

Wykład 7: Bryła sztywna

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

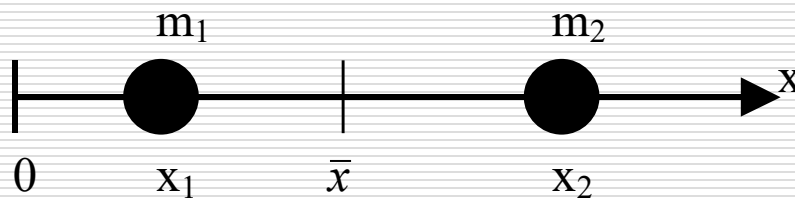
Środek masy/ środek ciężkości

- Jak opisać dowolny ruch ciała?
Którego punktu ciała?



Zawsze można wybrać taki punkt ciała, który porusza się tak jakby poruszał się pojedynczy punkt materialny pod działaniem tych samych sił zewnętrznych – **ŚRODEK MASY** ciała.

Dla układu punktów materialnych:



$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Dla mas punktowych

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Ciągły rozkład mas

$$\bar{x} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$\bar{y} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$\bar{z} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

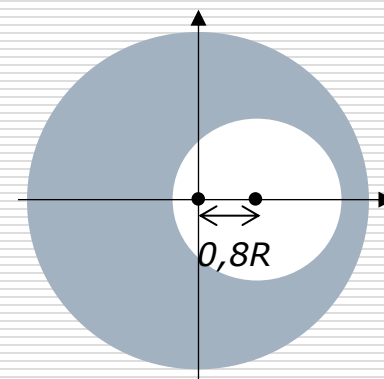
wektor położenia środka masy

$$\vec{r}_s = \hat{i}\bar{x} + \hat{j}\bar{y} + \hat{k}\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{\int x dm + \int y dm + \int z dm}{M}$$

Przykłady

- ❑ Cienki, jednorodny słup o masie M i długości L leżący poziomo postawiono pionowo. Obliczyć wykonaną pracę.
- ❑ Kopiec Piłsudskiego usypany w latach 30-tych ub. wieku ma kształt stożka o wysokości 35 m i średnicy podstawy 110m. Obliczyć masę kopca i pracę jaka została wykonana podczas sypania kopca. Przyjąć średnią gęstość 1700 kg/m^3 . Odp.: $M = \frac{1}{3}\pi R^2 \rho h = 188,4 \cdot 10^6 \text{ kg}$
 $y_{sm} = \frac{1}{4} h$
 $W = 16,17 \cdot 10^9 \text{ J} = 16,17 \text{ GJ}$
- ❑ Okrągła tarcza o promieniu $2R$ ma wycięcie o promieniu R jak na rysunku. Oblicz położenie środka masy.



Ruch środka masy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$M \cdot \vec{r}_s = m_1 \cdot \vec{r}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \quad | dt$$

$$M \cdot \vec{v}_s = m_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \quad | dt$$

$$M \cdot \vec{a}_s = m_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_{zew}$$

Ruch środka masy odbywa się pod wpływem wektorowej sumy wszystkich sił działających na układ - również sił wewnętrznych.

Jednak z III zasady dynamiki $\Rightarrow$ siły wewnętrzne się równoważą

- Środek masy układu porusza się tak, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne na nią działały.

- Pęd środka masy

$$\vec{p}_s = M \cdot \vec{V}_s \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_s}{dt} = M \frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{F}_{zew}$$

$$\vec{F}_{zew} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_s}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{p}_s = \text{const}$$

Zasada zachowania pędu

Przykład 1:

Wzdłuż brzegu jeziora stoi swobodnie canoe o masie m i długości L . W pewnym momencie siedzący na dziobie canoe wioślarz **A** o masie M wstał i przeszedł z szybkością V_w względem brzegu jeziora na drugi koniec łodzi **B**. Oblicz z jaką szybkością i o ile przesunęło się canoe.

