

# Wykład 6: Praca i energia

---

dr inż. Zbigniew Szklarski

[szkla@agh.edu.pl](mailto:szkla@agh.edu.pl)

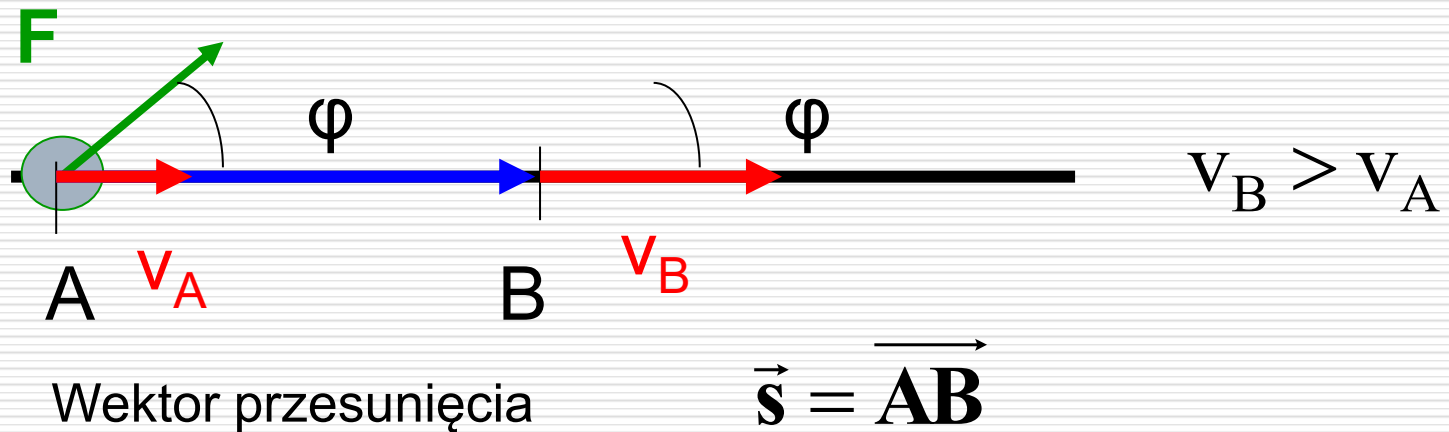
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

# Energia a praca

---

- Energia jest to wielkość skalarna, określająca stan, w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. *Np. energia kinetyczna* jest związana ze stanem ruchu ciała.
- Praca jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana w wyniku działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna. Praca jest równa zmianie energii.
- Jednostką pracy i energii w układzie SI jest 1J.

# Praca stałej siły



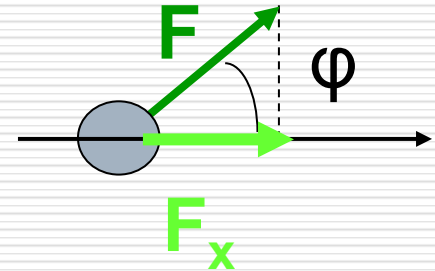
$$W = \vec{F} \circ \vec{s} = F s \cos \varphi$$

Wskutek wykonanej nad ciałem pracy wzrasta jego prędkość od  $v_A$  do  $v_B$  czyli rośnie energia kinetyczna

□ Pracę wykonuje składowa x-owa siły F

$$W_{AB} = F_x \cdot s = m \cdot a_x \cdot s$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{v_B - v_A}{t} \\ s &= v_A \cdot t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{v_B + v_A}{2} t \quad \text{zatem}$$



$$W_{AB} = m \frac{v_B - v_A}{t} \cdot \frac{v_B + v_A}{2} t$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

ale  $p = m \cdot v$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Praca wykonana przez siłę nad cząstką swobodną jest równa zmianie energii kinetycznej cząstki

# Przykład 1:

$$\sin 15^\circ = 0,259$$
$$\cos 15^\circ = 0,966$$

Pianino o masie  $M$  (300 kg) zsuwa się ruchem jednostajnym po podjeździe o długości  $L$  (5 m), nachylonym pod kątem  $\alpha$  ( $15^\circ$ ). Pianino usiłuje zatrzymać człowiek działający siłą  $F_c$  skierowaną przeciwnie do kierunku ruchu, a współczynnik tarcia o podłoże wynosi  $\mu$  (0,2). Obliczyć:

