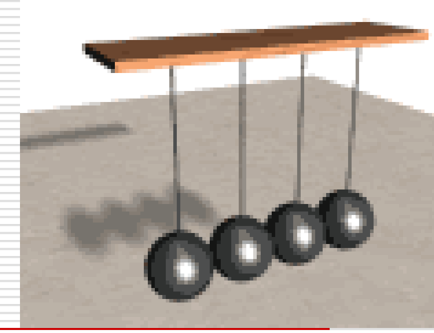
Wykład 9: Drgania

dr inż. Zbigniew Szklarski
szkla@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

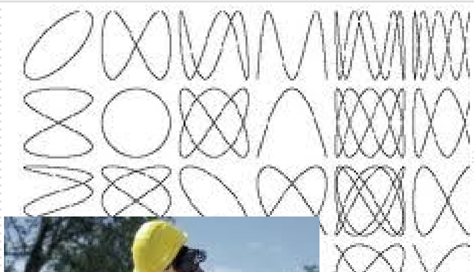
Drgania to:

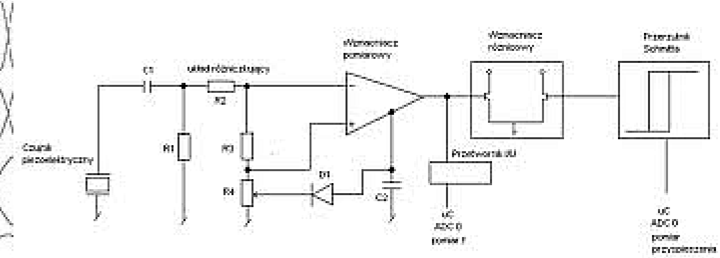


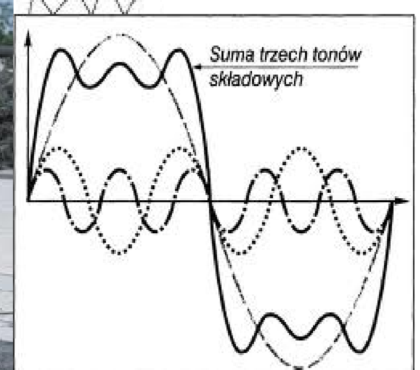
- Drgania mechaniczne
- Drgania elektromagnetyczne

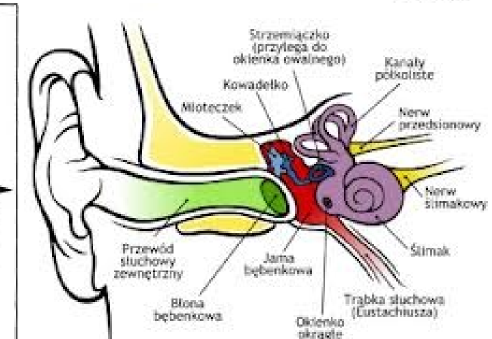
Opis poprzez te same równania

ruch:
- okresowy (periodyczny)
- oscylacyjny







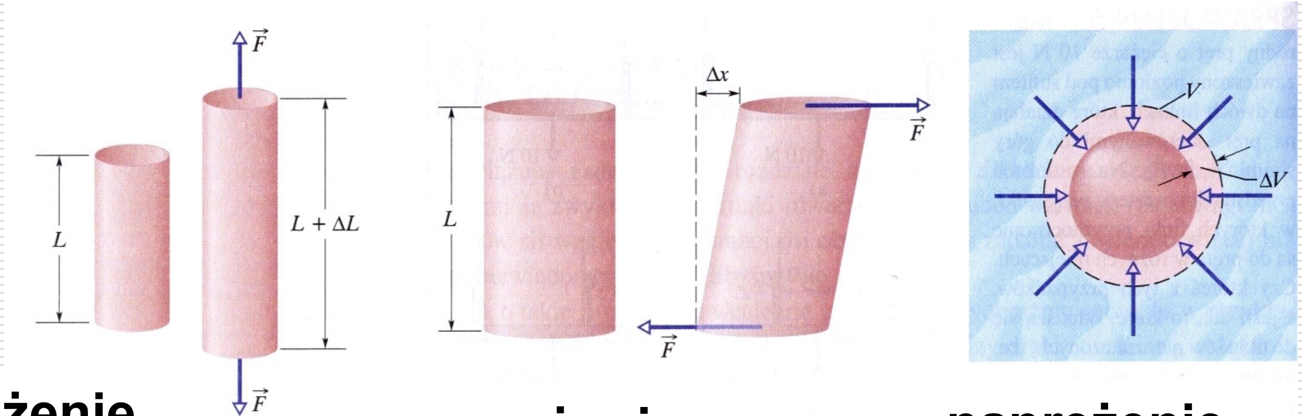


pojęcia:
- okres
- częstotliwość
- amplituda

Skąd się biorą drgania – własności sprężyste ciał stałych

$$\frac{\Delta L}{L}$$

Odkształcenie względne



naprężenie rozciągające

naprężenie ścinające

naprężenie objętościowe

NAPRĘŻENIE

to siła odkształcająca przypadająca na jednostkową powierzchnię na którą działa

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

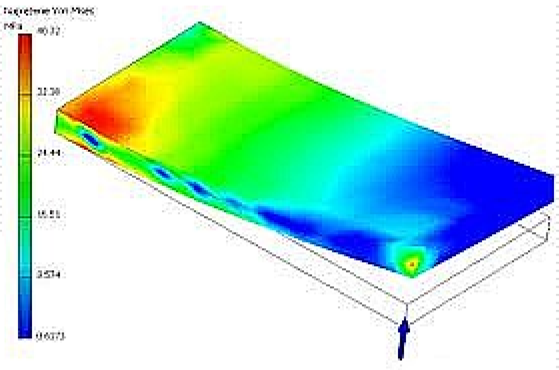
zależy od materiału (moduł sprężystości) i odkształcenia