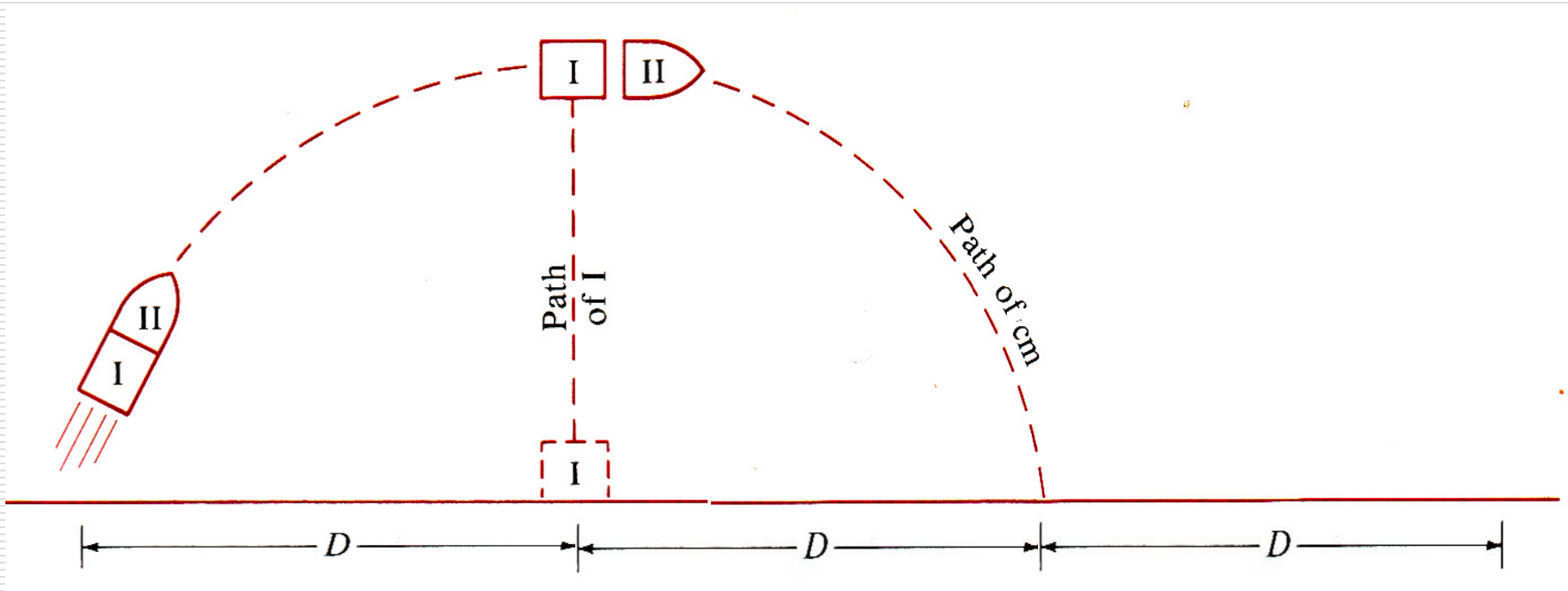


Odp.: przesunięcie $a = \frac{M \cdot L}{m+M}$; szybkość $V_c = \frac{V_w \cdot a}{L-a}$

Przykład 2:

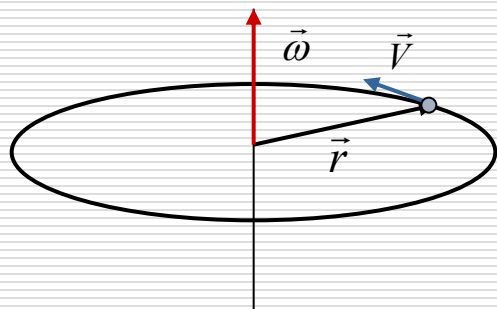
Wystrzelona po torze parabolicznym rakietą w najwyższym punkcie toru rozpada się na dwie równe części. Jedna z nich spada pionowo na powierzchnię Ziemi, a druga porusza się dalej. Przedyskutuj ten przypadek oraz narysuj:

- A. Dalszy tor środka masy obu części rakiet,
- B. Tor drugiej części rakiety.
- C. W jakiej odległości od miejsca startu wyląduje druga część rakiety?



Podstawowe pojęcia ruchu obrotowego punktu materialnego i bryły sztywnej

Odpowiednikiem pędu w ruchu postępowym jest *moment pędu* w ruchu obrotowym



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Skoro $\vec{r} \perp \vec{p}$ to $L = r \cdot mV$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skoro $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ oraz $\omega \parallel \vec{L}$

to $V = \omega \cdot r$ oraz $L = r^2 m \omega$

W ruchu postępowym siłę wiążemy z liniowym przyspieszeniem ciała. Jaką wielkość wiążemy z przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym ?

Powód ruchu obrotowego bryły - moment siły

Jeżeli zmienia się moment pędu układu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \neq const$

$$\text{to } \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right) =$$

$$= \underbrace{(\vec{v} \times m \cdot \vec{v})}_0 + (\vec{r} \times \vec{F}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M}$$

Ostatecznie: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Zasada zachowania momentu pędu:

$$\text{Jeżeli } \vec{L} = const \quad \text{to} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{zew} = 0$$

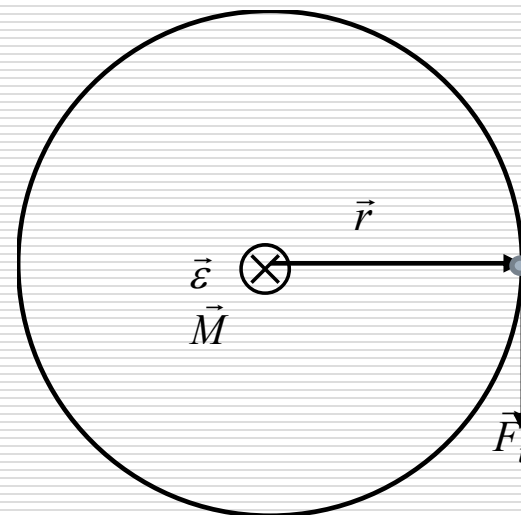
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jeżeli działa siła styczna F_t

$$\vec{r} \perp \vec{F}_t \quad \text{to} \quad M = r \cdot F_t$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \text{oraz} \quad \vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$$

$$\text{to} \quad M = \underbrace{r^2 m}_{I} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = I \vec{\varepsilon}$$



Jeżeli działa dowolnie skierowana siła F to

$$\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_t + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_t + 0$$

Moment siły w tym ruchu nadaje siła styczna.

Zadanie – moment siły

Stojący pionowo dysk o masie m opiera się o schodek o wysokości równej połowie promienia dysku.

Na oś dysku działa poziomo siła F aby wtoczyć dysk ruchem jednostajnym na schodek. Obliczyć wartość tej siły.

Rozwiązanie:

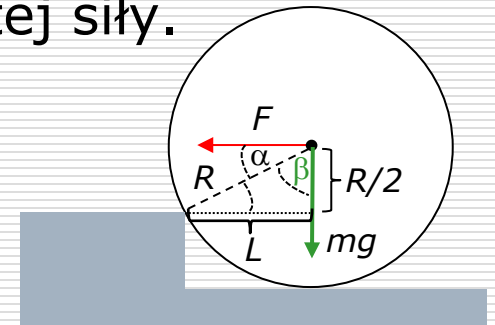
Dysk wtacza się na schodek $\Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_F + \vec{M}_g = 0$

$$\vec{M}_F = \vec{R} \times \vec{F} \quad M_F = R \cdot F \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R \cdot F$$

Przeciwdziała moment siły grawitacji $\vec{M}_g = \vec{R} \times m\vec{g}$

$$M_g = R \cdot mg \cdot \sin \beta = R \cdot mg \cdot \sin(90 - \alpha) = R \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{L}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} R}{R}$$

$$\frac{1}{2} RF = mgR \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{F = mg \sqrt{3}}$$