- a. Siłę z jaką działa człowiek,  $F_S = 777N$   $T = 579,6N$   $F_C = 197,4N$
- b. Wartość pracy wykonanej przez człowieka,  $-987 J$
- c. Pracę siły tarcia,  $-2898 J$
- d. Pracę siły grawitacji,  $+3885 J$
- e. Całkowitą pracę wykonaną w układzie  **$0J$**

## Przykład 2:

---

Elektrowóz rozwija moc  $P = 1800$  kW i ciągnie po poziomym torze skład wagonów o łącznej masie  $m = 2000$  ton. Współczynnik tarcia kół o szyny wynosi  $\mu = 0,005$ . Oblicz:

- Maksymalną szybkość pociągu;
- Przyspieszenie pociągu w chwili, gdy porusza się z szybkością  $V_1 = 4$  m/s.

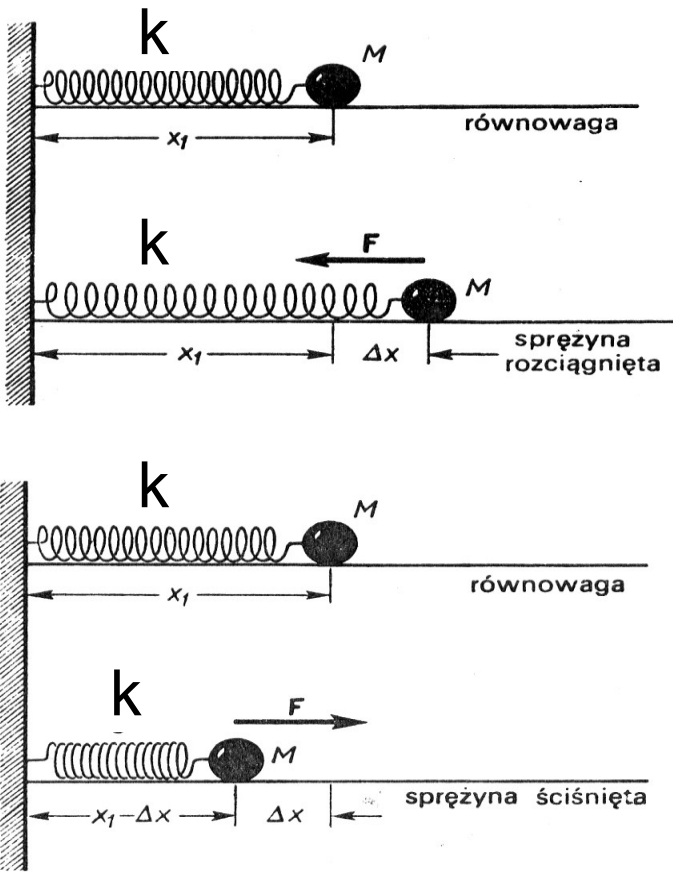
### Rozwiązanie

- a) Warunek osiągnięcia maksymalnej szybkości?

$$P = F \cdot V$$
$$V_{max} = \frac{P}{mg\mu} = 18,3 \text{ m/s}$$

- b) II zas. dyn. Newtona  $\Rightarrow$   $a = \frac{P}{mV_1} - g\mu = 0,17 \text{ m/s}^2$

# Energia potencjalna – nie tylko grawitacyjna



Praca siły zależnej od położenia – siły harmonicznego

$$\vec{F} = F\hat{i} \quad \vec{x} = x\hat{i}$$

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$F\hat{i} = -kx\hat{i} \Rightarrow F = -kx$$

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx$$

$$W = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$W = \frac{k}{2} (x_1^2 - x_2^2)$$