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

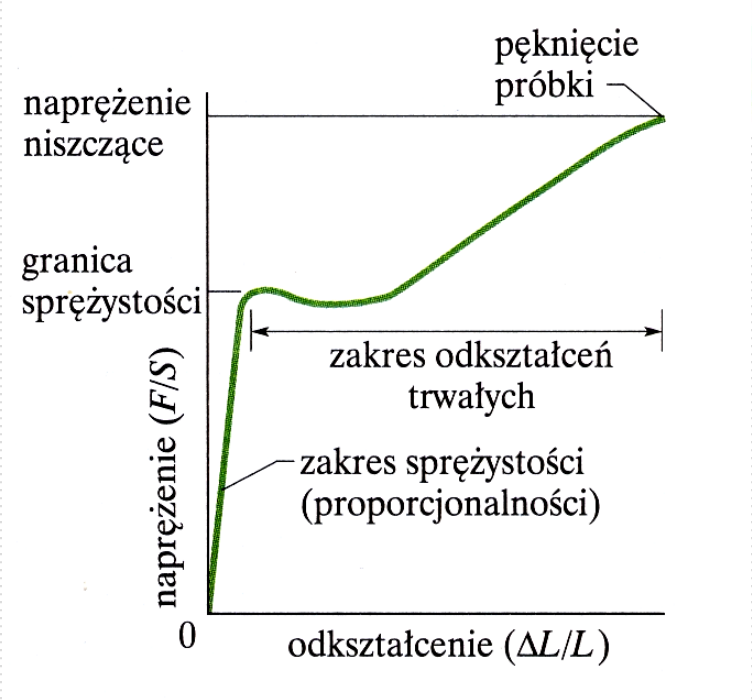
E – moduł Younga

Prawo Hooke’a (1635-1703 r.)

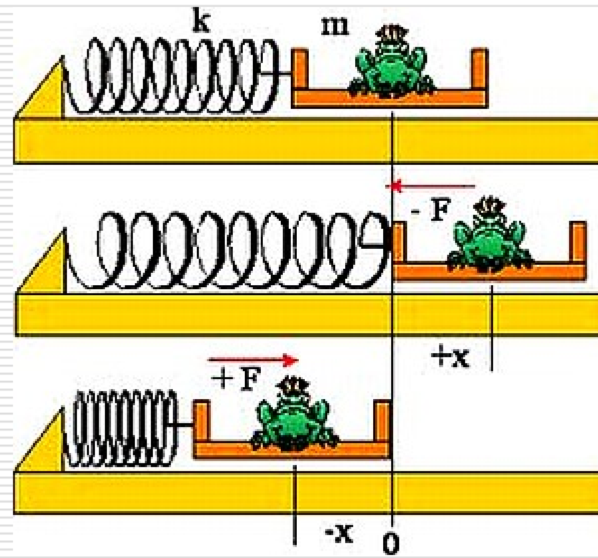
Dla małych naprężeń, odkształcenie jest proporcjonalne do siły, która je wywołuje.



$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$



Oscylator harmoniczny



Dla małych wychyleń (w granicach sprężystości

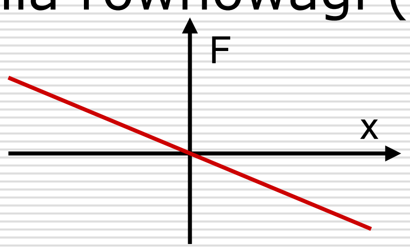
$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

$$F = \frac{E \cdot S}{L}\Delta L \qquad k = \frac{E \cdot S}{L}$$

siła – proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi oraz ..

zwrot – do położenia równowagi (przeciwnie do wychylenia)

$$F = -kx$$



$$\vec{F} = F\hat{\imath} \qquad \vec{x} = -x\hat{\imath}$$

$$F\hat{\imath} = -kx\hat{\imath} \Rightarrow F = -kx$$

Równanie ruchu oscylatora

Siła harmoniczna $\Rightarrow$ prawo Hooke'a $F = - kx$

Siła wypadkowa $F = ma$ $\Rightarrow$ $ma = -kx$

II zasada dynamiki, równanie ruchu: $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