Zadanie domowe

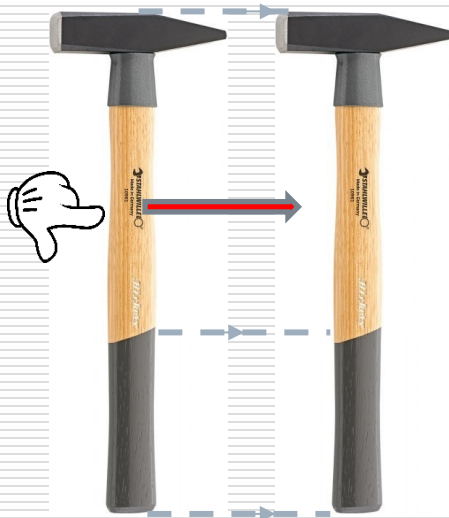
Na platformie jadącej po poziomej jezdni ciężarówka stoi swobodnie skrzynia w kształcie prostopadłościanu o wysokości h i kwadratowej podstawie o boku b . Środek ciężkości skrzyni znajduje się w jej środku geometrycznym. Współczynnik tarcia skrzyni o platformę wynosi f .

- A) Oblicz maksymalną szybkość ciężarówka na zakręcie o promieniu R aby skrzynia nie przesunęła się.
- B) Oblicz z jakim maksymalnym opóźnieniem mogłaby hamować ciężarówka jadąc prostoliniowo, aby skrzynia się nie przewróciła.

Odp.

$$A) \quad V = \sqrt{Rgf}$$

$$B) \quad a < \frac{gb}{h}$$

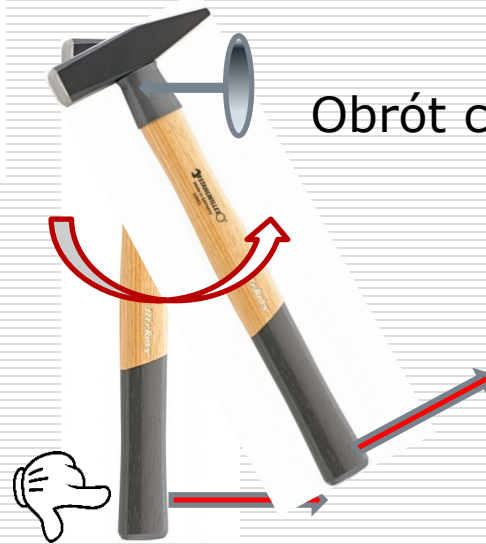


Działa stała siła **F**

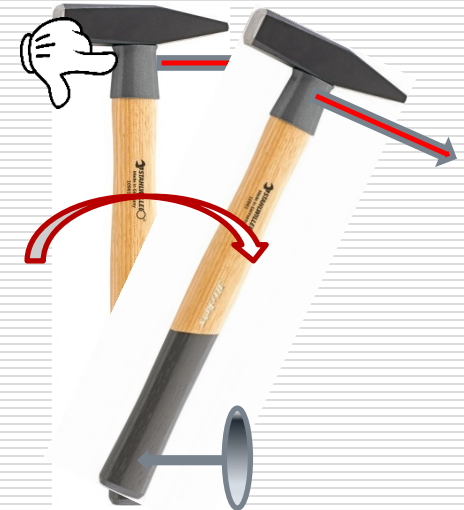
SKUTEK ?

Ruch postępowy

ε_1 $\wedge$
 ε_1 ∇ ε_1 ??
 ε_1 $\vee$



Obrót ciała z przyspieszeniem ε_1



Obrót ciała z przyspieszeniem ε_2

$$\varepsilon = \frac{M}{?} = \frac{R \cdot F \cdot \sin 90}{?} = \frac{R \cdot F \cdot \sin 90}{\text{rozkład masy}}$$

Moment bezwładności

Energia kinetyczna i -tego punktu materialnego:

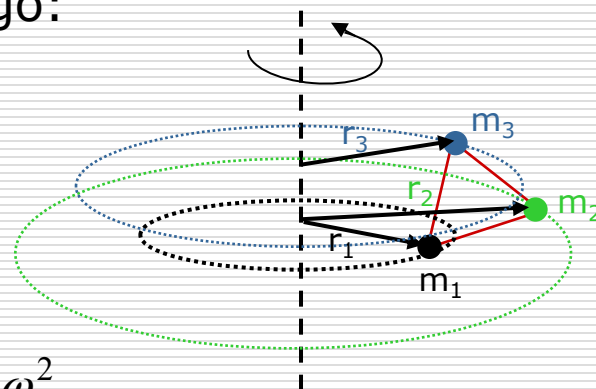
$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$

Energia układu punktów materialnych obracających się z taką samą ω

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_i m_i \cdot r_i^2}_I \right) \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

← Energia kinetyczna ruchu obrotowego układu punktów materialnych



Dla układu punktów materialnych

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad [kg \cdot m^2]$$

Dla ciągłego rozkładu mas

$$I = \int r^2 dm$$

element masy

odległość od osi obrotu

Moment bezwładności zależy od:

- wyboru osi obrotu
- kształtu ciała
- rozmieszczenia masy ciała

UWAGA!!! Moment bezwładności jest addytywny !!!

Przykład

Obliczyć moment bezwładności prostokąta o wymiarach **a** x **b** i gęstości powierzchniowej σ , względem:

- a) podstawy **a** jako osi,
- b) względem osi prostopadłej do boku **a**, przechodzącej przez środek prostokąta,
- c) względem osi prostopadłej do powierzchni prostokąta i przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków.