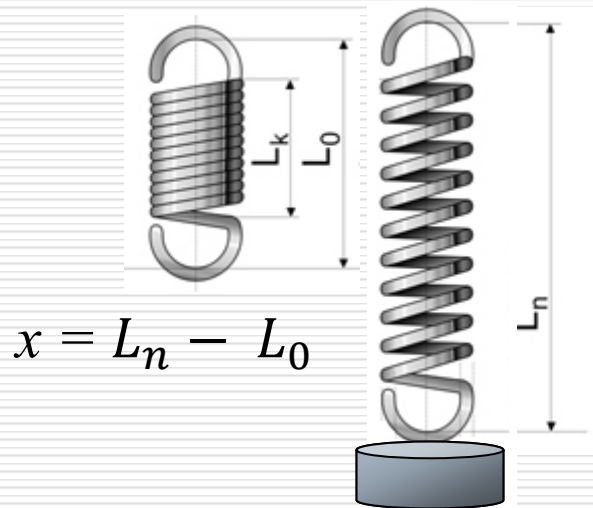
skoro

$$W = -\Delta E_p \Rightarrow E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencjalna sprężystości

$W$  – praca wykonana przez siłę sprężystości

# Problem z energią potencjalną sprężystości ?



Powieszenie masy  $m$  wydłużyło sprężynę o  $x$   
Energia potencjalna rozciągniętej sprężyny:

$$E_s = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{kosztem:} \quad E_p = mgx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgx \Rightarrow \frac{1}{2} kx = mg$$

Warunek równowagi:

$$kx = mg$$

??

Stan równowagi – po wygaśnięciu drgań

– uzupełnienie zasady  
zachowania energii:

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgx + Q$$

Ile energii traci

sprężyna - **połowę !!**



# Energia potencjalna

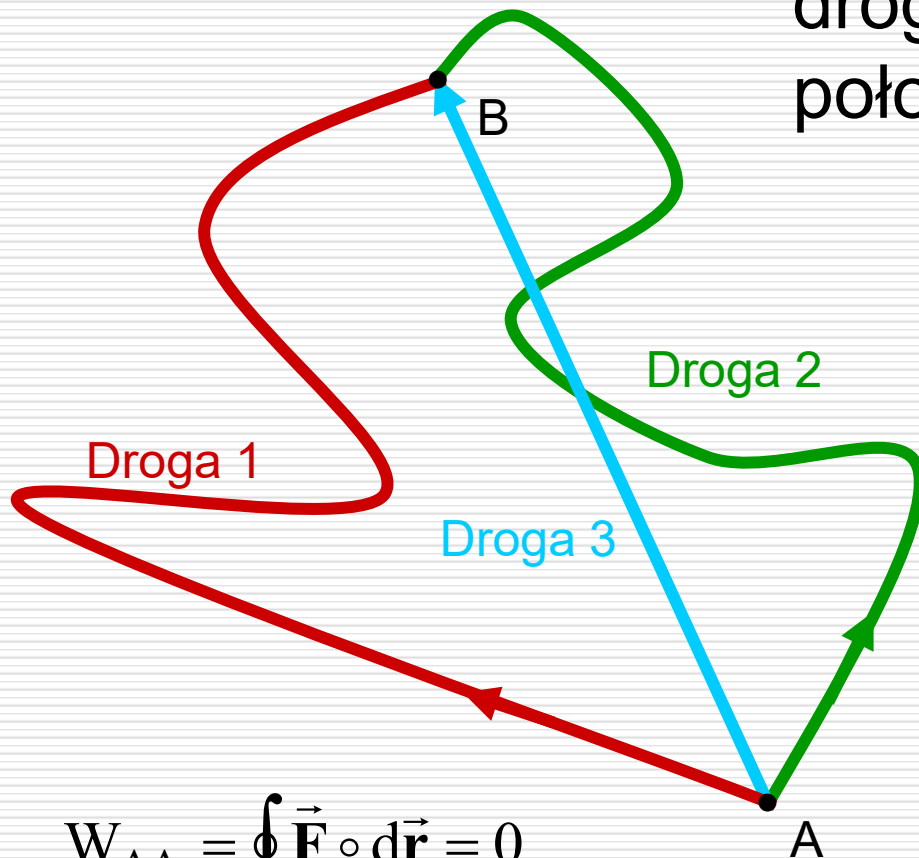
---

Energia potencjalna  $E_p$  jest to energia związana z konfiguracją układu ciał, działających na siebie siłami.

