Wykład 8: Bryła sztywna

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

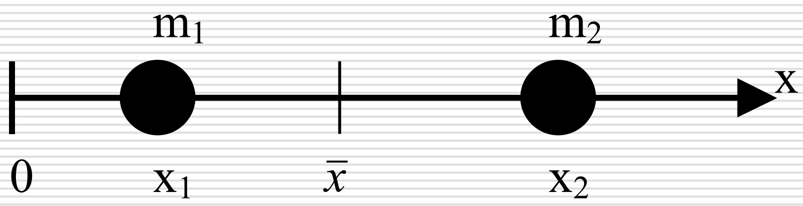
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

Środek masy/ środek ciężkości

- Jak opisać dowolny ruch ciała? Którego punktu ciała?

Zawsze można wybrać taki punkt ciała, który porusza się tak jakby poruszał się pojedynczy punkt materialny pod działaniem tych samych sił zewnętrznych – *ŚRODEK MASY* ciała.

Dla układu punktów materialnych:



$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Dla mas punktowych

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Ciągły rozkład mas

$$\bar{x} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$\bar{y} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$\bar{z} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

wektor położenia środka masy

$$\vec{r}_s = \hat{i}\bar{x} + \hat{j}\bar{y} + \hat{k}\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$r_s = \frac{\int x dm + \int y dm + \int z dm}{M}$$

Przykłady

- Cienki, jednorodny słup o masie *M* i długości *L* leżący poziomo postawiono pionowo. Obliczyć wykonaną pracę.

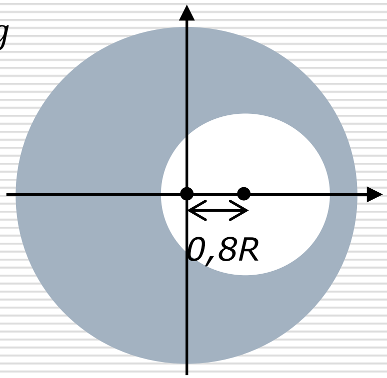
- Kopiec Piłsudskiego usypany w latach 30-tych ub. wieku ma kształt stożka o wysokości 35 m i średnicy podstawy 110m. Obliczyć masę kopca i pracę jaka została wykonana podczas sypania kopca. Przyjąć średnią gęstość 1700 kg/m^3.

Odp.: $M = \frac{1}{3}\pi R^2 \rho h = 188{,}4 \cdot 10^6 kg$

$y_{sm} = ¼\, h$

$W = 16{,}17 \cdot 10^9 J = 16{,}17\ GJ$

- Okrągła tarcza o promieniu *2R* ma wycięcie o promieniu *R* jak na rysunku. Oblicz położenie środka masy.



Ruch środka masy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$M \cdot \vec{r}_S = m_1 \cdot \vec{r}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \qquad \Big| dt$$

$$M \cdot \vec{v}_S = m_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{v}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \qquad \Big| dt$$

$$M \cdot \vec{a}_S = m_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$M \cdot \vec{a}_S = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

Ruch środka masy odbywa się pod wpływem wektorowej sumy wszystkich sił działających na układ - również sił wewnętrznych.
Jednak z III zasady dynamiki $\Rightarrow$
siły wewnętrzne się równoważą

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_{zew}$$

- Środek masy układu porusza się tak, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne na nią działały.

- Pęd środka masy

$$\vec{p}_s = M \cdot \vec{V}_s \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}_s}{dt} = M\frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{F}_{zew}$$

$$\vec{F}_{zew} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{p}_s}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \vec{p}_s = const$$

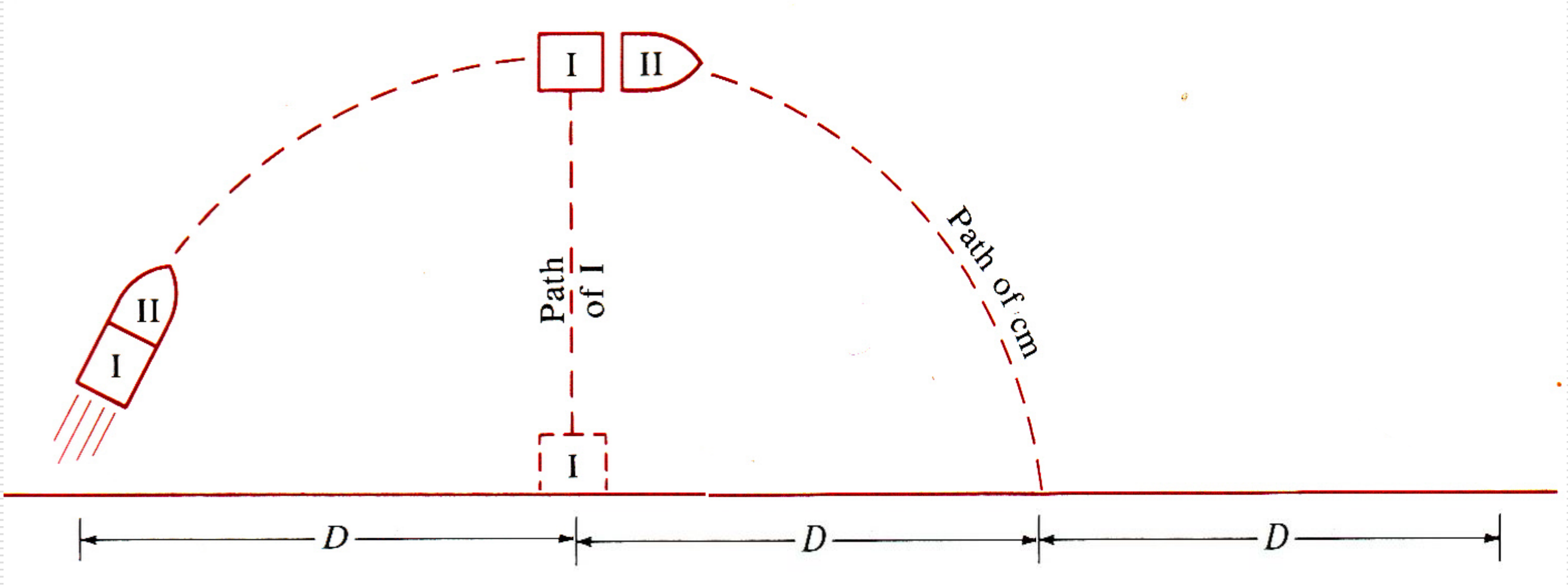
Zasada zachowania pędu

Przykład 1:
Wzdłuż brzegu jeziora stoi swobodnie canoe o masie *m* i długości *L.* W pewnym momencie siedzący na dziobie canoe wioślarz **A** o masie *M* wstał i przeszedł z szybkością V_w względem brzegu jeziora na drugi koniec łodzi **B**. Oblicz z jaką szybkością i o ile przesunęło się canoe.