podstawiając $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

rozwiązanie równania: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

częstość drgań własnych
- zależy od parametrów
układu drgającego

$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

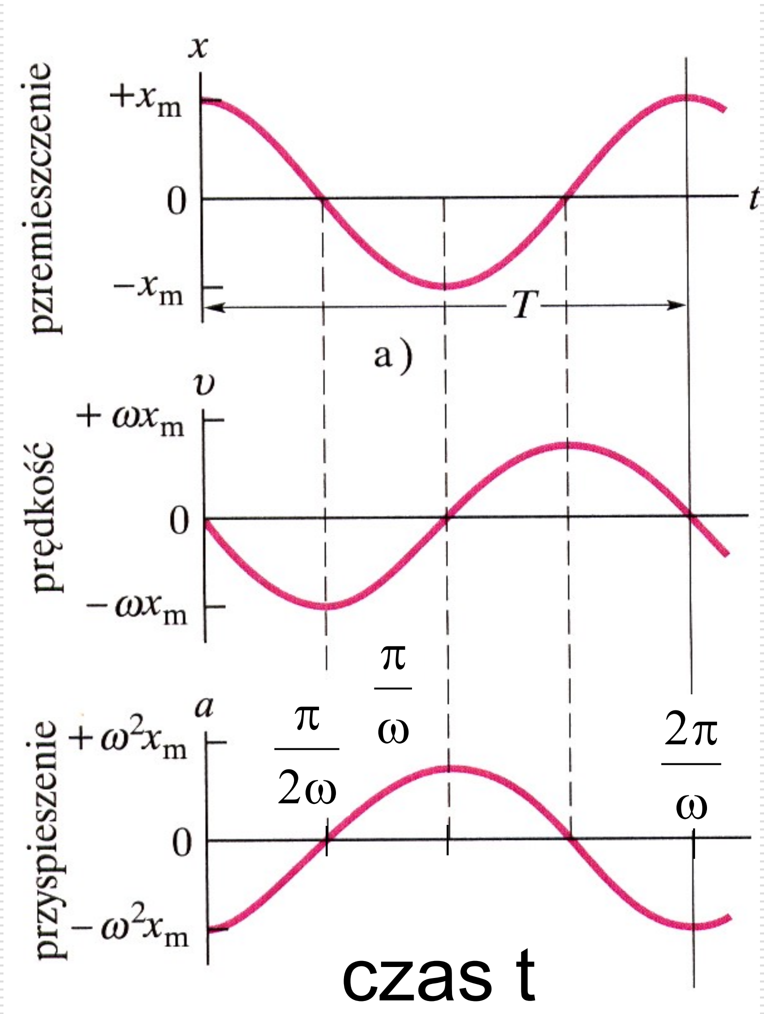
skoro: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

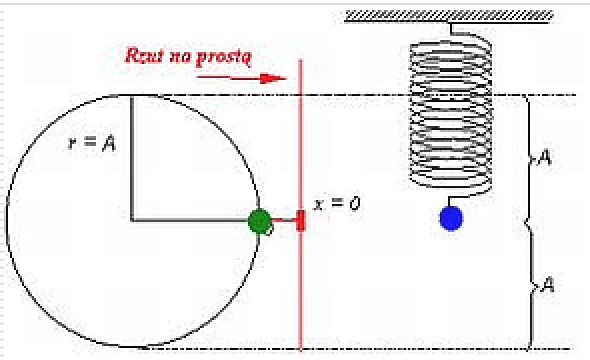
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

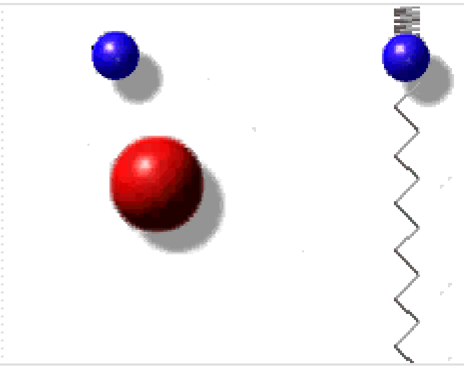
to:

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

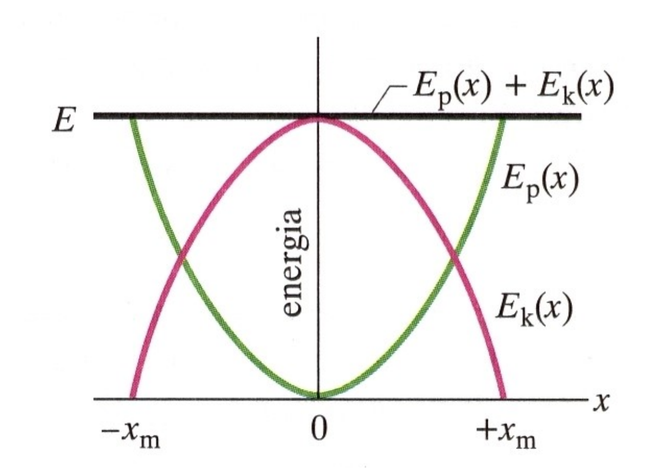
$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

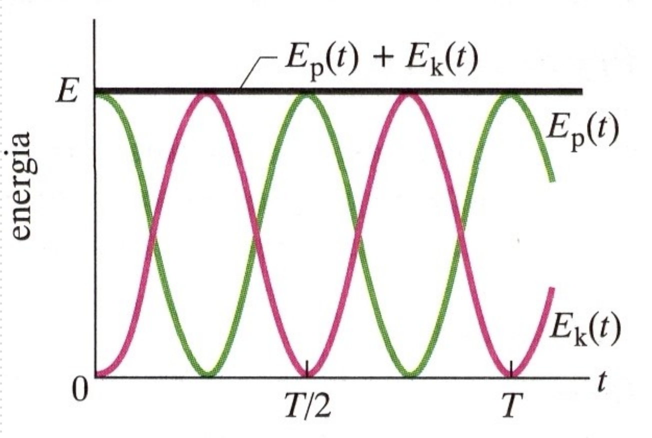






Energia w ruchu harmonicznym





energia potencjalna sprężystości

$$E_p = k\frac{x^2}{2} \qquad E_p = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

energia kinetyczna

$$E_k = m\frac{v^2}{2} \qquad E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