Aby móc wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, pole sił musi mieć określoną własność - taką, że praca wykonana w tym polu nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zachodzi przemieszczenie

Takie pola i siły nazywamy **zachowawczymi**

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi lecz zależy jedynie od położenia punktów A i B.



$$W_{AB}^{\text{droga1}} = W_{AB}^{\text{droga2}} = W_{AB}^{\text{droga3}}$$

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po drodze zamkniętej jest równa zero

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = 0$$

$$W_{AA} = \oint_L \vec{F} \circ d\vec{r} = 0$$

# Przykład 3:

Dane jest pole wektorowe o składowych  $F_x = Ky$ ;  $F_y = Kx$ ;  $F_z = 0$ ; gdzie  $K$  jest stałą. Sprawdzić czy to pole jest zachowawcze obliczając pracę po konturze trójkątnym o bokach  $y = x$ ;  $y = 0$ ;

$x = x_0$ .

**Rozwiązanie**

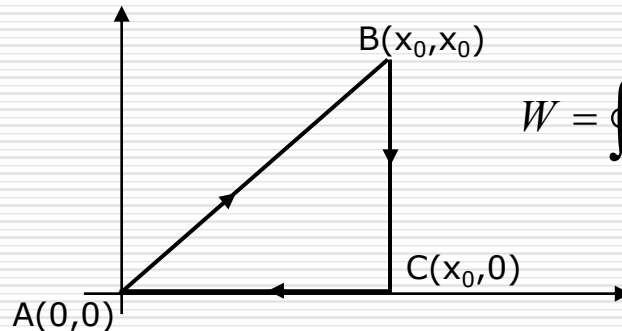
$$\vec{F} = Ky\hat{i} + Kx\hat{j}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{F} \circ d\vec{r} = F_x dx + F_y dy = Kydx + Kxdy$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = \underbrace{\int_0^{x_0} Kydx}_{y=x} + \underbrace{\int_0^{y_0=x_0} Kxdy}_{x=y} = \dots = Kx_0^2$$

$$W_{AA} = \sum W_i = \dots = 0$$



$$W = \oint \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_C^A \vec{F} \circ d\vec{r}$$

# ISTOTNE SIŁY RZECZYWISTE

Siły centralne:  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

□ Siła ciężkości (siła grawitacji)  $\vec{F}(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$

□ Siła oddziaływania elektrostatycznego (siła kulombowska)  $\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

są **siłami zachowawczymi**

□ Siła tarcia **NIE JEST siłą zachowawczą!**

# Jak obliczać energię potencjalną?

---

Z definicji  $E_p(B) - E_p(A) = W(A \rightarrow B)$

Wartość energii potencjalnej w punkcie opisanym wektorem  $\mathbf{r}$  jest określona z dokładnością do stałej - równej  $E_p(A)$ , którą można obrać umownie.

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) = E_p(A) - \int_A^{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) =$$

Sens fizyczny ma jedynie różnica energii potencjalnej pomiędzy dwoma punktami.

*Umowa: A leży w nieskończoności czyli  $E_p(\infty) = 0$*

# Jak obliczać energię potencjalną grawitacji?



$$W_{\infty \rightarrow r} = E_p(r)$$

Aby ciało o masie  $m$  uzyskało energię potencjalną, przesuujemy je z  $\infty$  do położenia opisanego wektorem  $\mathbf{r}$ .

pracę wykonuje siła zewnętrzna aby  $E_{\text{kin}}=0$   $\vec{F}_Z = -\vec{F}_g$  gdzie

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad \text{lub} \quad \vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

$$W_Z = \int \vec{F}_Z \circ d\vec{r} = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = -GMm \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r} = E_p(r)$$

Siła zachowawcza

Energia potencjalna

układ:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{x}$$

$$E_p(x) = mgx$$

masa m - Ziemia

$$\vec{F}(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

masa m – masa M

$$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

$$E_p(r) = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

ładunek q –  
ładunek Q

$$\vec{F}(r) = -kr\hat{r}$$

$$E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2$$

masa m – sprężyna k

# Związek pomiędzy siłą a energią potencjalną

---

Przypadek jednowymiarowy

$$E_p(x) = -\int_{\infty}^x F_x dx \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Uogólnienie na 3D