Odp.: przesunięcie $a = \frac{M \cdot L}{m+M}$; szybkość $V_c = \frac{V_w \cdot a}{L-a}$

Przykład 2:
Wystrzelona po torze parabolicznym rakieta w najwyższym punkcie toru rozpada się na dwie równe części. Jedna z nich spada pionowo na powierzchnię Ziemi, a druga porusza się dalej. Przedyskutuj ten przypadek oraz narysuj:

A. Dalszy tor środka masy obu części rakiet,
B. Tor drugiej części rakiety.
C. W jakiej odległości od miejsca startu wyląduje druga część rakiety?



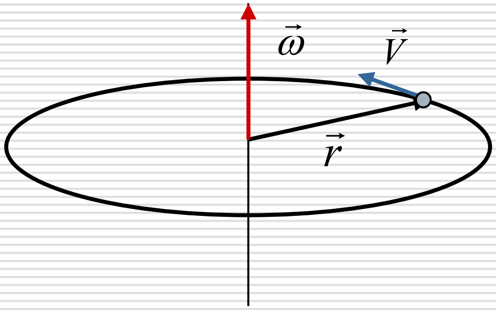
Przykład 3:

Sonda kosmiczna wystrzelona do badania biegunów Słońca po opuszczeniu płaszczyzny ekliptyki ma zawisnąć nieruchomo nad biegunem Słońca. Aby nie spaść na Słońce silniki odrzutowe sondy cały czas muszą pracować niwelując siłę przyciągania.

Jak zastosować zasadę zachowania energii w tym przypadku, skoro energia paliwa jest zużywana, a sonda nie zmienia swego położenia względem Słońca?

Podstawowe pojęcia ruchu obrotowego punktu materialnego i bryły sztywnej

Odpowiedników pędu w ruchu postępowym jest *moment pędu* w ruchu obrotowym



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Skoro $\vec{r} \perp \vec{p}$ to $L = r \cdot mV$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skoro $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ oraz $\omega \,||\, \vec{L}$

to $V = \omega \cdot r$ oraz $L = r^2 m\omega$

W ruchu postępowym siłę wiążemy z liniowym przyspieszeniem ciała. Jaką wielkość zwiążemy z przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym ?

Powód ruchu obrotowego bryły - moment siły

Jeżeli zmienia się moment pędu układu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \neq const$

to $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) =$

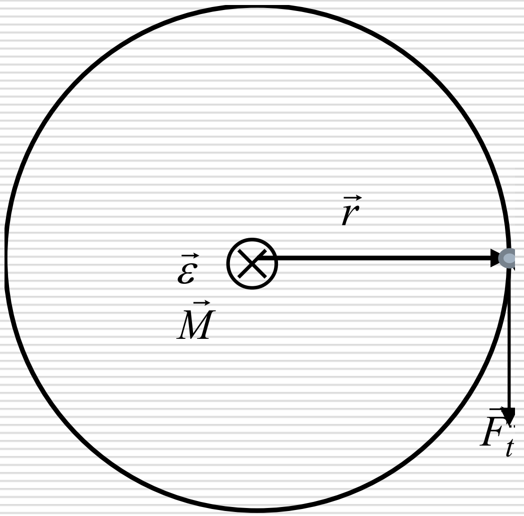
$$= \underbrace{(\vec{v} \times m \cdot \vec{v})}_{0} + (\vec{r} \times \vec{F}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M}$$

Ostatecznie: $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

Zasada zachowania momentu pędu:

Jeżeli $\vec{L} = const$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{zew} = 0$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



Jeżeli działa siła styczna F_t

$\vec{r} \perp \vec{F}_t$ to $M = r \cdot F_t$

$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ oraz $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$

to $M = \underbrace{r^2 m}_{I} \varepsilon \quad \Rightarrow \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$

Jeżeli działa dowolnie skierowana siła F *to*

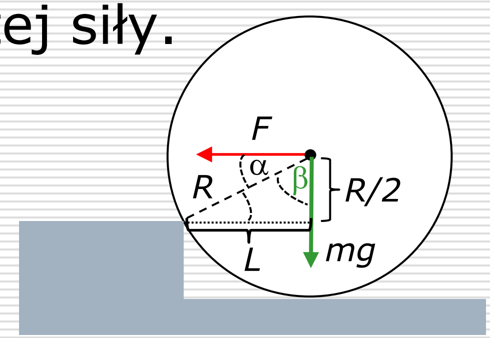
$$\vec{M} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) = \vec{r} \times \vec{F}_t + 0$$

Moment siły w tym ruchu nadaje siła styczna.

Zadanie – moment siły

Stojący pionowo dysk o masie *m* opiera się o schodek o wysokości równej połowie promienia dysku.

Na oś dysku działa poziomo siła *F* aby wtoczyć dysk ruchem jednostajnym na schodek. Obliczyć wartość tej siły.



