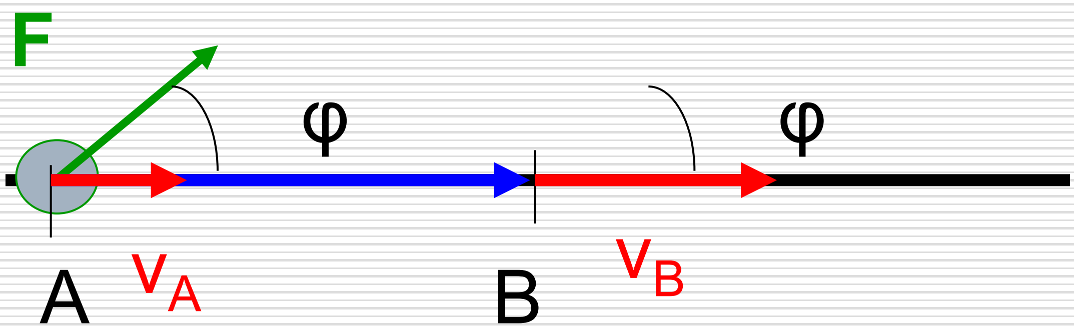
Wykład 5: Praca i energia

dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Energia a praca

- Energia jest to wielkość skalarna, określająca stan, w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. *Np. energia kinetyczna* jest związana ze stanem ruchu ciała.
- Praca jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana w wyniku działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna. Praca jest równa zmianie energii.
- Jednostką pracy i energii w układzie SI jest 1J.

Praca stałej siły



$$v_B > v_A$$

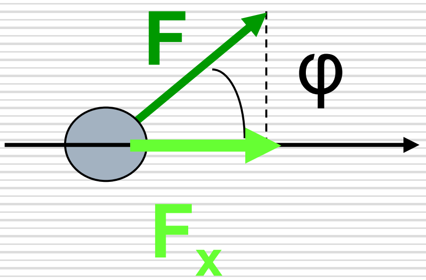
Wektor przesunięcia $\vec{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$

$$W = \vec{\mathbf{F}} \circ \vec{\mathbf{s}} = F\, s \cos\varphi$$

Wskutek wykonanej nad ciałem pracy wzrasta jego prędkość od v_A do v_B czyli rośnie energia kinetyczna

- Pracę wykonuje składowa x-owa siły F

$$W_{AB} = F_x \cdot s = m \cdot a_x \cdot s$$



$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{v_B - v_A}{t} \\ s &= v_A \cdot t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \qquad s = \frac{v_B + v_A}{2} t$$

zatem

$$W_{AB} = m \frac{v_B - v_A}{t} \cdot \frac{v_B + v_A}{2} t$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

ale $\quad p = m \cdot v$

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}}$$

Praca wykonana przez siłę nad cząstką swobodną jest równa zmianie energii kinetycznej cząstki

Przykład 1:

sin 15^0= 0,259
cos 15^0=0,966

Pianino o masie *M* (300 kg) zsuwa się ruchem jednostajnym po podjeździe o długości *L (5 m),* nachylonym pod kątem α (15^0). Pianino usiłuje zatrzymać człowiek działający siłą F_c skierowaną przeciwnie do kierunku ruchu, a współczynnik tarcia o podłoże wynosi μ (0,2). Obliczyć:

a. Siłę z jaką działa człowiek, $F_S = 777N$ $T = 579{,}6N$ $F_C = 197{,}4N$

b. Wartość pracy wykonanej przez człowieka, $-987\ J$

c. Pracę siły tarcia, $-2898\ J$

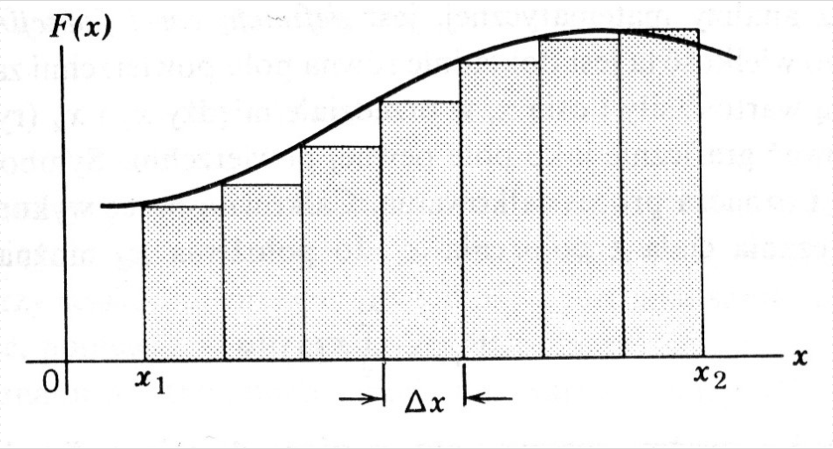
d. Pracę siły grawitacji, $+3885\ J$

e. Całkowitą pracę wykonaną w układzie $\mathbf{0\ J}$

Praca zmiennej siły

Założmy, że siła F zależy od położenia x czyli F(x)

Dzielimy przedział <x_1, x_2> na odcinki Δx, na których można przyjąć, że siła jest stała.