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \circ d\vec{r} \qquad \text{stąd } \vec{F} = \dots?$$

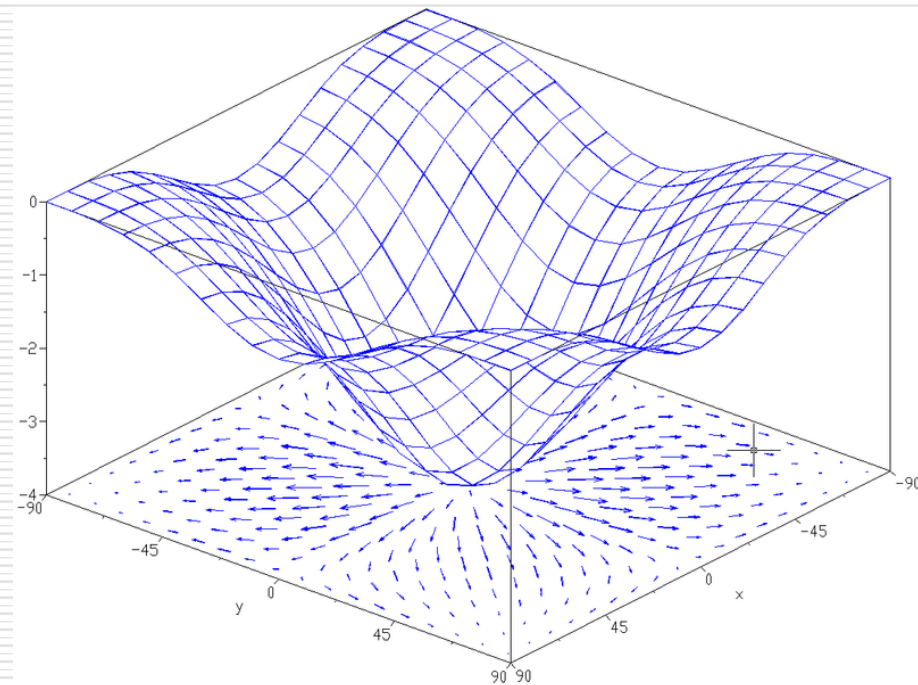
$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k} = -\nabla E_p = -\mathbf{grad} E_p$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \qquad \text{operator „nabla”}$$



Zatem gradient funkcji skalarnej wyznacza kierunek najszybszej zmiany tej funkcji:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}E_p}$$



---

UWAGA! Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej przez siły układu.

# Przykład 4: – siła sprężystości

Energia potencjalna układu masa-sprężyna dana jest wzorem:

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kr^2$$

Korzystając z zależności  $\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{grad} E_p$  wyprowadzić wzór na siłę sprężystości.

**Rozwiązanie:**

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\mathbf{grad} E_p = kx \hat{\mathbf{i}} + ky \hat{\mathbf{j}} + kz \hat{\mathbf{k}}$$



$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{grad} E_p = -k(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -k\vec{\mathbf{r}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} E_p(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right) = kx \\ \frac{\partial}{\partial y} E_p = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right) = ky \\ \frac{\partial}{\partial z} E_p = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right) = kz \end{array} \right.$$

# Zadanie domowe

$$\frac{F_j(3r_0)}{F_j(r_0)} = 0,03 \quad \frac{F_e(3r_0)}{F_e(r_0)} = 0,11$$

Oddziaływania jądrowe między dwoma neutronami w jądrze atomowym opisuje tzw. *potencjał Yukawy*:  $U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}$  gdzie  $r$  – odległość między neutronami,  $U_0$  i  $r_0$  to stałe.

- Obliczyć siłę  $F_j(r)$  oddziaływania neutronów.
- Obliczyć stosunek  $F_j(3r_0)/F_j(r_0)$ .
- Oddziaływania dwóch naładowanych cząsteczek opisuje potencjał  $U(r) = -\frac{C}{r}$  gdzie  $C$  to stała. Obliczyć taki sam stosunek sił elektrycznych  $F_e(3r_0)/F_e(r_0)$  dla oddziaływań elektrycznych cząsteczek.
- Na podstawie obliczonych stosunków wyciągnij wnioski z porównania sił jądrowych i elektrycznych.