Rozwiązanie:

Dysk wtacza się na schodek $\Rightarrow$ $\vec{M} = \overrightarrow{M_F} + \overrightarrow{M_g} = 0$

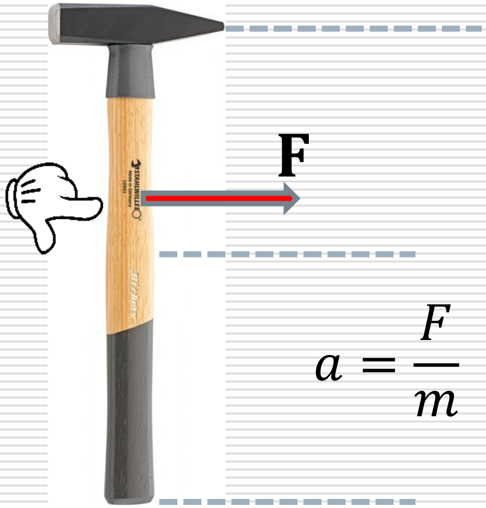
$$\overrightarrow{M_F} = \vec{R} x \vec{F} \quad M_F = R \cdot F \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} R \cdot F$$

Przeciwdziała moment siły grawitacji $\overrightarrow{M_g} = \vec{R}\ x\ m\vec{g}$

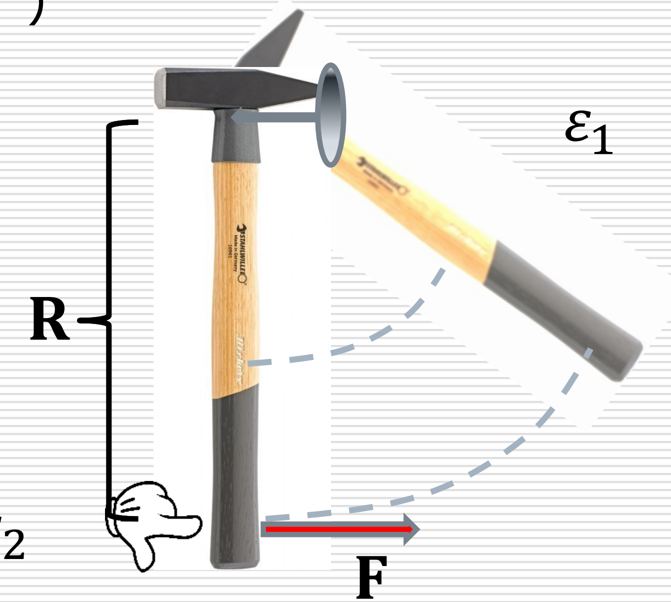
$$M_g = R \cdot mg \cdot sin\beta = R \cdot mg \cdot sin(90 - \alpha) = R \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha \qquad cos\alpha = \frac{L}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} R}{R}$$

$$\frac{1}{2} RF = mgR \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boxed{F = mg\ \sqrt{3}}$$

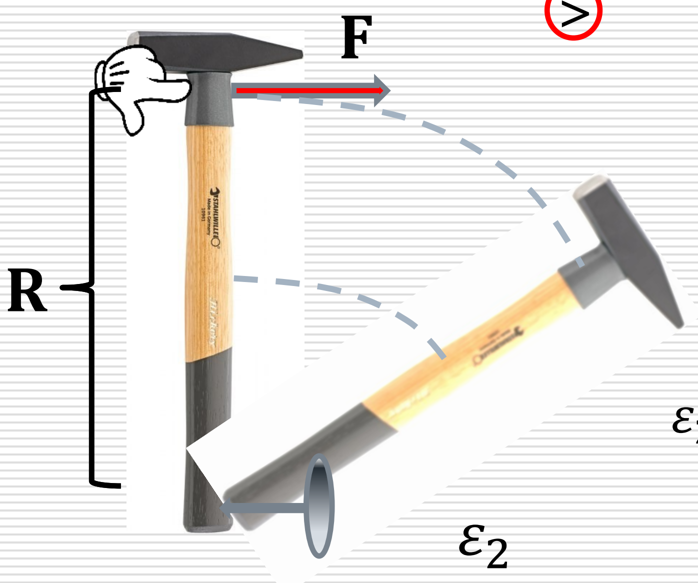
(Widok „z góry”)



$$a = \frac{F}{m}$$



$$\varepsilon_1 \quad \overset{?}{=} \quad \varepsilon_2$$
$$<$$
$$>$$



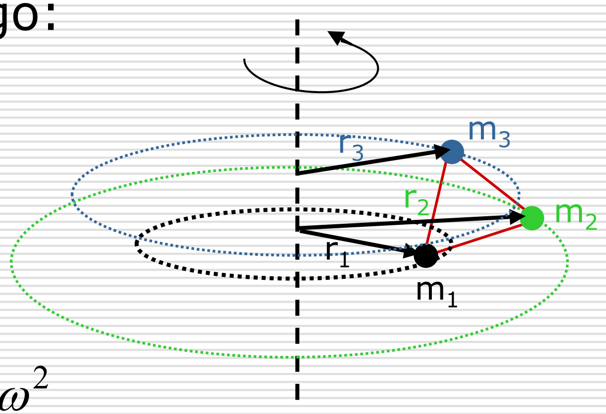
$$\varepsilon_1 = \frac{M}{?} = \frac{R \cdot F \cdot sin90}{I_1}$$

I - rozkład masy wokół osi obrotu

$$\varepsilon_2 = \frac{M}{?} = \frac{R \cdot F \cdot sin90}{I_2}$$

Moment bezwładności

Energia kinetyczna *i*-tego punktu materialnego:



$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$

Energia układu punktów materialnych obracających się z taką samą ω

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_i m_i \cdot r_i^2}_{I}\right) \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$\leftarrow$ Energia kinetyczna ruchu obrotowego układu punktów materialnych

Dla układu punktów materialnych

$$\boxed{I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad \left[kg \cdot m^2\right]}$$

Dla ciągłego rozkładu mas $$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

Moment bezwładności zależy od:

- wyboru osi obrotu
- kształtu ciała
- rozmieszczenia masy ciała

<u>UWAGA!!! Moment bezwładności jest addytywny !!!</u>

Przykład

Obliczyć moment bezwładności prostokąta o wymiarach **a** x **b** i gęstości powierzchniowej σ, względem:

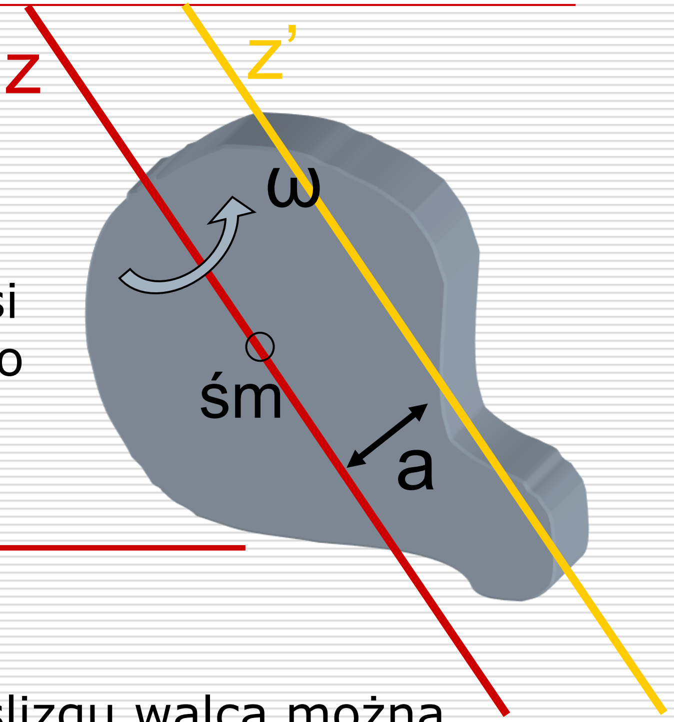
a) podstawy **a** jako osi,

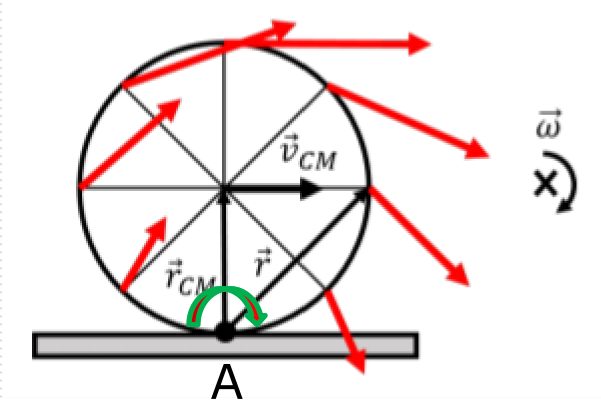
b) względem osi prostopadłej do boku **a**, przechodzącej przez środek prostokąta,

c) względem osi prostopadłej do powierzchni prostokąta i przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków.

Twierdzenie Steinera (o osiach równoległych)

- Gdy obrót bryły o masie *M* następuje wokół osi Z przechodzącej przez środek masy to $I_z = I_0$
- Jeżeli bryła zacznie się obracać wokół osi Z′, równoległej do Z i oddalonej od niej o odległość *a* to $I_{z'} = I_0 + Ma^2$





Przykład

Toczenie się bez poślizgu walca można traktować jako obrót wokół chwilowej osi obrotu – punktu styczności z podłożem.

$$I_A = I_0 + Mr^2$$

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów

Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś obrotu)	
położenie	x (m)	położenie kątowe	α (rad)
prędkość liniowa v (m/s)	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa ω (rad/s)	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
przyspieszenie liniowe a (m/s^2)	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowe ε (rad/s^2)	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m (kg)	moment bezwładności	I (kg·m^2)

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów cd.

siła F (N)	$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$	moment siły M (N m)	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
pęd p (kg m/s)	$\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}$	moment pędu L (kg m^{2}s)	$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$
energia kinetyczna E_k (J)	$\mathrm{E_k} = \frac{\mathrm{m}}{2}\mathrm{v}^2$	energia kinetyczna E_k (J)	$\mathrm{E_k} = \frac{\mathrm{I}}{2}\omega^2$
uogólniona zasada dynamiki	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	uogólniona zasada dynamiki	$\vec{M} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$

Tensor momentu bezwładności *

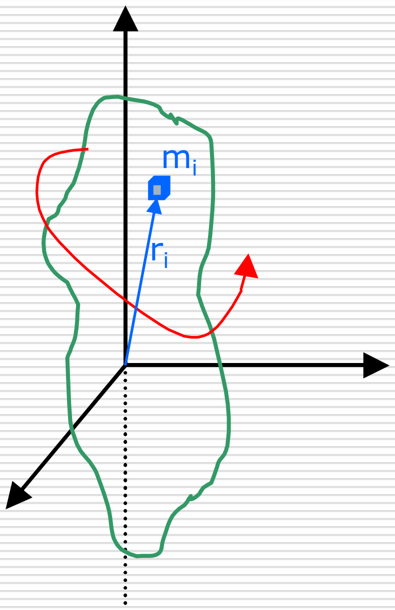
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i\right) = \sum_i \left(m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i\right)$$

$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ więc $\sum_i \vec{L}_i = \vec{L} = \sum_i \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right]$

ale skoro wektorami są zarówno:

$\vec{L}, \vec{r}$ jak i $\vec{\omega}$ Więc maja one swoje składowe *x, y, z*



Zatem korzystając z przekształceń rachunku wektorowego, ogólne równanie na $\vec{L}$ można rozpisać na składowe i zastąpić przez układ trzech równań:

$$
\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}
$$

$$\boxed{\vec{L} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}}$$

Moment bezwładności nie jest jedną liczbą ale to tensor o składowych zależnych od ciała, którego dotyczy – wyboru osi obrotu oraz od symetrii ciała.

W ogólnym przypadku wektor ***L*** nie ma kierunku prędkości kątowej ω, co jest przyczyną skomplikowanego zachowania się wirującego ciała sztywnego.