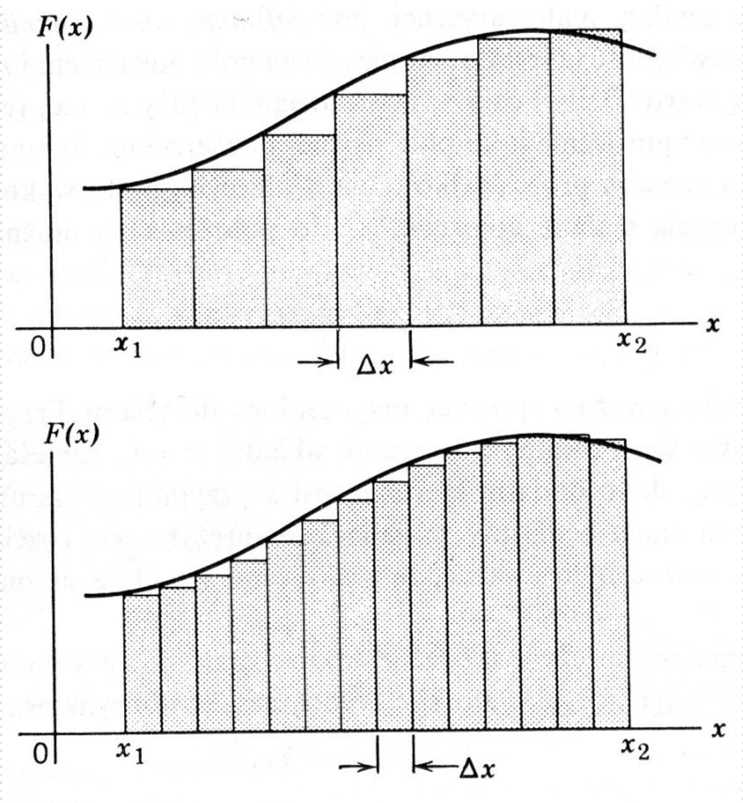
Obliczamy pracę ΔW wykonaną przez siłę stałą na odcinku Δ x

$$\Delta W = F\,\Delta x$$

Sumując otrzymamy $$W = \sum_{x_1}^{x_2} F\Delta x$$

$$W = \sum_{x_1}^{x_2} F\Delta x$$

Gdy $\Delta x \to 0$ $\qquad W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$



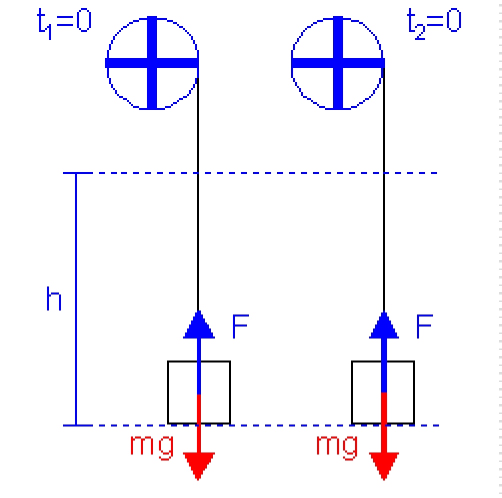
W ogólnym przypadku: $\qquad W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$

skoro $\qquad \vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \Rightarrow \quad d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}} dt$

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{\mathbf{F}} \circ \vec{\mathbf{v}} dt$$

Moc jest definiowana jako : $\mathbf{P = dW/dt}$

więc $\qquad W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P dt \quad \Rightarrow \quad P = \vec{\mathbf{F}} \circ \vec{\mathbf{v}}$



Często ważne jest nie ile pracy, ale jak szybko będzie ona wykonana!

Przykład 2:

Elektrowóz rozwija moc P = 1800 kW i ciągnie po poziomym torze skład wagonów o łącznej masie m = 2000 ton. Współczynnik tarcia kół o szyny wynosi $\mu = 0{,}005$. Oblicz:

a) Maksymalną szybkość pociągu;

b) Przyspieszenie pociągu w chwili, gdy porusza się z szybkością V_1= 4 m/s.

Rozwiązanie

a) Warunek osiągnięcia maksymalnej szybkości?