# Zasada zachowania energii

---

W układzie izolowanym, w którym zmiany energii pochodzą jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  nie może ulegać zmianie.

$$0 = \Delta E_k + \Delta E_p \quad \rightarrow \quad 0 = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = \text{const}$$

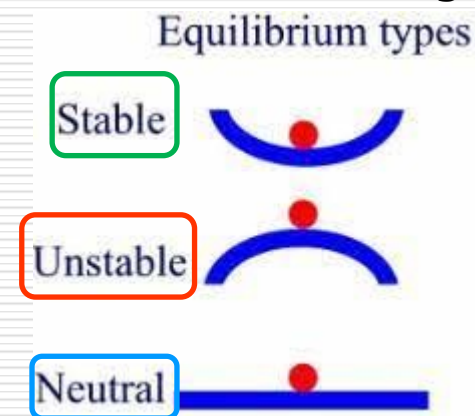
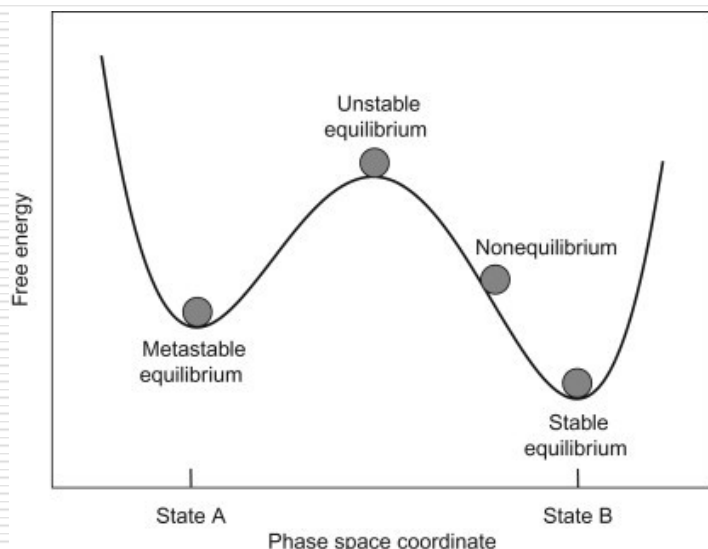
$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$

# Energia a stan równowagi

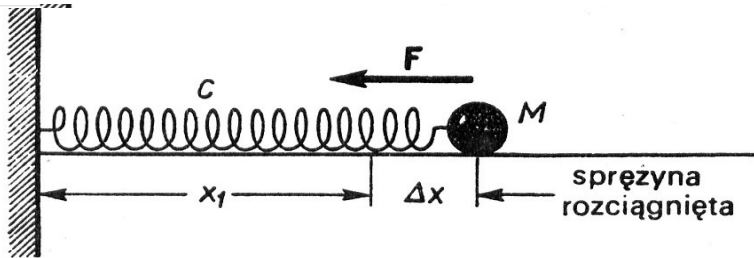
Stan układu mechanicznego, w którym wszystkie jego punkty pozostają w spoczynku względem wybranego układu odniesienia.

$$\Rightarrow F_{\text{wyp}} = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$$

Dla układu zachowawczego w **stanie równowagi trwałej** energia potencjalna układu osiąga minimum, w **stanie równowagi nietrwałej** osiąga maksimum lub punkt przegięcia (równowaga chwiejna), może też być stała w otoczeniu położenia równowagi (**równowaga obojętna**).



# Zastosowanie zasady zachowania energii dla oscylatora harmonicznego



$$E_k = m \frac{v^2}{2}$$

$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{v^2}{2} + k \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0$$

$$\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{2} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

równanie oscylatora harmonicznego

# Przykład 5:

Odp.:  $\bar{F} \approx 37 \text{ kN}$

$\bar{P} \approx 15,8 \text{ MW} !!$

Karabin snajperski Barrett 82A1 o długości lufy 503 mm, strzela pociskami o masie 51 g na skuteczną odległość 2 km. Prędkość wylotowa pocisku wynosi  $V_w = 854 \text{ m/s}$

Obliczyć:

- średnią siłę gazów wylotowych oraz
- średnią moc rozwijaną przez gazy w lufie karabinu w trakcie wystrzału pocisku.