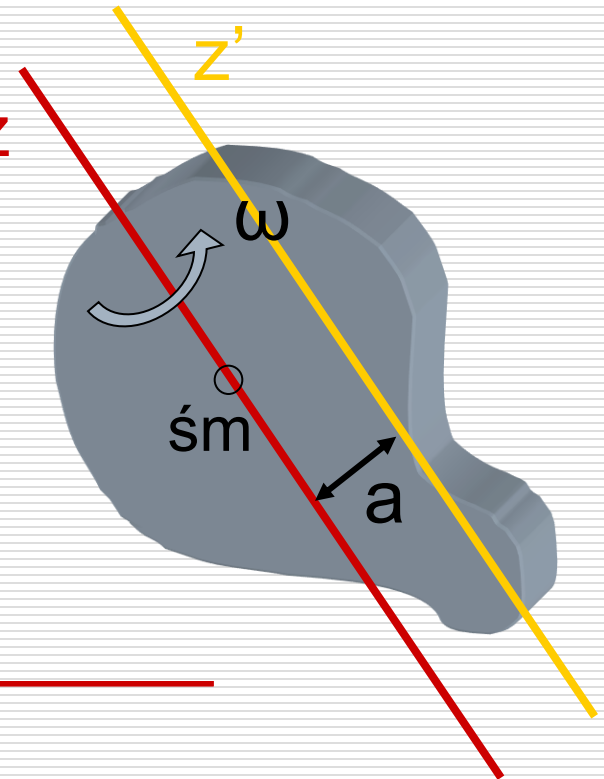
Twierdzenie Steinera (o osiach równoległych)

- Gdy obrót bryły o masie M następuje wokół osi Z przechodzącej przez środek Z masy to

$$I_z = I_0$$

- Jeżeli bryła zacznie się obracać wokół osi Z' , równoległej do Z i oddalonej od niej o odległość a to

$$I_{z'} = I_0 + Ma^2$$



Przykład

Toczenie się bez poślizgu walca można traktować jako obrót wokół chwilowej osi obrotu – punktu styczności z podłożem.

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów

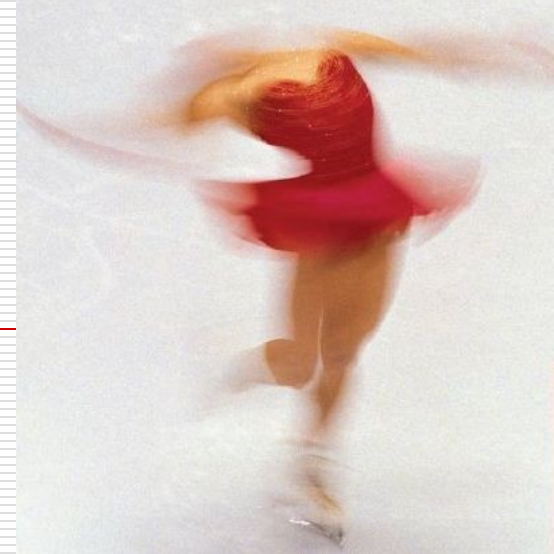
Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś obrotu)	
położenie	$x \text{ (m)}$	położenie kątowne	$\alpha \text{ (rad)}$
prędkość liniowa $v \text{ (m/s)}$	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowna $\omega \text{ (rad/s)}$	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
przyspieszenie liniowe $a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowne $\varepsilon \text{ (rad/s}^2\text{)}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	$m \text{ (kg)}$	moment bezwładności	$I \text{ (kg}\cdot\text{m}^2\text{)}$

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów cd.

siła F (N)	$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$	moment siły M (N m)	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
pęd p (kg m/s)	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$	moment pędu L (kg m ² s)	$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$
energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{m}{2} v^2$	energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{I}{2} \omega^2$
uogólniona zasada dynamiki	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	uogólniona zasada dynamiki	$\vec{M} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$

Tensor momentu bezwładności *

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



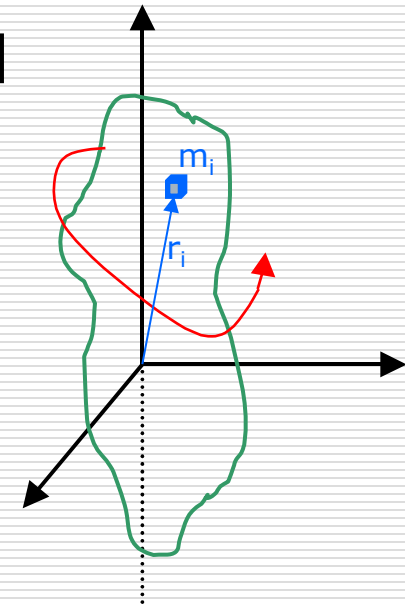
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i) = \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i)$$

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \text{więc} \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

ale skoro wektorami są zarówno:

$\vec{L}, \vec{r}$ jak i $\vec{\omega}$ Więc mają one swoje
składowe x, y, z

Zatem korzystając z przekształceń
rachunku wektorowego, ogólne równanie
na $\vec{L}$ można rozpisać na składowe...



i zastąpić przez układ trzech równań:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}}$$

Moment bezwładności nie jest jedną liczbą ale to tensor o składowych zależnych od ciała, którego dotyczy – wyboru osi obrotu oraz od symetrii ciała.

W ogólnym przypadku wektor **L** nie ma kierunku prędkości kątowej ω , co jest przyczyną skomplikowanego zachowania się wirującego ciała sztywnego.

Własności tensora momentu bezwładności

- Symetryczny: $I_{xy} = I_{yx}$
- Można go zdiagonalizować do postaci:
$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$
 różne od zera są tylko wartości osi głównej
- Suma jest izotropowa, czyli jest niezależna od orientacji ciała względem osi układu:
$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \sum_i m_i r_i^2$$
$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int_V r^2 dm = 2 \int_V \rho(r) \cdot r^2 dV$$
- Gdy ciało ma symetrię osiową np. względem osi OZ to $I_{xy} = 0$

Interpretacja elementów tensora momentu bezwładności

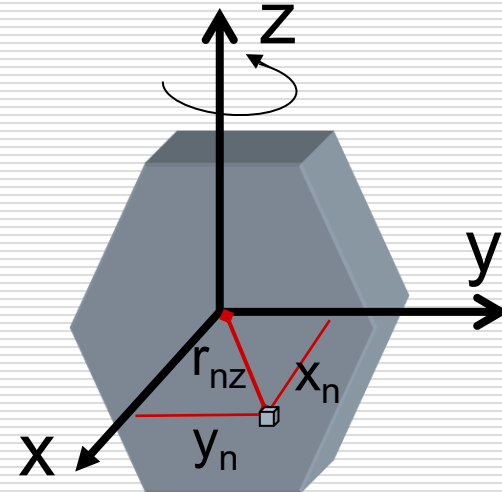
Dla układu punktów materialnych:

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^N m_n (x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n r_{nz}^2$$

Dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int \underset{\uparrow}{r^2} dm$$

kwadrat odległości od osi OZ



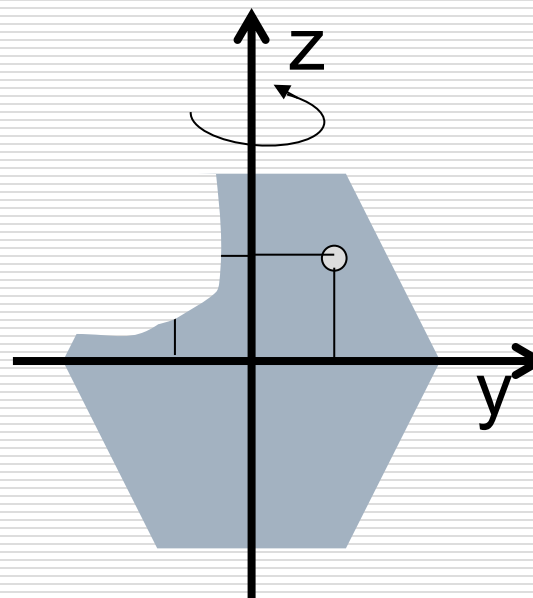
Elementy diagonalne mają klasyczną interpretację, tzn. np. dla osi Y:

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \int (r^2 - y^2) dm$$

Jeżeli bryła jest niesymetryczna

wówczas $I_{yz} \neq 0$

$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^N m_n y_n z_n$$



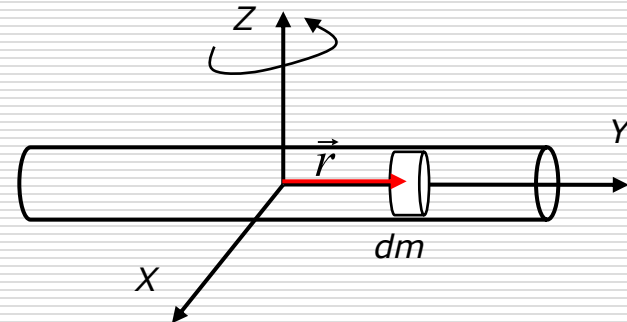
Elementy pozadiagonalne pojawiają się gdy pojawia się asymetria – nie mają jednak bezpośredniej interpretacji fizycznej.

□ Liniowy rozkład masy

Cienki jednorodny pręt o długości l i gęstości liniowej $\lambda = \frac{dm}{dy} = \text{const}$ obraca się wokół osi OZ

$$I_{yy} = 0$$

oraz
$$I_{xx} = I_{zz} = \int r^2 dm$$



$$I_{zz} = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \lambda \frac{y^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right)$$

czyli

$$I_{zz} = \frac{m}{3l} \frac{2l^3}{8} = \frac{ml^2}{12}$$

Jeżeli przesuniemy oś obrotu na koniec pręta, to $I' = ?$

□ Powierzchniowy rozkład masy

Cienki jednorodny dysk o promieniu R i gęstości powierzchniowej $\sigma = \frac{dm}{ds}$

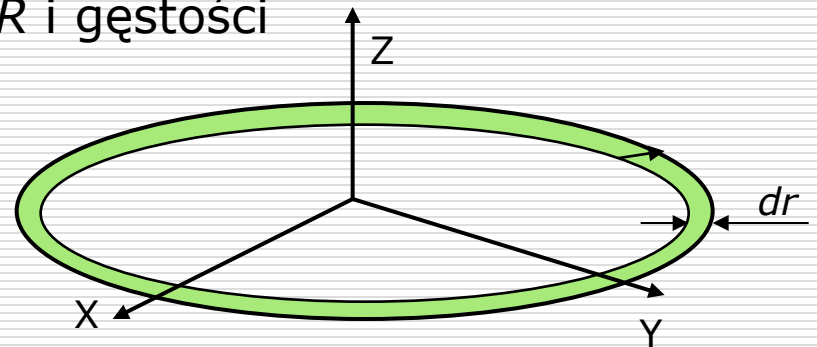
$$I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm \quad dm = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$\text{więc} \quad I_{zz} = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

pozostałe momenty bezwładności obliczymy korzystając z własności ciała o symetrii osiowej - własności tensora momentu bezwładności:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int_V r^2 dm = 2 \int_V \rho(r) \cdot r^2 dV$$



Wiadomo, że dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int_V r^2 dm = 2 \int_V r^2 \sigma dV$$

Dla rozważanego dysku

$$I_{xx} = I_{yy}$$

otrzymujemy więc

$$2I_{xx} + I_{zz} = 2 \int_S r^2 dm = 2 \int_S r^2 \sigma dS = 2\sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = mR^2$$

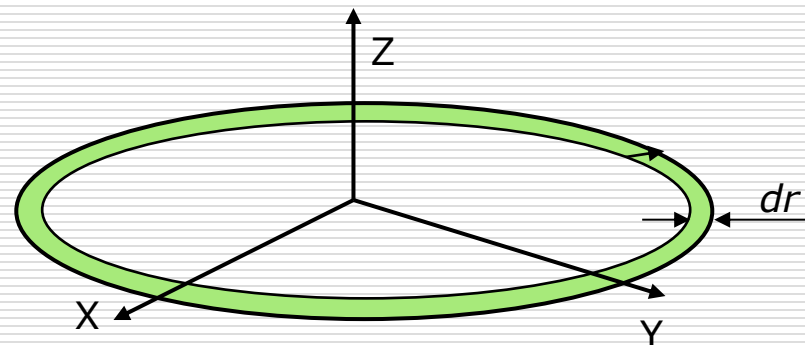
a więc

$$2I_{xx} + \frac{mR^2}{2} = mR^2$$

stąd

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$$

$$I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$$



Lub obliczając inaczej: skoro $I_{xx} = I_{yy} = \int (r^2 - x^2) dm$

a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ oraz $x = y$ a więc $r^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} r^2$