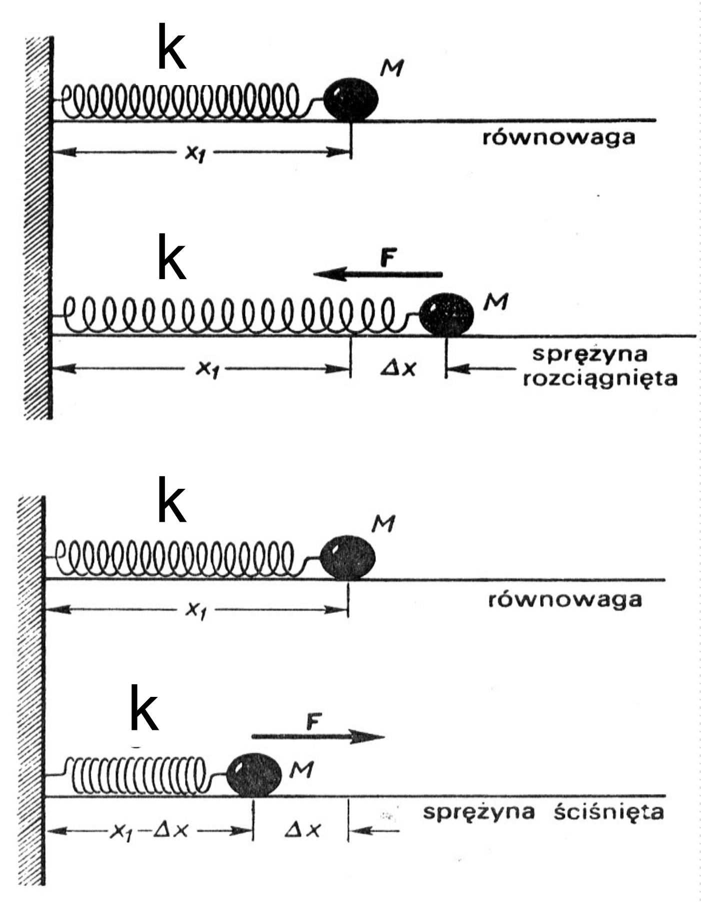
$$P = F_T \cdot V_{max}$$

$$V_{max} = \frac{P}{mg\mu} = 18{,}3\ m/s$$

b) II zas. dyn. Newtona $\Rightarrow$ $a = \frac{F_w}{m} = \frac{F - T}{m}$ $\qquad F = \frac{P}{V_1}$

$$a = \frac{P}{mV_1} - g\mu = 0{,}17\ m/s^2$$

Energia potencjalna – nie tylko grawitacyjna



Praca siły zależnej od położenia – siły harmonicznej

$$\vec{F} = F\hat{\imath} \qquad \vec{x} = x\hat{\imath}$$

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$F\hat{\imath} = -kx\hat{\imath} \Rightarrow F = -kx$$

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx$$

$$W = -k\int_{x_1}^{x_2} x dx = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2}$$

$$W = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

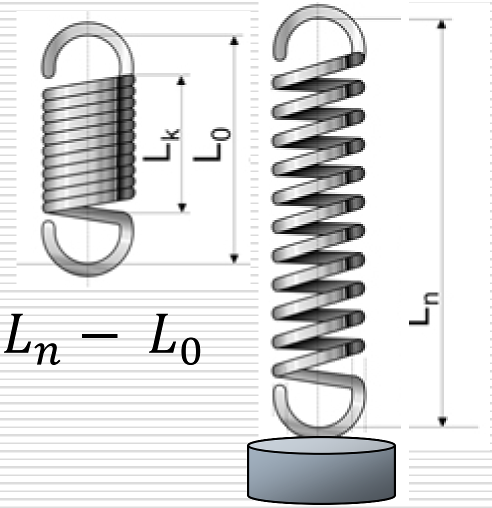
skoro

$$W = -\Delta E_p \Rightarrow \quad E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencjalna sprężystości

W – praca wykonana przez siłę sprężystości

Problem z energią potencjalną sprężystości ?



$x = L_n - L_0$

Powieszenie masy *m* wydłużyło sprężynę o *x*

Energia potencjalna rozciągniętej sprężyny:

$E_s = \frac{1}{2}kx^2$ kosztem: $E_p = mgx \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgx \Rightarrow \frac{1}{2}kx = mg$$

Warunek równowagi: $kx = mg$ **??**

Stan równowagi – po wygaśnięciu drgań – uzupełnienie zasady zachowania energii:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgx + Q$$

Ile energii traci sprężyna - połowę !!