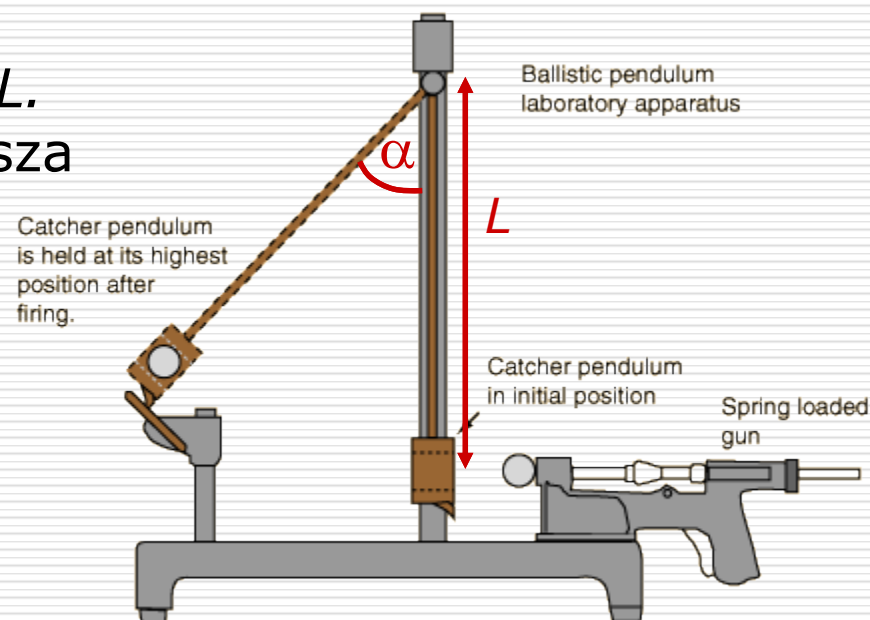
# Przykład 6:

## Wahadło balistyczne

Pocisk wystrzelony z szybkością  $V_0$  wbija się w masywną tarczę zawieszoną na linie o długości  $L$ . Masa tarczy jest  $n$  – razy większa od masy pocisku.

Lina z zawieszoną tarczą po trafieniu przez pocisk odchyła się o kąt  $\alpha$ .

Obliczyć początkową szybkość pocisku.





# Podsumowanie

---

- Istnieje ścisły związek pomiędzy pracą a energią
- O energii potencjalnej układu można mówić tylko dla sił zachowawczych
- Zasada zachowania energii mechanicznej pozwala rozwiązywać zagadnienia, które są trudne lub niemożliwe do rozwiązania na gruncie zasad dynamiki
- Całkowita energia jest wielkością stałą. Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wew}}$$

## Przykład 7:

Kolarz o masie 80 kg chce wyjechać na wzgórze o wysokości  $h = 100$  m, prostą drogą nachyloną pod kątem  $10^\circ$ . Jeden obrót pedałów poruszających się po okręgu o średnicy  $D = 36$  cm powoduje przemieszczenie roweru o odcinek  $S = 5,1$  m. Zaniedbując straty energii oblicz:

- Wartość pracy jaka wykona kolarz,
- Siłę z jaką kolarz naciska na pedały.