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_S \left(r^2 - \frac{r^2}{2} \right) \sigma dS = \sigma \int \frac{r^2}{2} 2\pi r dr = \frac{m}{\pi R^2} \pi \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$$

Powłoka kulista (sfera)

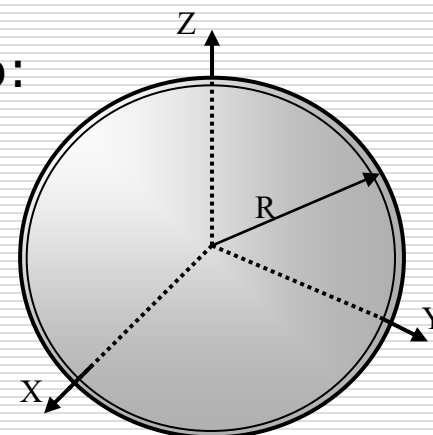
$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int_V r^2 dm$$

Gęstość powierzchniowa powłoki o promieniu R

wynosi $\sigma = \frac{dm}{ds}$ Skoro jest symetria kulista to:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \Rightarrow 3I_{xx} = 2 \int r^2 dm$$

$$I_{xx} = \frac{2}{3} \int r^2 dm = \frac{2}{3} mR^2$$



Lub inaczej: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ oraz $x = y = z \Rightarrow r^2 = 3x^2$

$$x^2 = \frac{r^2}{3} \text{ czyli } I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \int \left(r^2 - \frac{r^2}{3} \right) dm = \frac{2}{3} \int r^2 dm = \frac{2}{3} mR^2$$

□ Objętościowy rozkład masy

- Kula o promieniu R i gęstości objętościowej ρ

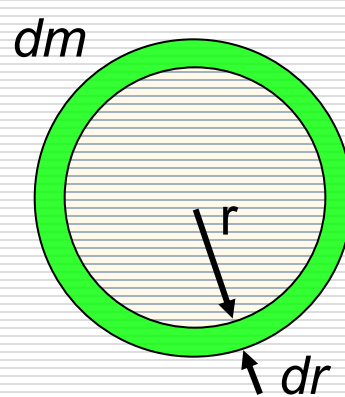
$$I_{sfery} = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$I_{kuli} = \int dI$$

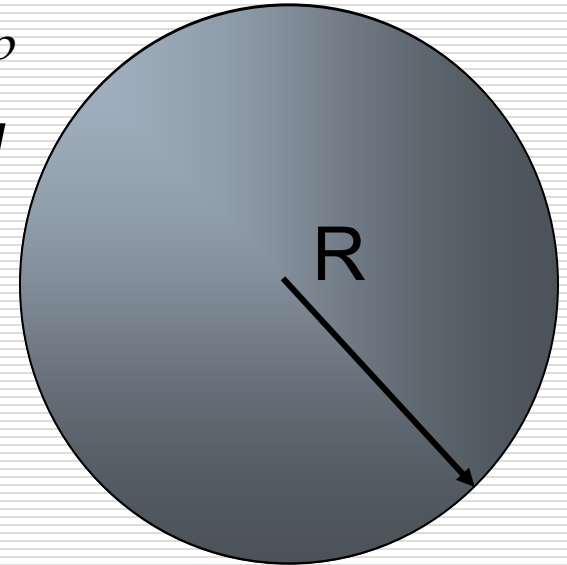
$\swarrow$ sfery

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm$$

$\nwarrow$



M



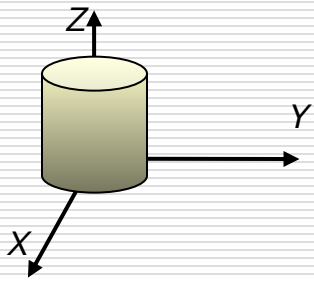
$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \int \frac{2}{3} r^2 \rho dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \boxed{\frac{2}{5} MR^2}$$