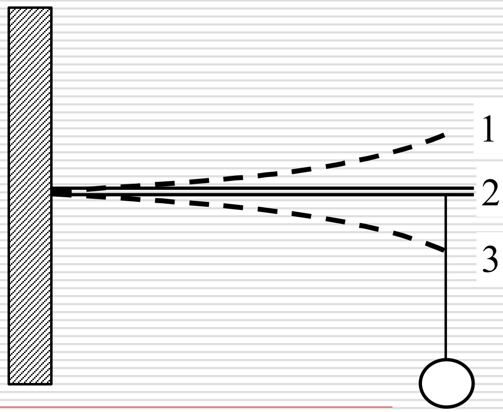
energia całkowita

$$E_C = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

Przykłady

- Masa zawieszona na sprężynie spowodowała jej rozciągnięcie o 10 cm. Jeżeli wytrącimy tę masę z położenia równowagi, to będzie ona wykonywać drgania harmoniczne. Oblicz okres tych drgań.
- Która energia: kinetyczna czy potencjalna i ile razy jest większa w chwili gdy wychylenie cząstki z położenia równowagi wynosi 1/3 amplitudy ?
- Na końcu poziomej, sprężystej listewki, zamocowanej w uchwycie, zaczepiono na nici odważnik o masie m. Wytrzymałość nici na zerwanie wynosi F_z. Listewka z ciężarkiem wykonuje drgania o amplitudzie A.

1. W jakim położeniu listewki *1*, *2* czy *3* na nić działa największa siła ?
2. Oblicz, dla jakiej częstotliwości f_k drgań listewki, nić ulegnie zerwaniu.



Zadanie

Ciało o masie *m* umocowane do sprężyny odciągnięto z położenia równowagi na odległość *L* i puszczono swobodnie aby wykonywało drgania harmoniczne o okresie *T*. Oblicz:

- czas, w którym ciało przebędzie drogę od położenia początkowego do połowy maksymalnego wychylenia.
- prędkość ciała w połowie maksymalnego wychylenia.
- maksymalną wartość siły sprężystości.
- całkowitą energię mechaniczną drgań.
- czas po którym energia kinetyczna oscylatora będzie równa jego energii potencjalnej.

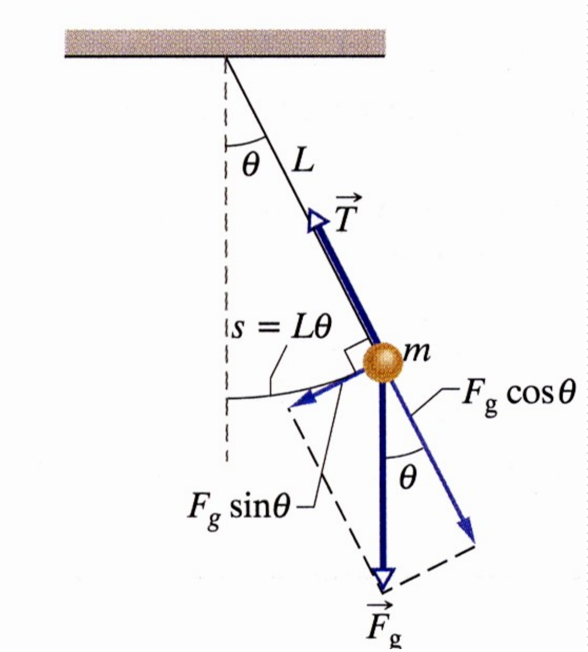
Przykłady oscylatorów harmonicznych

Wahadło matematyczne

Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$M = -L(F_g \sin\theta) = -Lmg\sin\theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ



Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Zakładamy, że kąt θ jest mały (małe drgania) czyli sin θ ≈ θ :

$$M = -Lmg\theta$$

$$M = -Lmg\,\theta \qquad M = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\ \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Lmg\ \theta}{I} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$ gdzie $$\omega_o = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

ale $I = mL^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$

wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Lub: $F = -mg \cdot sin\theta \approx -mg\theta \qquad x = L\theta \Rightarrow \qquad F \approx -mg\,\frac{x}{L}$