Energia potencjalna

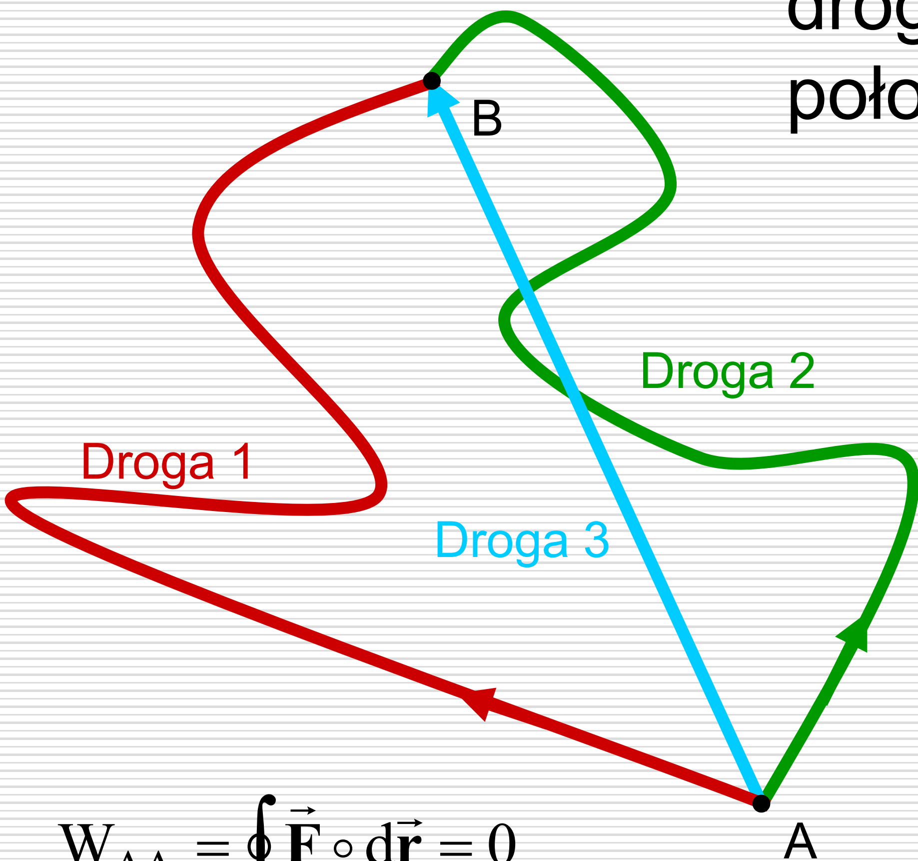
Energia potencjalna E_p jest to energia związana z konfiguracją układu ciał, działających na siebie siłami.

Aby móc wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, pole sił musi mieć określoną własność - taką, że praca wykonana w tym polu nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zachodzi przemieszczenie

Takie pola i siły nazywamy **zachowawczymi**

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi lecz zależy jedynie od położeń punktów A i B.

$$W_{AB}^{droga1} = W_{AB}^{droga2} = W_{AB}^{droga3}$$



Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po drodze zamkniętej jest równa zeru

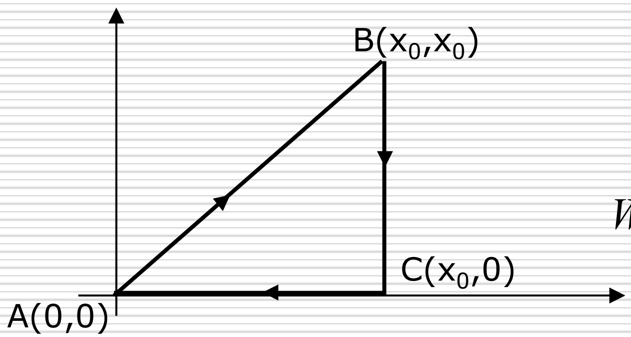
$$W_{AA} = \oint_L \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}} = 0$$

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = 0$$

Przykład 3:

Dane jest pole wektorowe o składowych $F_x = Ky$; $F_y = Kx$; $F_z = 0$; gdzie K jest stałą. Sprawdzić czy to pole jest zachowawcze obliczając pracę po konturze trójkątnym o bokach $y = x$; $y = 0$; $x = x_0$.