Własności tensora momentu bezwładności

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

- Symetryczny: $I_{xy} = I_{yx}$
- Można go zdiagonalizować do postaci: $\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$ różne od zera są tylko wartości osi głównej
- Suma jest *izotropowa*, czyli jest niezależna od orientacji ciała względem osi układu:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum_i m_i r_i^2$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int r^2 dm = 2\int_V \rho(r) \cdot r^2 dV$$

- Gdy ciało ma symetrię osiową np. względem osi OZ to $I_{xy} = 0$

Własności tensora momentu bezwładności

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

- Symetryczny: $I_{xy} = I_{yx}$
- Można go zdiagonalizować do postaci:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

różne od zera są tylko wartości osi głównej

- Suma jest *izotropowa*, czyli jest niezależna od orientacji ciała względem osi układu:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum_i m_i r_i^2$$

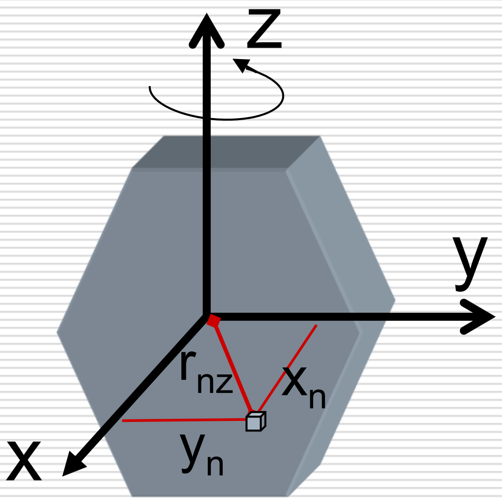
$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int r^2 dm = 2\int_V \rho(r) \cdot r^2 dV$$

- Gdy ciało ma symetrię osiową np. względem osi OZ to $I_{xy} = 0$

Interpretacja elementów tensora momentu bezwładności

Dla układu punktów materialnych:

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m_n}(x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m_n} r_{nz}^2$$



Dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm$$

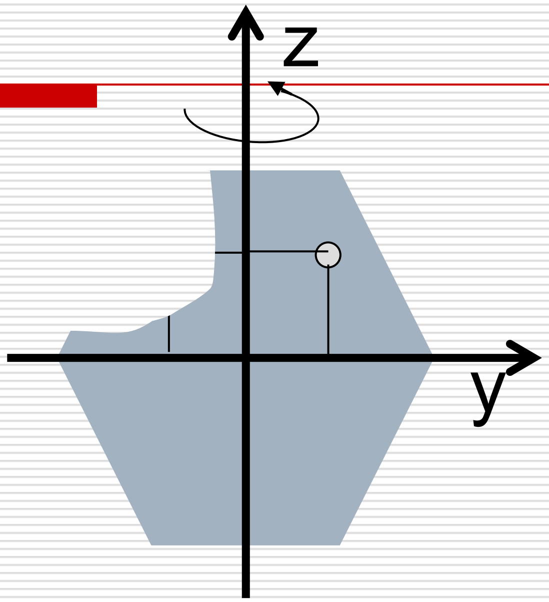
kwadrat odległości od osi OZ

Elementy diagonalne mają klasyczną interpretację, tzn. np. dla osi Y:

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \int (r^2 - y^2) dm$$

Jeżeli bryła jest niesymetryczna

wówczas $I_{yz} \neq 0$

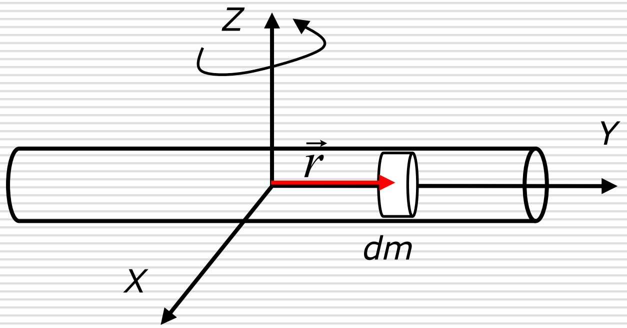


$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^{N} m_n y_n z_n$$

Elementy pozadiagonalne pojawiają się gdy pojawia się asymetria – nie mają jednak bezpośredniej interpretacji fizycznej.

Liniowy rozkład masy

Cienki jednorodny pręt o długości l i gęstości liniowej $\lambda = \frac{dm}{dy} = const$ obraca się wokół osi OZ



$$I_{yy} = 0$$

oraz $I_{xx} = I_{zz} = \int r^2 dm$

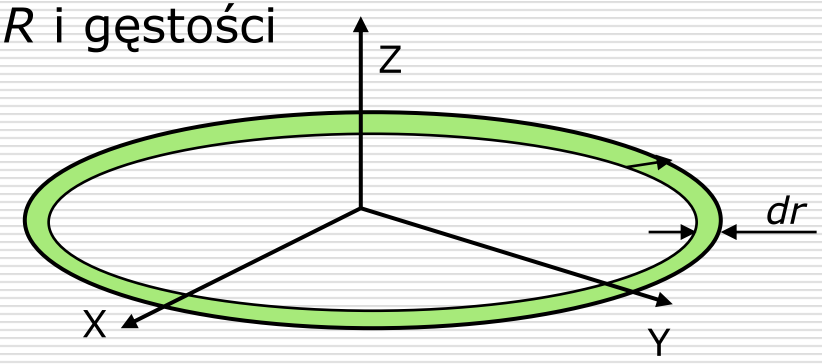
$$I_{zz} = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \lambda \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

czyli $I_{zz} = \frac{m}{3l}\frac{2l^3}{8} = \frac{ml^2}{12}$

Jeżeli przesuniemy oś obrotu na koniec pręta, to $I' = ?$

Powierzchniowy rozkład masy

Cienki jednorodny dysk o promieniu *R* i gęstości powierzchniowej $\sigma = \frac{dm}{ds}$



$$I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm \qquad dm = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

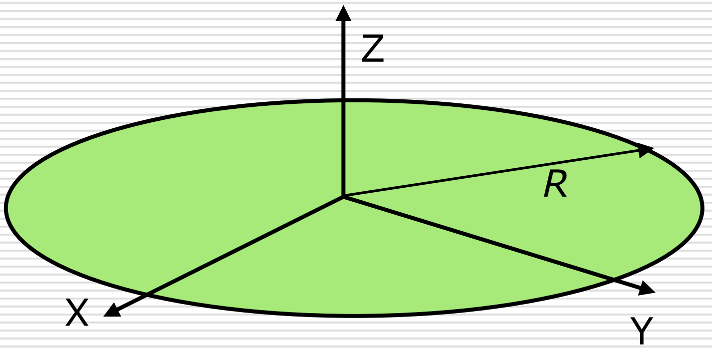
więc $$I_{zz} = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

pozostałe momenty bezwładności obliczymy korzystając z własności ciała o symetrii osiowej - własności tensora momentu bezwładności:

Wiadomo, że dla ciągłego rozkładu masy:

$$\boxed{I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int_V r^2 dm} = 2\int_V r^2 \sigma dV$$

Dla rozważanego dysku



$$I_{xx} = I_{yy}$$

otrzymujemy więc

$$2I_{xx} + I_{zz} = 2\int r^2 dm = 2\int_S r^2 \sigma dS = \quad 2\sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\frac{m}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = mR^2$$

a więc $$2I_{xx} + \frac{mR^2}{2} = mR^2$$

stąd $$\boxed{I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}} \qquad \boxed{I_{zz} = \frac{mR^2}{2}}$$

Lub obliczając inaczej: skoro $I_{xx} = I_{yy} = \int \left(r^2 - x^2\right) dm$

a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ oraz $x = y$ a więc $r^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = ½\, r^2$

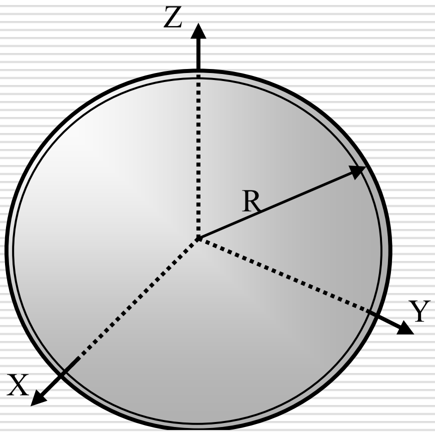
$$I_{xx} = I_{yy} = \int_S \left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right) \sigma dS = \sigma \int \frac{r^2}{2} 2\pi r dr = \frac{m}{\pi R^2} \pi \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$$

Powłoka kulista (sfera)

Gęstość powierzchniowa powłoki o promieniu *R*

wynosi $\sigma = \dfrac{dm}{ds}$



Skoro jest symetria kulista to:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \quad \Rightarrow 3I_{xx} = 2\int r^2 dm$$

$$I_{xx} = \frac{2}{3}\int r^2 dm = \frac{2}{3} mR^2$$

Lub inaczej:

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ oraz $x = y = z \ \Rightarrow \ r^2 = 3x^2$

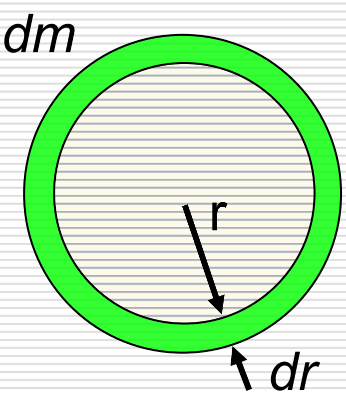
$x^2 = \dfrac{r^2}{3}$ czyli $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \displaystyle\int\left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right)dm = \frac{2}{3}\int r^2 dm = \frac{2}{3} mR^2$

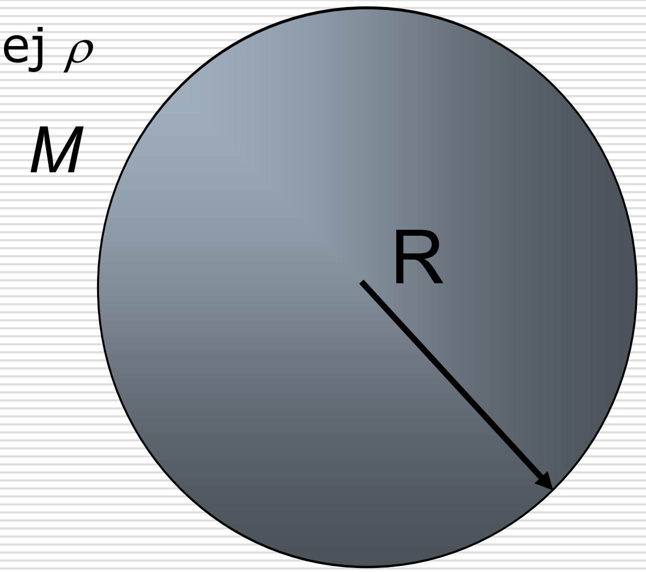
Objętościowy rozkład masy

- Kula o promieniu R i gęstości objętościowej ρ

$$I_{sfery} = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm \qquad I = \int dI$$





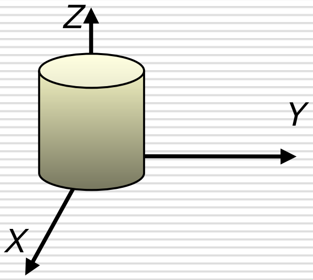
$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \int \frac{2}{3} r^2 \rho dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