Dla małych amplitud w ruchu harmonicznym $F = -kx$

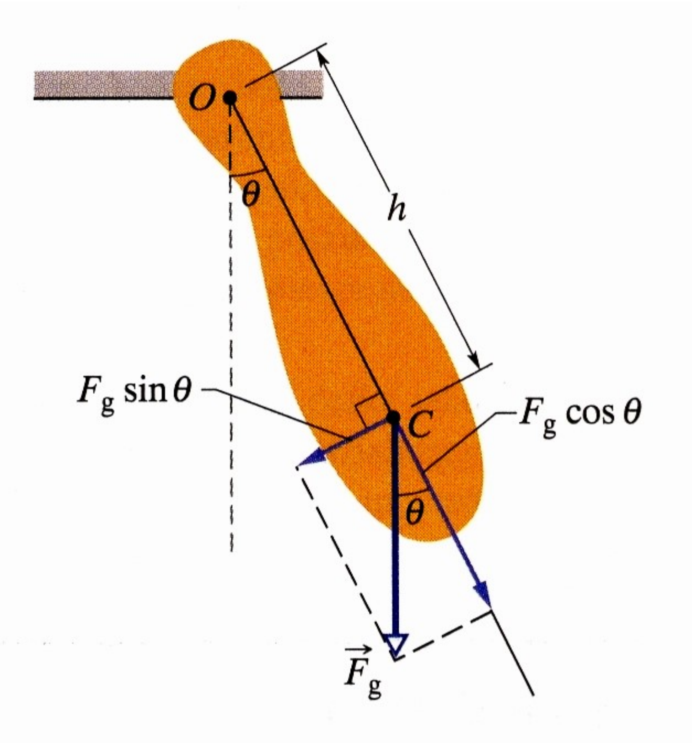
więc $k = \frac{mg}{L} \Rightarrow \qquad 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$

Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym

$$M = -mgh\sin\theta$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta$$



dla małych kątów θ

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\theta = 0$$

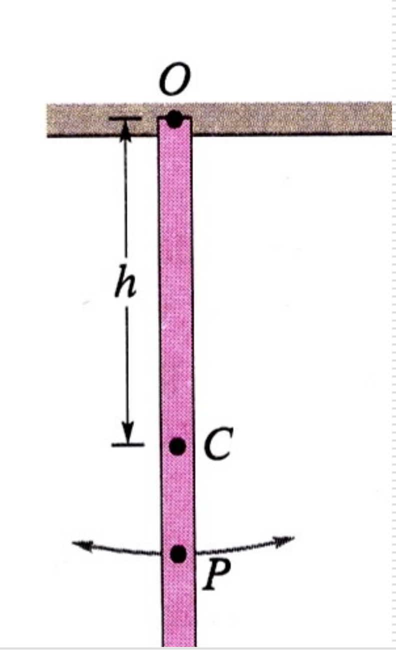
$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_0 + mh^2}}$$

wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mh^2}{mgh}}$$

Przykład wahadła fizycznego

Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O, znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T, wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.



Rozwiązanie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{śm} + mh^2}{mgh}}$$

$$I_{śm} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{m\boldsymbol{g}\frac{L}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

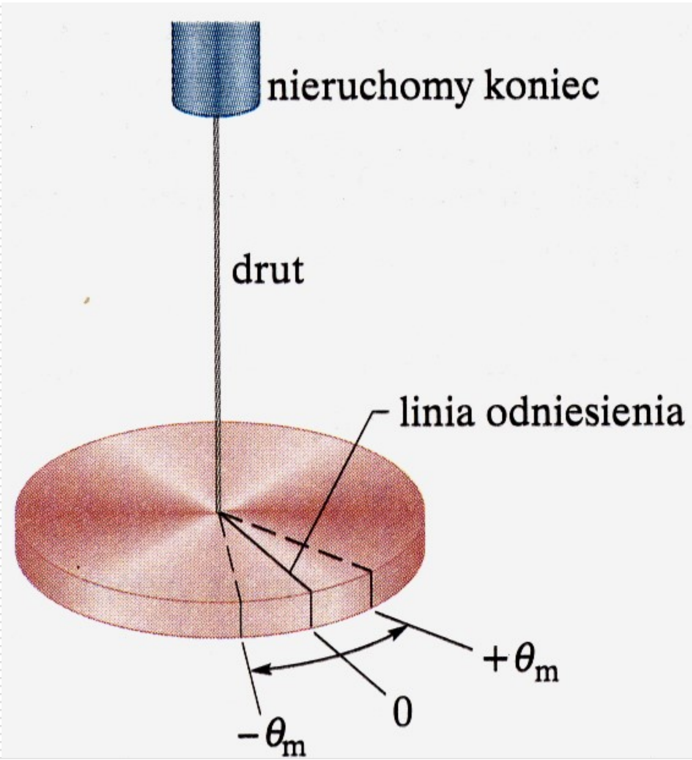
Zadanie

Cienki, jednorodny pręt o masie *m* i długości *L* zawieszono w odległości $x=1/3\ L$ od jego końca. Pręt wychylono o niewielki kąt z położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie.

- Oblicz moment bezwładności takiego wahadła.
- Oblicz wypadkowy wektor momentu siły działający na wahadło.
- Podaj różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego stosując przybliżenie małych kątów i na jego podstawie oblicz okres drgań tego wahadła.