Rozwiązanie



$$\vec{F} = Ky\hat{i} + Kx\hat{j}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$W = \oint \vec{F} \circ d\hat{r} = \int_A^B \vec{F} \circ d\hat{r} + \int_B^C \vec{F} \circ d\hat{r} + \int_C^A \vec{F} \circ d\hat{r}$$

$$\vec{F} \circ d\vec{r} = F_x dx + F_y dy = Kydx + Kxdy$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = \underbrace{\int_0^{x_0} Kydx}_{y=x} + \underbrace{\int_0^{y_0=x_0} Kxdy}_{x=y} = \ldots\ldots \quad = Kx_0^2$$

$$W_{AA} = \sum W_i = \cdots \quad = 0$$

ISTOTNE SIŁY RZECZYWISTE

Siły centralne: $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$

- Siła ciężkości (siła grawitacji) $\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = -\mathrm{G}\dfrac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathbf{r}}$
- Siła oddziaływania elektrostatycznego (siła kulombowska) $\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{Qq}}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathbf{r}}$

są siłami zachowawczymi

- Siła tarcia NIE JEST siłą zachowawczą !

Jak obliczać energię potencjalną?

Z definicji $$E_p(B) - E_p(A) = W(A \rightarrow B)$$

Wartość energii potencjalnej w punkcie opisanym wektorem **r** jest określona z dokładnością do stałej - równej $E_p(A)$, którą można obrać umownie.

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) = E_p(A) - \int_A^r \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) =$$

Sens fizyczny ma jedynie różnica energii potencjalnej pomiędzy dwoma punktami.

Umowa: A leży w nieskończoności czyli $E_p(\infty)=0$

Jak obliczać energię potencjalną grawitacji?

$$W_{\infty \to r} = E_p(r)$$

Aby ciało o masie *m* uzyskało energię potencjalną, przesuwamy je z ∞ do położenia opisanego wektorem **r**.

pracę wykonuje siła zewnętrzna aby E_{kin}=0 $\quad \overrightarrow{F_z} = -\overrightarrow{F_g}$ gdzie

$$\vec{\mathbf{F}}_g = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{lub} \qquad \vec{\mathbf{F}}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

$$W_z = \int \overrightarrow{F_z} \circ \overrightarrow{dr} = \int_{\infty}^{r} G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\frac{1}{r}\Big]_{\infty}^{r} = \boxed{-G\frac{Mm}{r} = E_p(r)}$$

Siła zachowawcza	Energia potencjalna	układ:
$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{m}\vec{\mathbf{g}} = -mg\hat{x}$	$E_p(x) = mgx$	masa m - Ziemia
$\vec{\mathbf{F}}(r) = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = -G\dfrac{Mm}{r}$	masa m – masa M
$\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{Qq}}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = \pm\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$	ładunek q – ładunek Q
$\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = -\mathrm{kr}\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = \dfrac{1}{2}kr^2$	masa m – sprężyna k

Związek pomiędzy siłą a energią potencjalną

Przypadek jednowymiarowy

$$E_p(x) = -\int_{\infty}^{x} F_x \, dx \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Uogólnienie na 3D

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$ stąd $\vec{\mathbf{F}} = \ldots ?$

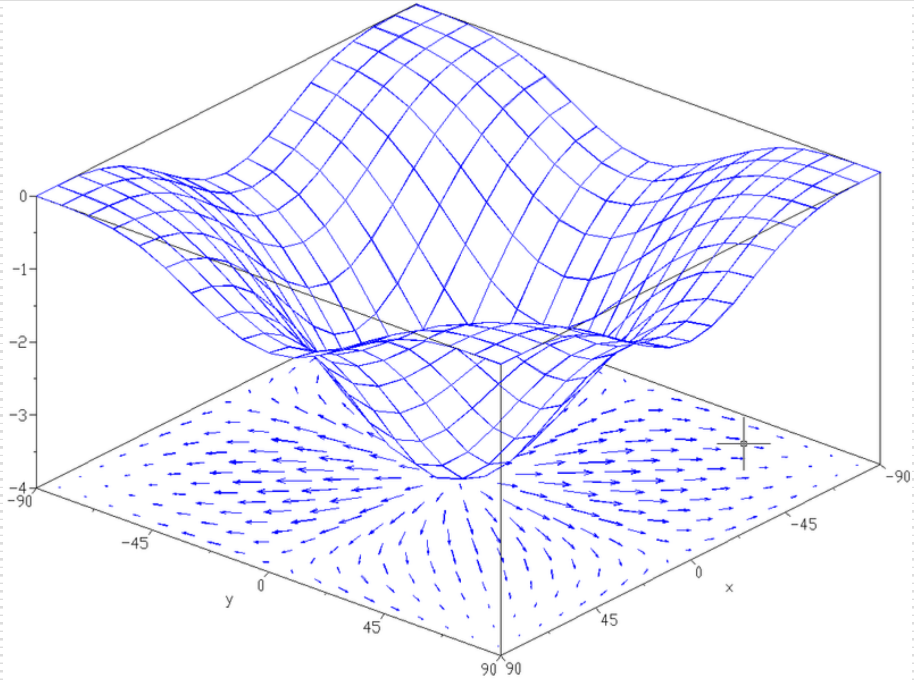
$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = -\nabla E_p \quad = -\mathbf{grad}\, E_p$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$ operator „nabla”

zatem:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{grad}\ E_p =$$

$$-k(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -k\vec{\mathbf{r}}$$



UWAGA! Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej przez siły układu.