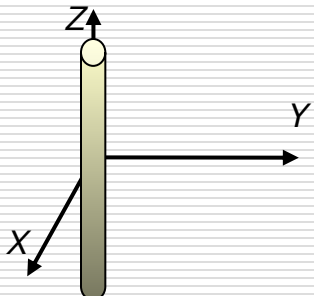
- Symetria cylindryczna

walec o promieniu podstawy R , wysokości H i masie M



$$I_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$

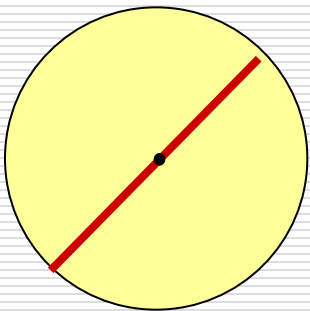
cienki pręt o długości L i masie M



$$I_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

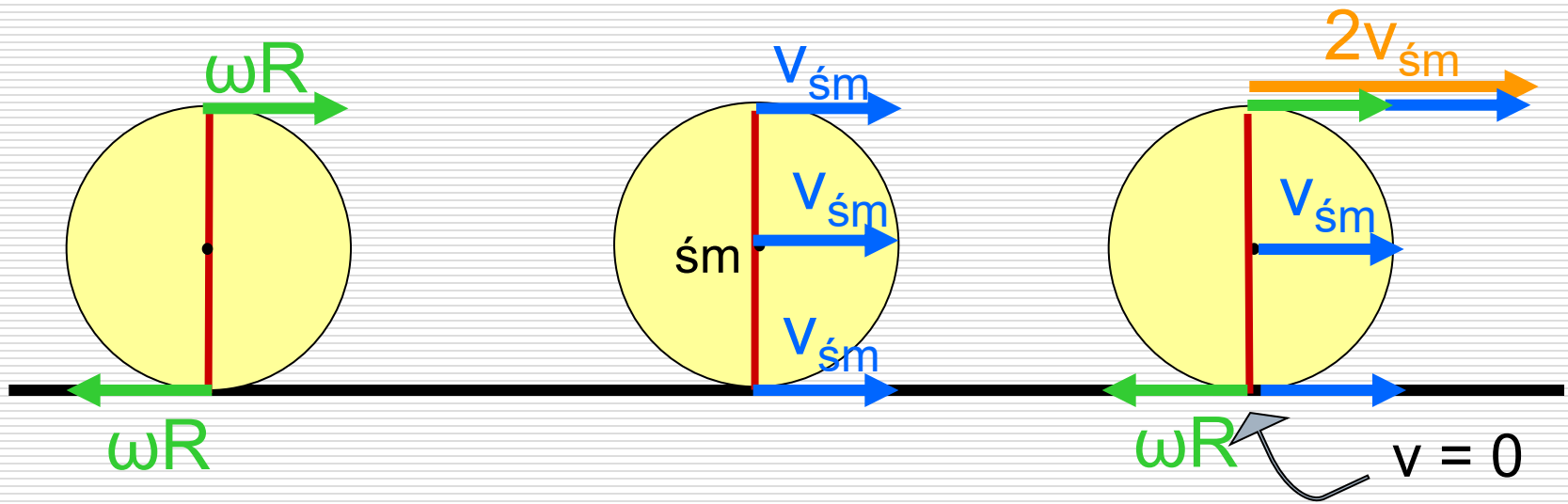
Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy. Przyczyną toczenia jest występowanie tarcia statycznego.



$2R$

śm



ruch obrotowy
wokół osi
przechodzącej
przez środek
masy

ruch postępowy

$$v_{\acute{s}m} = \omega R$$

toczenie bez
poślizgu jako
złożenie ruchów

$$a_{\acute{s}m} = \varepsilon R$$

Przykład:

Człowiek trzyma za jeden koniec deski o długości L opartej drugim końcem na walcu o promieniu R . Następnie człowiek zaczyna iść pchając deskę, która bez poślizgu toczy się po walcu, który toczy się po podłożu.

Jaką odległość musi przejść człowiek aby koniec deski dotarł do walca ?

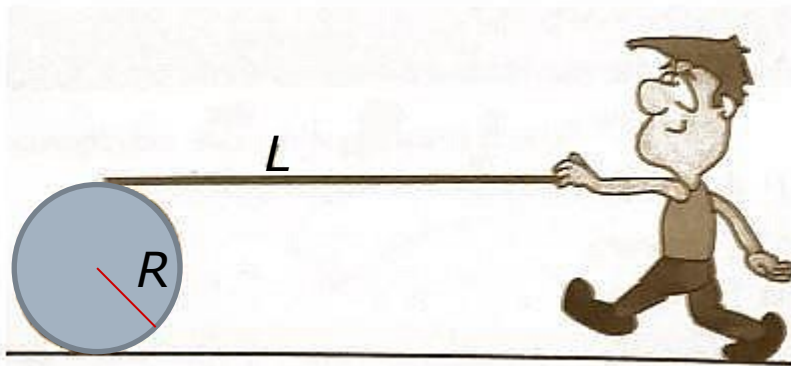
Czy/jak zależy to od promienia walca ?

Rozwiązanie:

W czasie t środek walca przebędzie odległość $S=L=v \cdot t$

W tym samym czasie górny punkt styczności z deską przesunie się na odległość $2 v \cdot t = 2L$

Czyli człowiek będzie musiał przebyć odległość $2L$ niezależnie od promienia walca.



Energia toczącego się ciała.

całkowita

energia kinetyczna

$$E_k = E_{kp} + E_{ko}$$

energia kinetyczna

ruchu obrotowego

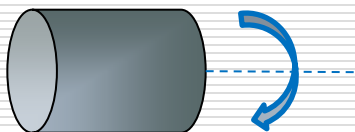
energia kinetyczna
ruchu postępowego

$$E_{ko} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m v_{\dot{s}m}^2 \quad \leftarrow v_{\dot{s}m} = \omega R$$

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

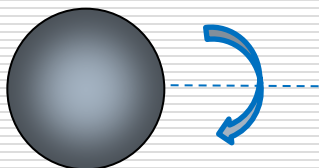


Całkowita energia kinetyczna

$$I_{\text{walca}} = \frac{1}{2} m R^2$$

walca

$$E_{\text{kw}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v_{\text{śm}}^2$$



$$I_{\text{kuli}} = \frac{2}{5} m R^2$$

kuli

$$E_{\text{kk}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{7}{10} m v_{\text{śm}}^2$$



$$I_{\text{obr}} = m R^2$$

obręczy

$$E_{\text{kobr}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = m v_{\text{śm}}^2$$

$$E_{\text{kobręczy}} > E_{\text{kwalca}} > E_{\text{kkuli}}$$

Przykład

Na jednorodny walec o masie m i promieniu R nawinięta jest nitka, której wolny koniec zaczepiono do sufitu. Swobodnie puszczony walec spada obracając się i powoduje rozwijanie się nitki – jak na rysunku obok.

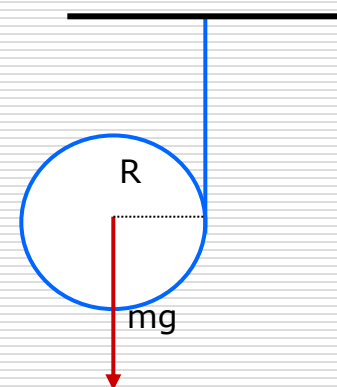
Ruch obrotowy walca wywołany jest działaniem momentu siły $M = mgR$.

Przyspieszenie liniowe $a = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ znajdujemy

z równania ruchu $M = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ gdzie I jest

momentem bezwładności walca.