Wahadło torsyjne

$$M = -\kappa\theta$$



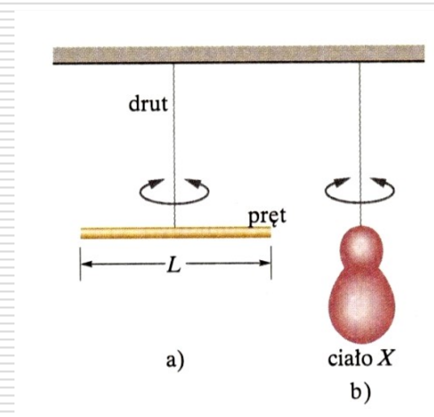
moment kierujący κ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

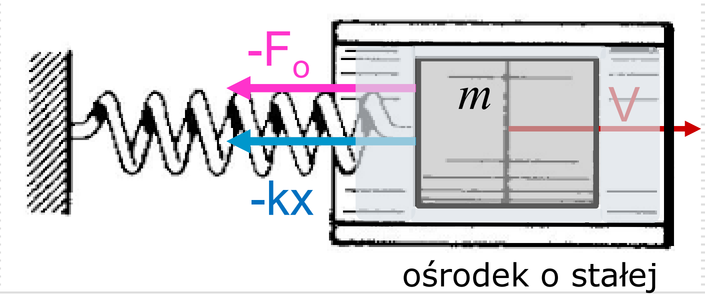
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \omega_o^2 = \frac{\kappa}{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach



Drgania tłumione



ośrodek o stałej tłumienia *b*

Po wychyleniu *m*, na ruch wpływają:

$$F_{sprężystości} + F_{oporu} = F_{wypadkowa}$$

Siła oporu – siła Stokes'a

$F_{oporu} = -b \cdot V$ gdzie *b* to stała tłumienia *zatem* $ma = -kx - bV$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

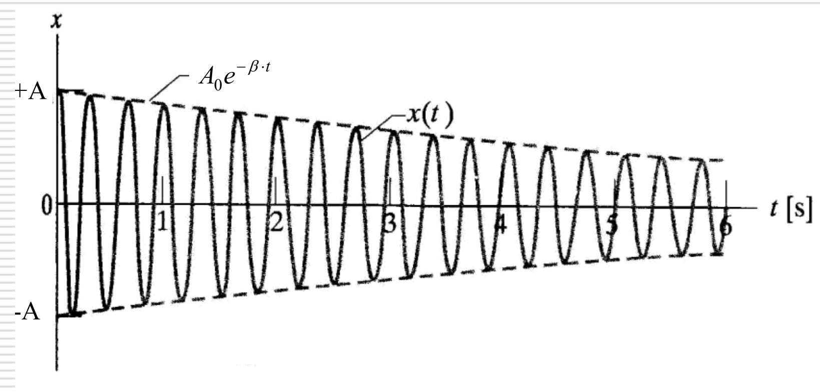
gdzie $\beta = \dfrac{b}{2m}$ to współczynnik tłumienia

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

<u>Dla małych wartości współczynnika tłumienia</u>, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta\cdot t}}_{A(t)}\cos(\omega t + \varphi)$$



gdzie *A(t)* jest malejącą w czasie amplitudą oscylatora harmonicznego

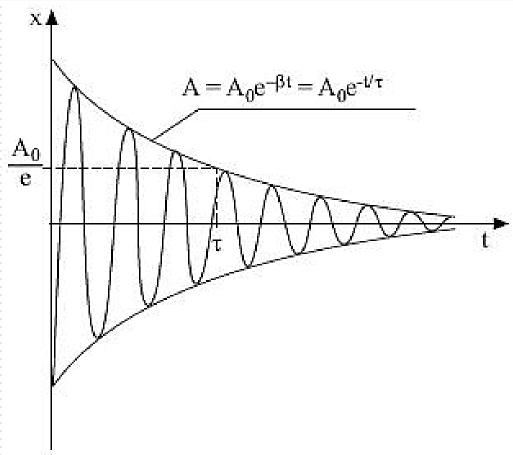
$$A(t) = A_o e^{-\beta\cdot t}$$

oraz

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia



Zależność $x = x(t)$ dla drgań tłumionych

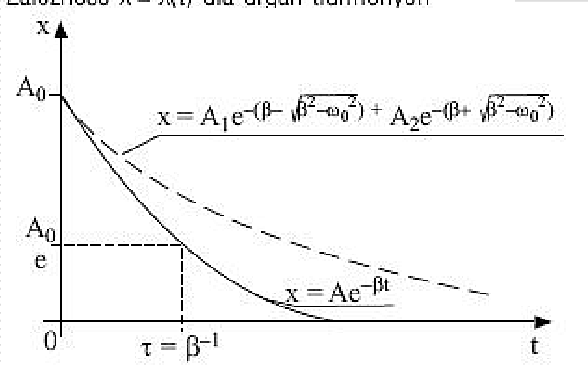
rozwiązanie periodyczne – gdy:

$$\omega_0 >> \beta \quad bo \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

τ - czas relaksacji (amplituda maleje *e* – razy)

Miarą tłumienia jest logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}$$



Zależności $x = x(t)$ dla dwóch rozwiązań aperiodycznych $\beta = \omega_0$ i $\beta \rangle \omega_0$

$\omega_0 = \beta$ rozwiązanie krytyczne

$$x(t) = A_o e^{-\beta \cdot t}$$

$\omega_0 < \beta$ rozwiązanie aperiodyczne

Rezonans

- Periodyczne wymuszenie: $F = F_0 \cos \Omega t$

- Równanie tłumionego oscylatora harmonicznego z wymuszeniem:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cos \Omega t$$

gdzie: $\beta = \frac{b}{2m}$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\gamma = \frac{F_0}{m}$

