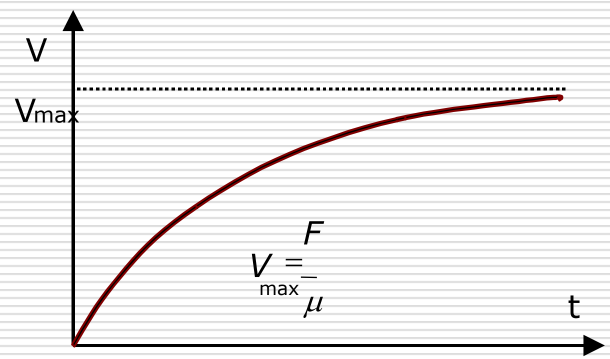
$$\int_0^v\frac{\mu dv}{F-\mu v}=\int_0^t\frac{\mu dt}{m_0+\mu t}\Rightarrow-\ln(F-\mu v)\Big|_0^v=\ln(m_0+\mu t)\Big|_0^t$$ podstawiając granice:

$$-\ln(F-\mu v)+\ln F=\ln(m_0+\mu t)-\ln m_0$$

$$\ln\frac{F}{F-\mu v}=\ln(\frac{m_0+\mu t}{m_0})\qquad\Rightarrow\qquad\frac{F}{F-\mu v}=\frac{m_0+\mu t}{m_0}$$

stąd ostatecznie:

$$v=\frac{Ft}{m_0+\mu t}\Rightarrow v=\frac{F}{\frac{m_0}{t}+\mu}\qquad\lim_{t\to\infty}v=\frac{F}{\mu}$$



Ruch pod wpływem stałej siły, ciała o malejącej masie

$$F = \frac{dp}{dt} + \mu v$$

siła odrzutu

$$F - \mu v = \frac{d(mv)}{dt} \Rightarrow F - \mu v = \frac{d(m_0 - \mu t)}{dt} v + m\frac{dv}{dt}$$

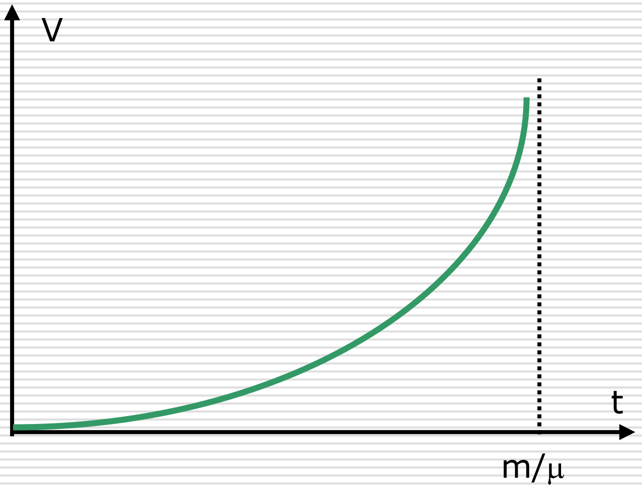
więc otrzymujemy

podobnie jak w poprzednim przypadku

$$F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow F = (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt}$$

ostatecznie:

$$v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$



Przykład 10:

- Rakieta o masie początkowej M_0 poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo w stałej ilości $dm_s/dt = r$ [kg/s], nadając mu względem rakiety prędkość U.

Zapisz zasadę zachowania pędu w nieruchomym układzie odniesienia (porusza się w nim rakieta). Przy zapisie końcowego wzoru pamiętając, że w porównaniu z masą M rakiety w dowolnej chwili dt ilość wyrzuconych gazów dm jest do zaniedbania.

Korzystając z zasady zachowania pędu:

a) Oblicz przyspieszenie początkowe rakiety.

b) Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą i jego rozwiązanie $V(M)$

c) Znajdź jego rozwiązanie zależne od czasu $V(t)$.