Przykład – siła sprężystości

Energia potencjalna układu masa-sprężyna dana jest wzorem:

$$E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Korzystając z zależności $\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{grad}\, E_p$ wyprowadzić wzór na siłę sprężystości.

Rozwiązanie:

$$E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}E_p(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)\right) = kx \\ \dfrac{\partial}{\partial y}E_p = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)\right) = ky \\ \dfrac{\partial}{\partial z}E_p = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)\right) = kz \end{cases}$$

$$\mathbf{grad}\, E_p = kx\,\hat{\mathbf{i}} + ky\,\hat{\mathbf{j}} + kz\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{grad}\, E_p = -k(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -k\vec{\mathbf{r}}$$

Zasada zachowania energii

W układzie izolowanym, w którym zmiany energii pochodzą jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna E_{mech} nie może ulegać zmianie.

$$0 = \Delta E_k + \Delta E_p \quad \rightarrow \quad 0 = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1}$$

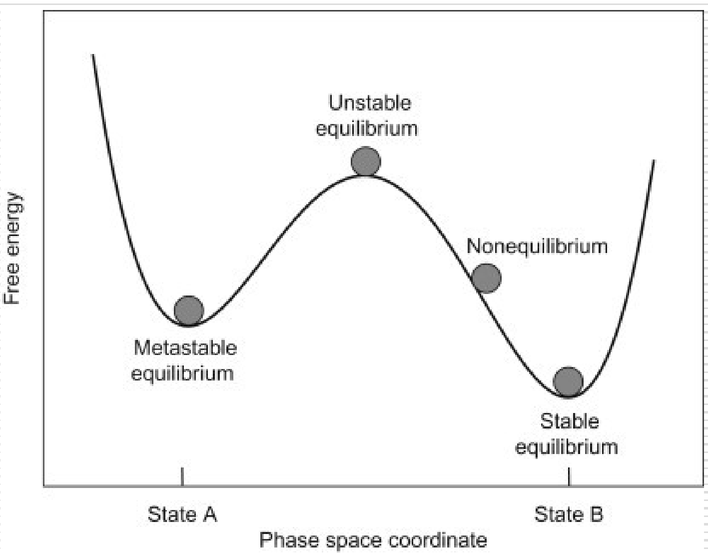
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$

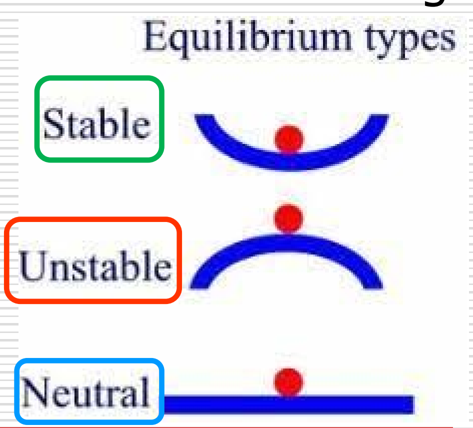
Energia a stan równowagi

Stan układu mechanicznego, w którym wszystkie jego punkty pozostają w spoczynku względem wybranego układu odniesienia.

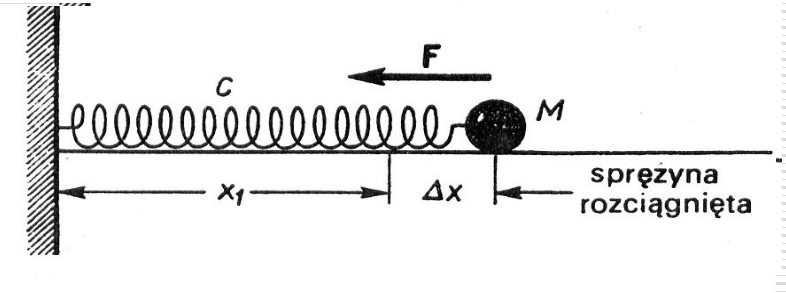
$\Rightarrow F_{wyp} = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$



Dla układu zachowawczego w stanie równowagi trwałej energia potencjalna układu osiąga minimum, w stanie równowagi nietrwałej osiąga maksimum lub punkt przegięcia (równowaga chwiejna), może też być stała w otoczeniu położenia równowagi (równowaga obojętna).