W stanie ustalonym drgania oscylatora zachodzą z częstością wymuszenia Ω

- Rozwiązanie równania: $x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t + \phi(\Omega))$

Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

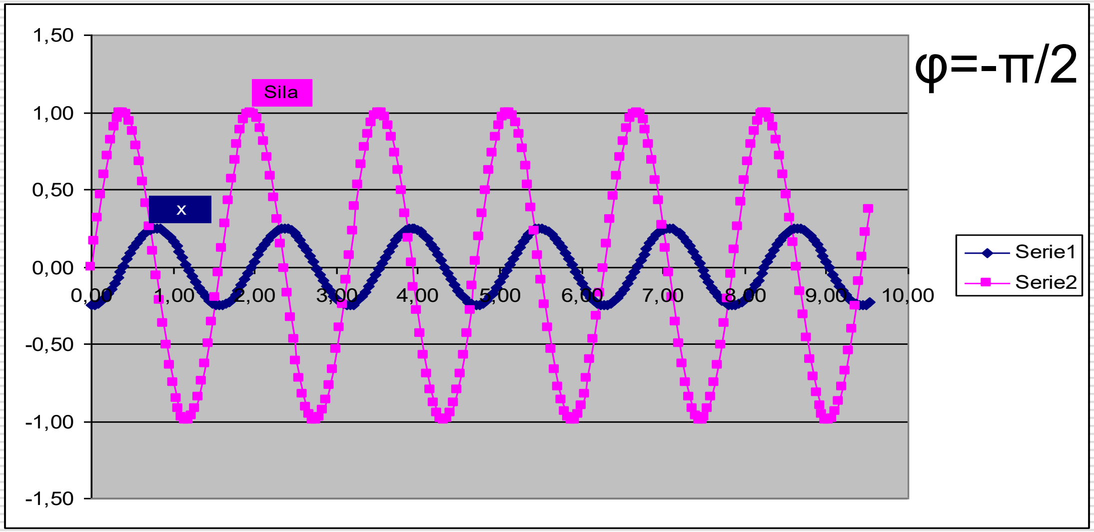
- amplituda A(Ω) jest funkcją częstości wymuszenia

$$A(\Omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

- przesunięcie fazowe φ(Ω) nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia.

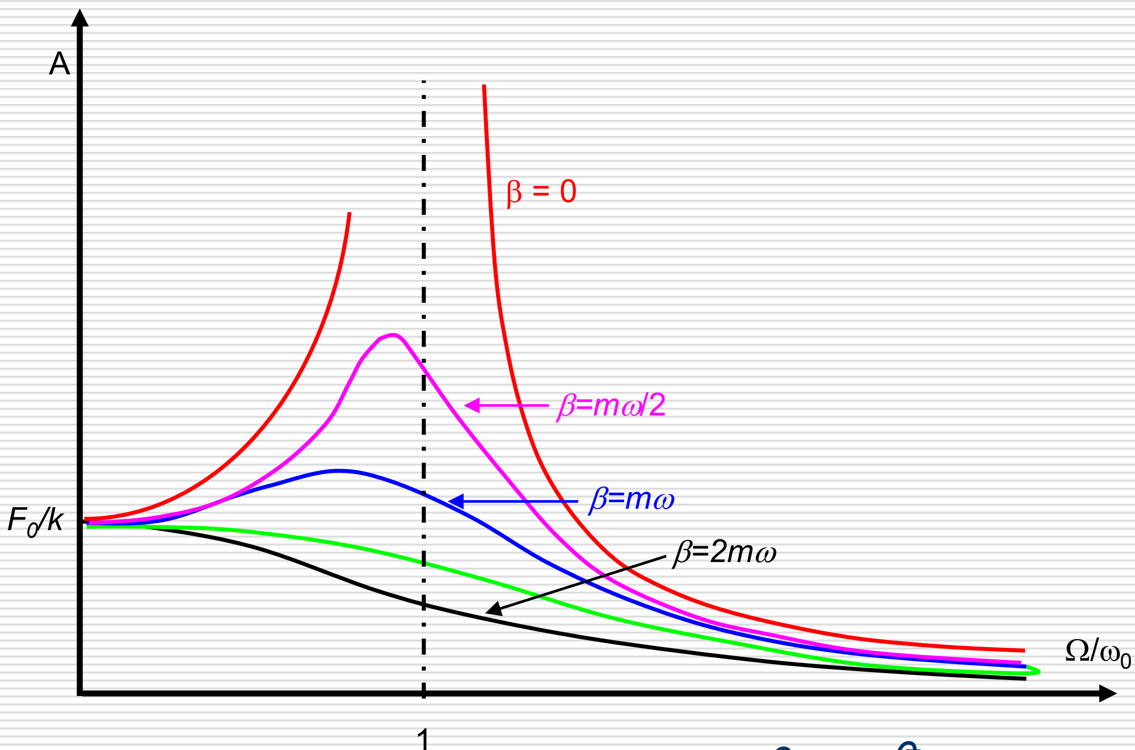
$$tg\phi=\frac{2\beta\cdot\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