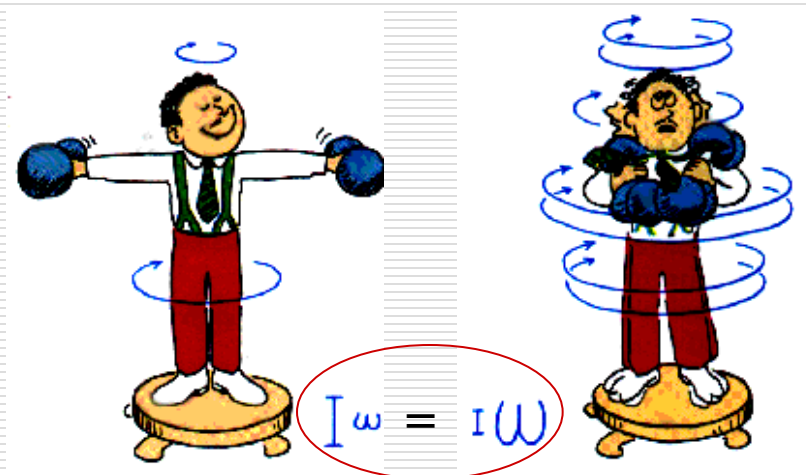
Tak więc $mgR = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{a}{R}$ skąd ~~$a = 2g$~~ ! $a = \frac{2}{3} g$



Zasada zachowania momentu pędu

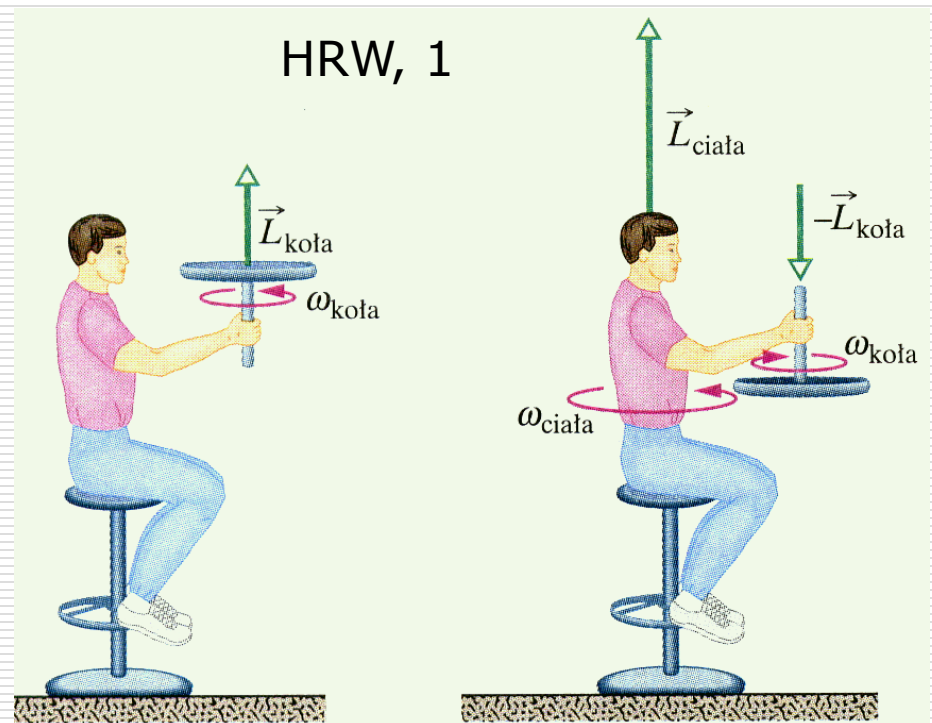
W układzie inercyjnym wypadkowy moment sił $\vec{M}_{zew} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ jest równy zmianie momentu pędu bryły sztywnej

Jeżeli $\vec{M}_{zew} = 0$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ czyli $\vec{L} = const$



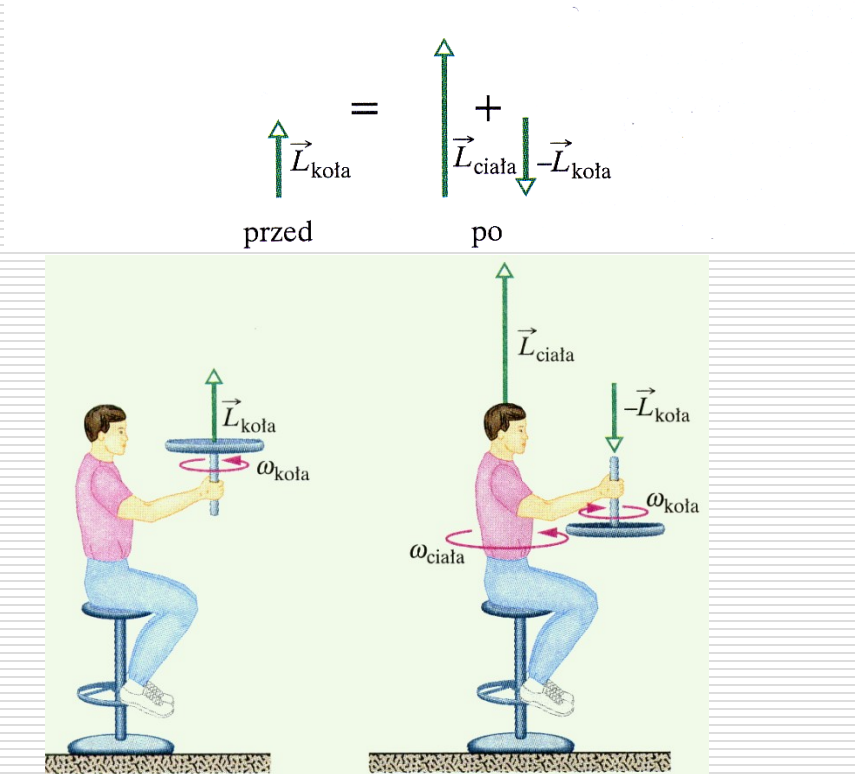
Przykład

Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności $I_k = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ względem swojej osi. Koło obraca się z prędkością kątową $\omega_k = 3,9$ obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi $I_c = 6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Obliczyć prędkość kątową $\omega_{\text{ciała}}$ po obróceniu koła. W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?



Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:



$$\vec{L}_{przed} = \vec{L}_{po}$$

$$L_k = L_c - L_k$$

$$L_c = 2L_k$$

$$\omega_{ciał} I_c = 2\omega_k I_k$$

$$\omega_{ciał} = 2\omega_k \frac{I_k}{I_c}$$