Zastosowanie zasady zachowania energii dla oscylatora harmonicznego



$$E_k = m\frac{v^2}{2} \qquad E_p = k\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2} + k\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\cancel{v}\frac{dv}{dt} + \frac{k}{\cancel{2}}\cancel{2}x\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dt}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$$

równanie oscylatora harmonicznego

Przykład 4:

Karabin snajperski Barett 82A1 o długości lufy 503 mm, strzela pociskami o masie 51 g na skuteczną odległość 2 km. Prędkość wylotowa pocisku wynosi $V_w = 854$ m/s

Obliczyć:
- średnią siłę gazów wylotowych oraz
- średnią moc rozwijaną przez

gazy w lufie karabinu w trakcie wystrzału pocisku.

Podsumowanie

- Istnieje ścisły związek pomiędzy pracą a energią
- O energii potencjalnej układu można mówić tylko dla sił zachowawczych
- Zasada zachowania energii mechanicznej pozwala rozwiązywać zagadnienia, które są trudne lub niemożliwe do rozwiązania na gruncie zasad dynamiki
- Całkowita energia jest wielkością stałą. Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona

$$\boxed{W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wew}}$$

Przykład 5:

Kolarz o masie 80 kg chce wyjechać na wzgórze o wysokości h =100 m, prostą drogą nachyloną pod kątem 10^0. Jeden obrót pedałów poruszających się po okręgu o średnicy *D* = 36 cm powoduje przemieszczenie roweru o odcinek *S* = 5,1 m. Zaniedbując straty energii oblicz:

a) Wartość pracy jaka wykona kolarz,
b) Siłę z jaką kolarz naciska na pedały.

Rozwiązanie:

Ad a) $W = \Delta E_p = mgh = 80 \cdot 9{,}81 \cdot 100\ [J] = 78{,}5\ [kJ]$

Ad b) Praca podczas jednego obrotu pedałami: $W_1 = F \cdot \pi \cdot D$

powoduje zmianę energii potencjalnej o

$\Delta E_p = mgS \cdot \sin 10^0 = 4002{,}5 \cdot 0{,}174 = 696{,}4\ [J]$

stąd $F\pi D = \Delta E_p \Rightarrow F = \frac{696{,}4}{3{,}14 \cdot 0{,}36} = 616{,}1\ [N]$

Zadanie domowe

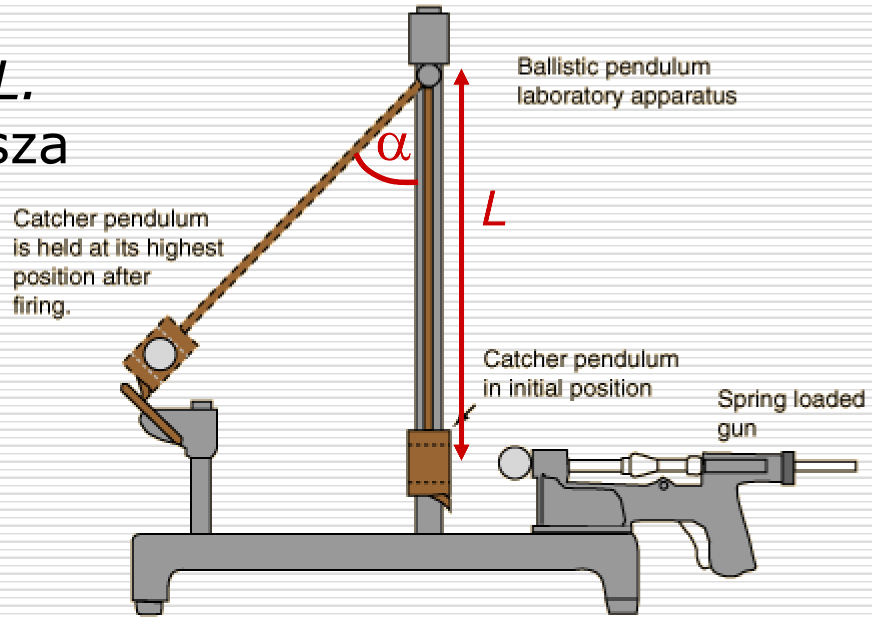
Oddziaływania jądrowe między dwoma neutronami w jądrze atomowym opisuje tzw. *potencjał Yukawy:* $U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}$ gdzie *r* – odległość między neutronami, U_0 i r_0 to stałe.

- Obliczyć siłę $F_j(r)$ oddziaływania neutronów.
- Obliczyć stosunek $F_j(3r_0)/F_j(r_0)$.
- Oddziaływania dwóch naładowanych cząsteczek opisuje potencjał $U(r) = -\frac{C}{r}$ gdzie *C* to stała. Obliczyć taki sam stosunek sił elektrycznych $F_e(3r_0)/F_e(r_0)$ dla oddziaływań elektrycznych cząsteczek.
- Na podstawie obliczonych stosunków wyciągnij wnioski z porównania sił jądrowych i elektrycznych.