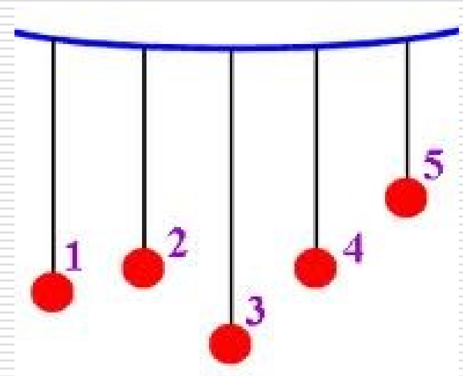
Informuje o jaki kąt maksimum wychylenia wyprzedza maksimum siły wymuszającej



- <u>Rezonans</u> występuje gdy amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza że częstość wymuszenia Ω zbliża się do częstości <u>drgań własnych</u> ω_0

$$A(\Omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$





rezonans parametryczny

Składanie drgań

- zachodzących w tym samym kierunku

$x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$

$x_w(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$x_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

gdy amplitudy i częstości są jednakowe, a drgania są przesunięte w fazie o φ:

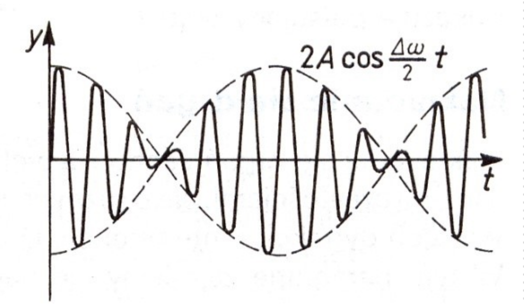
$$x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

gdy $\varphi = \pi$ - wygaszenie drgań

gdy $\varphi = 2\pi$ - wzmocnienie

$x_{wyp}= 2A\cos(\omega t)$

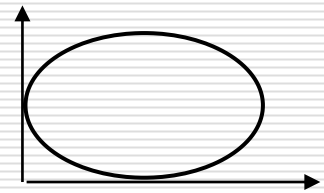
Gdy drgania mają zbliżoną częstotliwość otrzymujemy drgania o modulowanej amplitudzie.

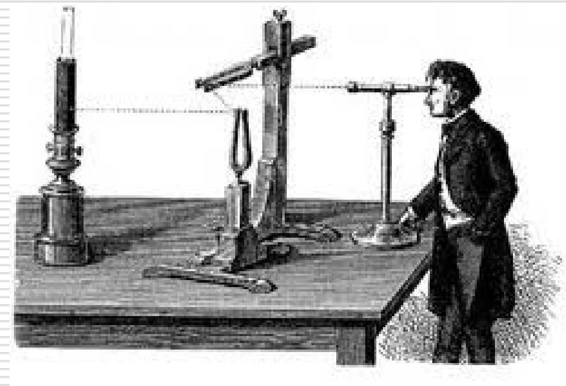


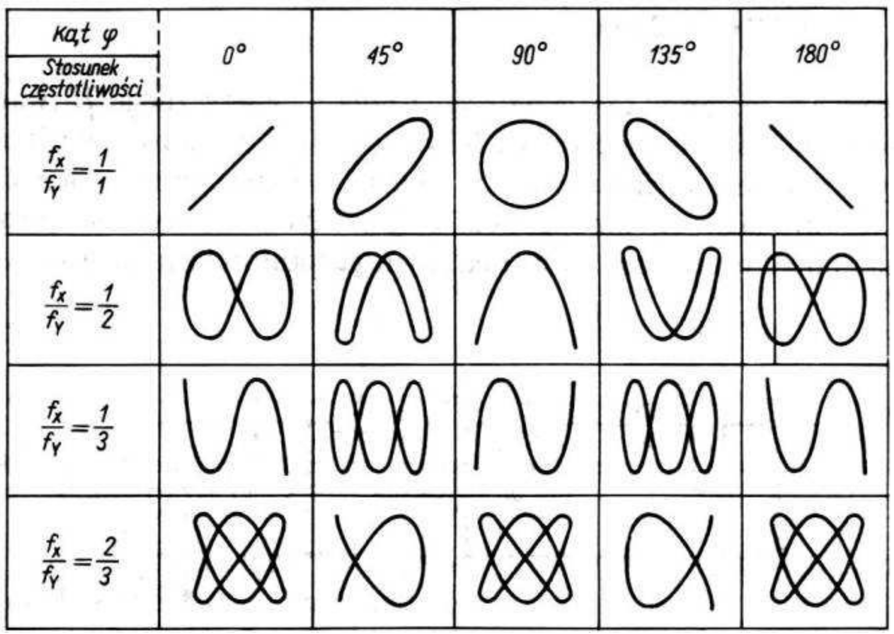
- Składanie drgań zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

np. $x(t) = A_x \sin \omega t \qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad \frac{x^2(t)}{A_x^{\,2}} + \frac{y^2(t)}{A_y^{\,2}} = 1$

Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857







Przykład

Do płytek odchylania poziomego i pionowego oscyloskopu przyłożono napięcia: $U_x = a \cdot \sin \omega t$ oraz $U_y = b \cdot \cos 2\omega t$. Wyznaczyć tor promienia na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie:

Równanie toru – należy wyeliminować czas z równań:

$$\frac{U_y}{b} = \cos 2\omega t \qquad \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t$$

$$\frac{U_x}{a} = \sin \omega t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U_y}{b} = 1 - 2\left(\frac{U_x}{a}\right)^2$$

stąd $U_y = b - \frac{2b}{a^2} U_x^2$

parabola !