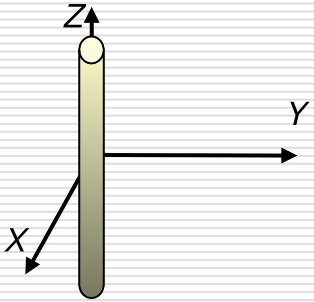
- Symetria cylindryczna

walec o promieniu podstawy *R*, wysokości *H* i masie *M*



$$I_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$

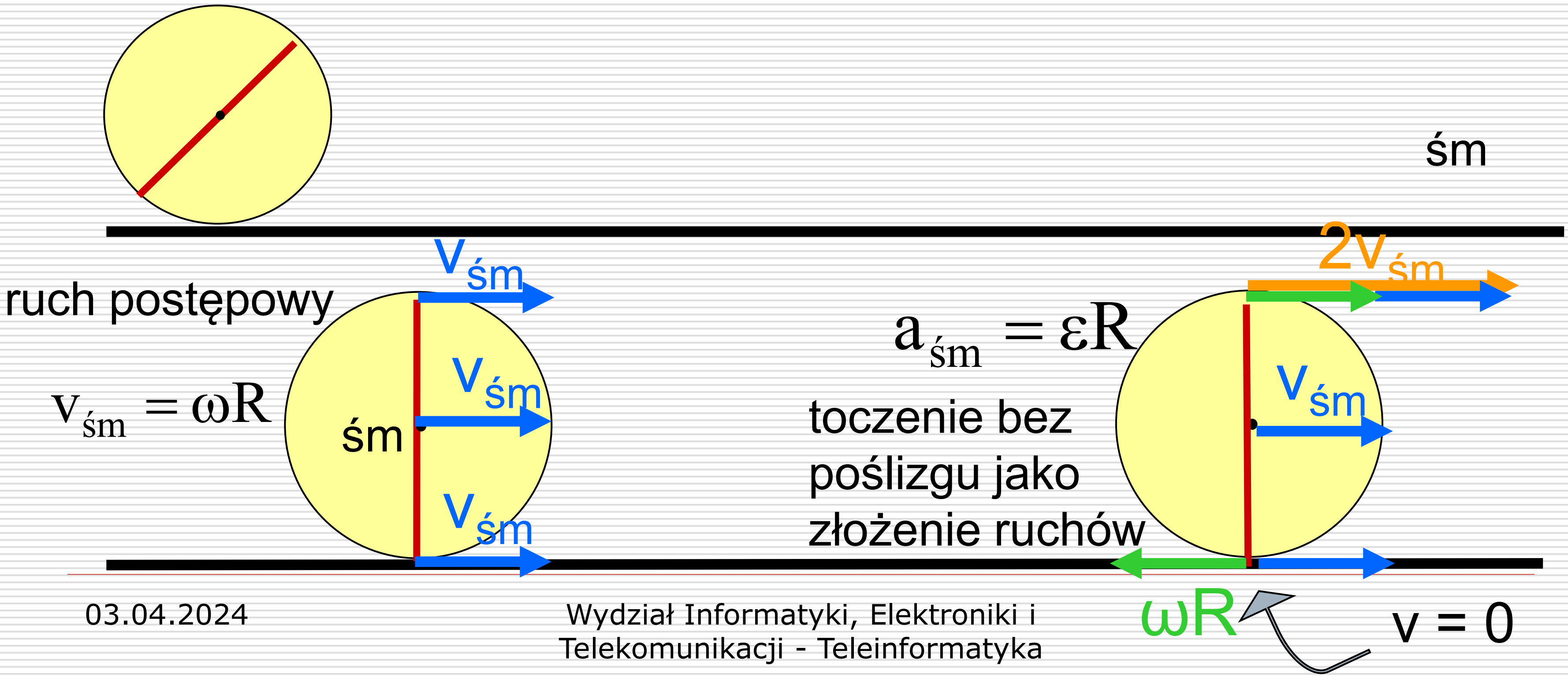
cienki pręt o długości *L* i masie *M*



$$I_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy. Przyczyną toczenia jest występowanie tarcia statycznego.



Energia toczącego się ciała.

$$\boxed{E_k = E_{kp} + E_{ko}}$$

całkowita energia kinetyczna

energia kinetyczna ruchu obrotowego

energia kinetyczna ruchu postępowego

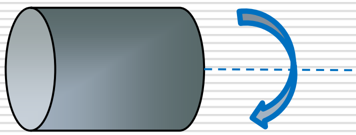
$$E_{ko} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$E_{kp} = \frac{1}{2} \mathrm{m} \mathrm{v}_{\acute{s}m}^2 \longleftarrow \mathrm{v}_{\acute{s}m} = \omega \mathrm{R}$$

$$E_{kp} = \frac{1}{2} \mathrm{m} \mathrm{R}^2 \omega^2$$

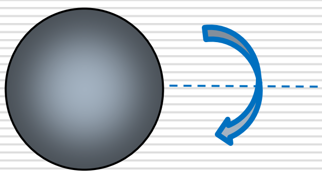
$$E_k = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

Całkowita energia kinetyczna



$$I_{walca} = \frac{1}{2} mR^2$$

walca $$E_{kw} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{4} mR^2\omega^2 = \frac{3}{4} mv_{śm}^2$$



$$I_{kuli} = \frac{2}{5} mR^2$$

kuli $$E_{kk} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{5} mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mv_{śm}^2$$

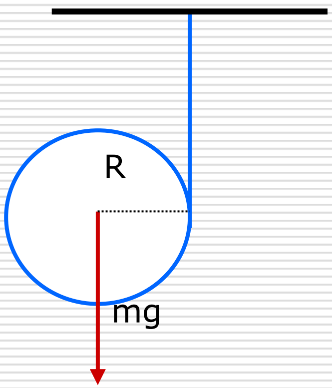
obręczy $$E_{kobr} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2 = mv_{śm}^2$$

$$I_{obr} = mR^2$$

$$E_{kobręczy} > E_{kwalca} > E_{kkuli}$$

Przykład

Na jednorodny walec o masie *m* i promieniu *R* nawinięta jest nitka, której wolny koniec zaczepiono do sufitu. Swobodnie puszczony walec spada obracając się i powoduje rozwijanie się nitki – jak na rysunku obok.
Ruch obrotowy walca wywołany jest działaniem momentu siły M = *mgR*.



Przyspieszenie liniowe $a = R\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ znajdujemy

z równania ruchu $M = I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ gdzie I jest

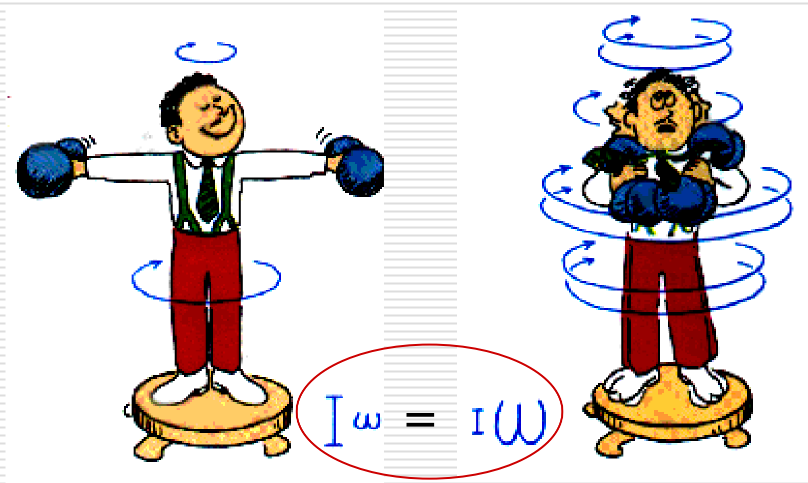
momentem bezwładności walca.