### Rozwiązanie:

Ad a)  $W = \Delta E_p = mgh = 80 \cdot 9,81 \cdot 100 \text{ [J]} = 78,5 \text{ [kJ]}$

Ad b) Praca podczas jednego obrotu pedałami:  $W_1 = F \cdot \pi \cdot D$

powoduje zmianę energii potencjalnej o

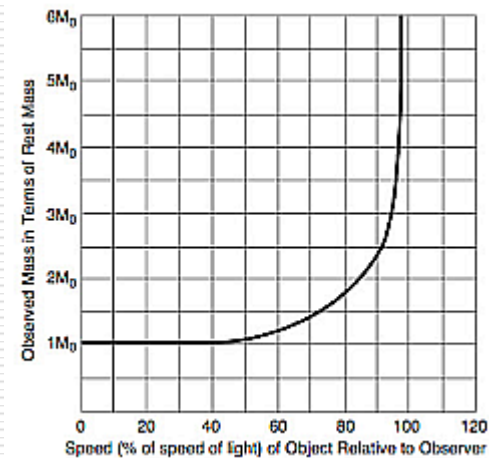
$$\Delta E_p = mgS \cdot \sin 10^\circ = 4002,5 \cdot 0,174 = 696,4 \text{ [J]}$$

$$\text{stąd } F\pi D = \Delta E_p \Rightarrow F = \frac{696,4}{3,14 \cdot 0,36} = 616,1 \text{ [N]}$$

# Energia relatywistyczna

- Lukrecjusz (99 p.n.e.-55 p.n.e.) „*De Rerum Natura*” – „Rzeczy nie mogą powstawać z niczego, a gdy zostały stworzone, nie mogą zamienić się w nicość” – pierwsze sformułowanie *ZASADY ZACHOWANIA MATERII*.
- Lavoisier (1743-1794) zasada zachowania masy
- Einstein (1915r) „Teoria względności połączyła w jedną zasadę: zasadę zachowania masy i zasadę zachowania energii”.
- Masa relatywistyczna

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$$



- $m_0 \rightarrow m$  zatem energia kinetyczna:

$$\cancel{E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2}$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = \Delta m \cdot c^2$$

dla małych prędkości, gdy  $\beta = v/c \ll 1$

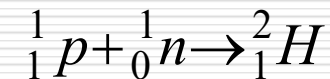
$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

- Zasada równoważności masy i energii:  
Każda ilość dostarczonej energii powoduje wzrost masy ciała.

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}$$

- **Przykład:**

powstawanie deuteronu (jądra deuteru)



$$m_p = 1,00731 \text{ u}$$

$$m_n = 1,00867 \text{ u}$$

$$m_d = 2,01360 \text{ u}$$

$$\Rightarrow \Delta m = (m_p + m_n) - m_d$$

$$\Delta m = 0,00238 \text{ u} \Leftrightarrow E = 2,225 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$E = 2,225 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

Taka energia wyzwala się jako kwant  $\gamma$  - energia wiązania.

- Energia całkowita = en. spoczynkowa + en. kinetyczna

$$\gamma \cdot m_0 c^2 = m_0 c^2 + E_k$$

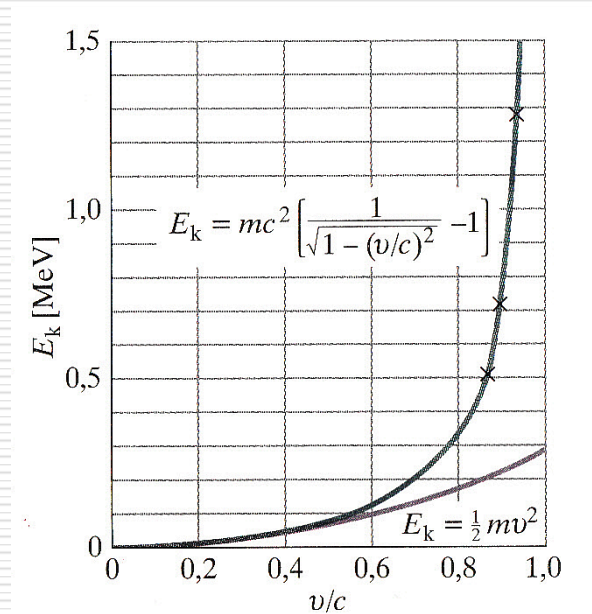
stąd 
$$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

- Energia a pęd

nierelatywistycznie: 
$$p^2 = 2E_k \cdot m_0$$

relatywistycznie 
$$(p \cdot c)^2 = E_k^2 + 2E_k m_0 c^2$$

stąd 
$$E^2 = (p \cdot c)^2 + (m_0 c^2)^2$$



HRW, t4