Przykład 6:

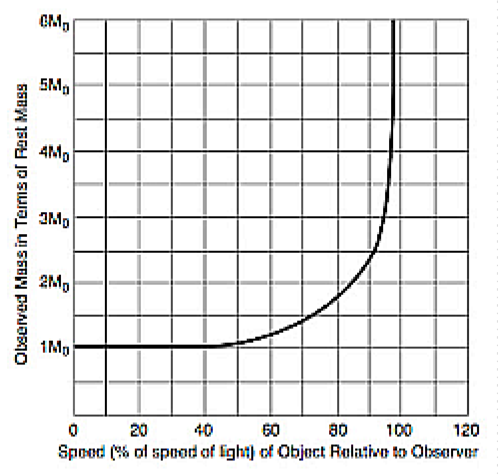
Wahadło balistyczne

Pocisk wystrzelony z szybkością V_0 wbija się w masywną tarczę zawieszoną na linie o długości *L*. Masa tarczy jest *n* – razy większa od masy pocisku.
Lina z zawieszona tarczą po trafieniu przez pocisk odchyla się o kąt α.
Obliczyć początkową szybkość pocisku.



Energia relatywistyczna

- Lukrecjusz (99 p.n.e.-55 p.n.e.) *„De Rerum Natura"* – „Rzeczy nie mogą powstawać z niczego, a gdy zostały stworzone, nie mogą zamienić się w nicość" – pierwsze sformułowanie *ZASADY ZACHOWANIA MATERII.*
- Lavoisier (1743-1794) zasada zachowania masy
- Einstein (1915r) „Teoria względności połączyła w jedną zasadę: zasadę zachowania masy i zasadę zachowania energii".



- Masa relatywistyczna

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

- $m_0 \to m$ zatem energia kinetyczna:

$$\cancel{E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2} \qquad E_k = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2 = \Delta m \cdot c^2$$

dla małych prędkości, gdy $\beta = v/c << 1$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

- Zasada równoważności masy i energii:
Każda ilość dostarczonej energii powoduje wzrost masy ciała.

$$\boxed{\Delta m = \frac{E}{c^2}}$$

- Przykład:
powstawanie deuteronu (jądra deuteru)

$${}^1_1p + {}^1_0n \to {}^2_1H$$

$m_p = 1{,}00731\ u$
$m_n = 1{,}00867\ u$ $\Rightarrow$ $\Delta m = (m_p + m_n) - m_d$
$m_d = 2{,}01360\ u$

$\Delta m = 0{,}00238\ u \Leftrightarrow E = 2{,}225 \cdot 10^6\ eV$

$E = 2{,}225 \cdot 10^6\ eV$

Taka energia wyzwala się jako kwant γ - energia wiązania.

- Energia całkowita = en. spoczynkowa + en. kinetyczna

$$\gamma \cdot m_0 c^2 \quad = \quad m_0 c^2 \quad + \quad E_k$$

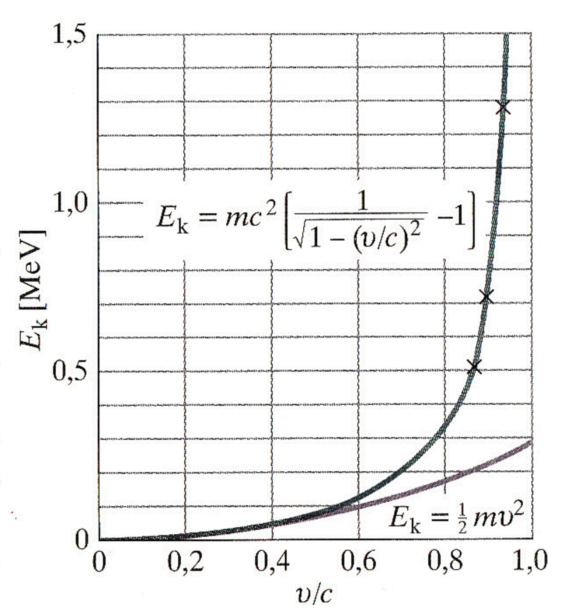
stąd $$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

- Energia a pęd

nierelatywistycznie: $$p^2 = 2E_k \cdot m_0$$

relatywistycznie $$(p \cdot c)^2 = E_k^2 + 2E_k m_0 c^2$$

stąd $$\boxed{E^2 = (p \cdot c)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2}$$



HRW, t4