Tak więc $mgR = \dfrac{1}{2}mR^2 \cdot \dfrac{a}{R}$ skąd $\cancel{a = 2g}$! $a = 2/3\ g$

Zasada zachowania momentu pędu

W układzie inercjalnym wypadkowy moment sił $\vec{M}_{zew} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ jest równy zmianie momentu pędu bryły sztywnej

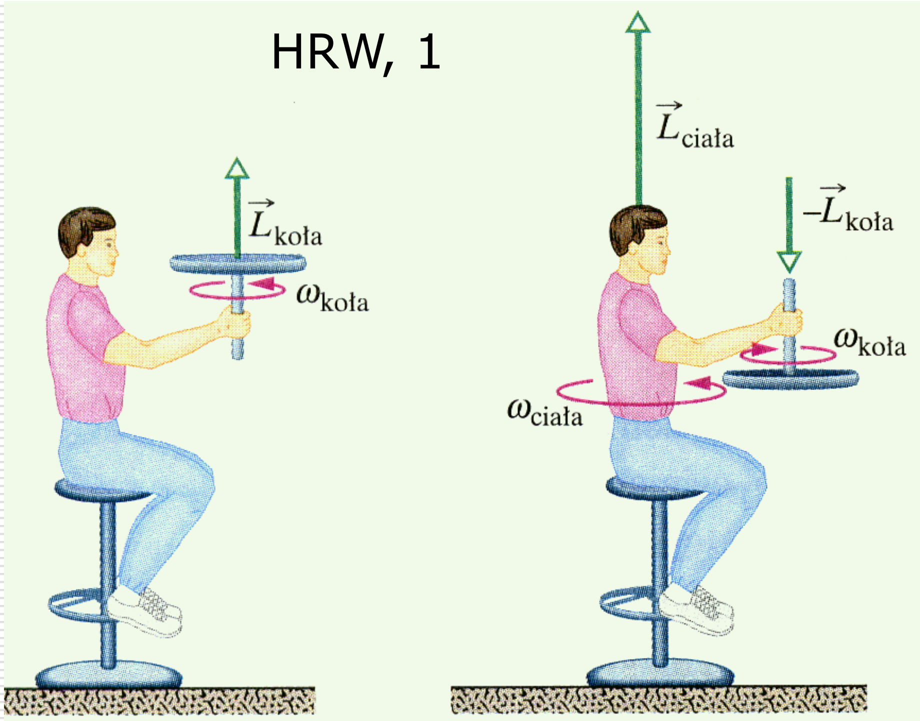
Jeżeli $\vec{M}_{zew} = 0$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ czyli $\vec{L} = const$



Przykład

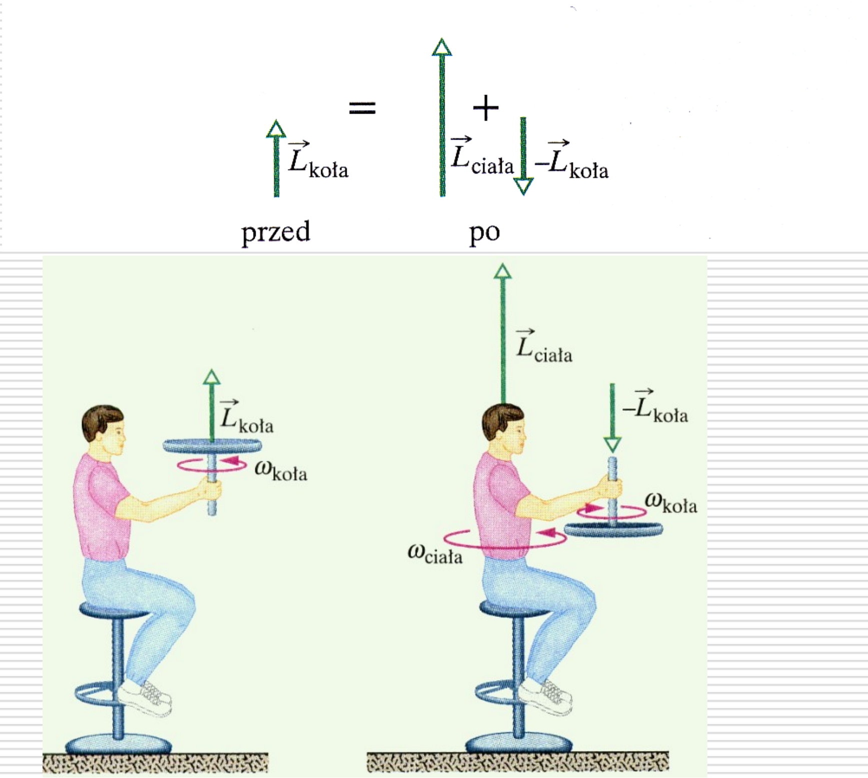
Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności I_k=1.2 kg·m2 względem swojej osi. Koło obraca się z prędkością kątową ω_k = 3,9 obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi I_c=6,8 kg ·m2. Obliczyć prędkość kątową $\omega_{ciała}$ po obróceniu koła. W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?

HRW, 1



Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:



$$\vec{\mathbf{L}}_{przed} = \vec{\mathbf{L}}_{po}$$

$$L_k = L_c - L_k$$

$$L_c = 2L_k$$

$$\omega_{ciał} I_c = 2\omega_k I_k$$

$$\omega_{ciał} = 2\omega_k \frac{I_k}{I_c}$$