Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru (Guide to Expression of Uncertainty in Measurements - Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARU

http://physics.nist./gov/Uncertainty

Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999

H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999

A.Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

WSTĘP

W trakcie pomiaru uzyskujemy wartości różniące się od przewidywań teorii. Gdy doświadczenie staje się doskonalsze, niepewności pomiarowe maleją. W ogólności rozbieżność między teorią i eksperymentem zależy od:

- Niedoskonałości człowieka (osoby wykonującej pomiar)
- Niedoskonałości przyrządów pomiarowych
- Niedoskonałości obiektów mierzonych

Terminologia

„Niepewność” a błąd pomiaru

W przypadku pojedynczych pomiarów stosujemy określenia:

Błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$ (1) [wymiar x]

Błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$ (2) [bezwymiarowe]

Gdzie x – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista

Niepewność

Wielkości określone wzorami (1) i (2) są pojedynczą realizacją zmiennej losowej i nie wchodzą do teorii niepewności. W praktyce nie znamy wartości rzeczywistych wielkości mierzonych i szacujemy niepewności pomiarowe wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów.

Niepewność jest parametrem związanym z pomiarem.

Istotny jest również problem niepewności przypisywanej wielkości złożonej (wyliczanej ze wzoru fizycznego) $y = f(x_1,x_2,...x_n)$

Podział błędów

Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej. Z tego względu błędy dzielimy na:

- Błędy grube (pomyłki) - eliminować
- Błędy systematyczne - poprawki
- Błędy przypadkowe – podlegają rozkładowi Gaussa, wynikają z wielu losowych przyczynków, nie dają się wyeliminować

Typy oceny niepewności wg nowej Normy

Typ A

Metody wykorzystujące statystyczną analizę serii pomiarów:

•wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru

• ma zastosowanie do błędów przypadkowych

Typ B

Opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności

•stosuje się gdy statystyczna analiza nie jest możliwa

•dla błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru

TYP B

Teoria niepewności maksymalnej

To podejście zakłada, że można określić przedział wielkości mierzonej x, w którym na pewno znajdzie się wielkość rzeczywista. W zapisie

$$x \pm \Delta x$$

gdzie Δx jest niepewnością maksymalną

nie posługujemy się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej y=f(x_1,x_2,...x_n) gdy niepewności maksymalne Δx_1 , Δx_2 , ... Δx_n są małe w porównaniu z wartościami zmiennych x_1,x_2, ... x_n niepewność maksymalną wielkości y wyliczamy z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\left|\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\left|\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\left|\Delta x_n\right| \qquad (3)$$

Przykład

Z pomiarów U i I wyliczmy $R = U / I$

Niepewności maksymalna oporu (wg. wzoru 3)

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial U}\right|\left|\Delta U\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right|\left|\Delta I\right|$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

$$\Delta R = \frac{1}{I}\Delta U + \frac{U}{I^2}\Delta I$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Na wartości ΔU i ΔI mają wpływ dokładności przyrządów.

Dla mierników analogowych korzystamy z klasy dokładności przyrządu, np.

$$\Delta U = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$$

Dla mierników cyfrowych niepewność jest najczęściej podawana w instrukcji obsługi jako zależna od wielkości mierzonej *x* i zakresu pomiarowego *z*

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$

np. multimetr c_1=0.2%, c_2=0.1%

przy pomiarze oporu R=10 kΩ na zakresie z = 20 kΩ da niepewność ΔR=0.04 kΩ, tj. równowartość 4 działek elementarnych

Dawniej uważano, że miarą błędu systematycznego może być tylko niepewność maksymalna. Nowa Norma traktuje błąd systematyczny jako zjawisko przypadkowe, gdyż nie znamy *a priori* jego wielkości i znaku. Norma zaleca stosowanie niepewności standardowej *u*.

A zatem dla przykładu omawianego:

$$u(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}}$$

Niepewność standardowa

Jest miarą dokładności pomiaru uznawaną za podstawową. Definicja mówi:

Niepewność standardowa jest oszacowaniem odchylenia standardowego.

Symbolika: u lub $u(x)$ lub u(stężenie NaCl)

1. Rezultat pomiaru jest zmienną losową, której rozrzut charakteryzuje parametr zwany odchyleniem standardowym
2. Dokładnej wartości odchylenia standardowego nie znamy. Niepewność standardowa jest jego niezbyt dokładnym oszacowaniem.

Niepewność u posiada wymiar, taki sam jak wielkość mierzona

Niepewność względna $u_r(x)$ to stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową i może być wyrażona w %

TYP A

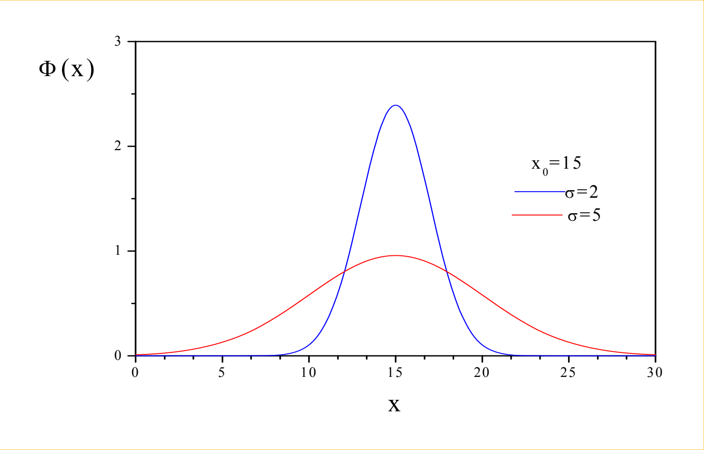
Rozkład normalny Gaussa

Gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia wielkości x lub jej błędu Δx podlega rozkładowi Gaussa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

x_0 jest wartością najbardziej prawdopodobną i może być nią wartość średnia

$$\overline{x} = \frac{\sum_i^n x_i}{n}$$

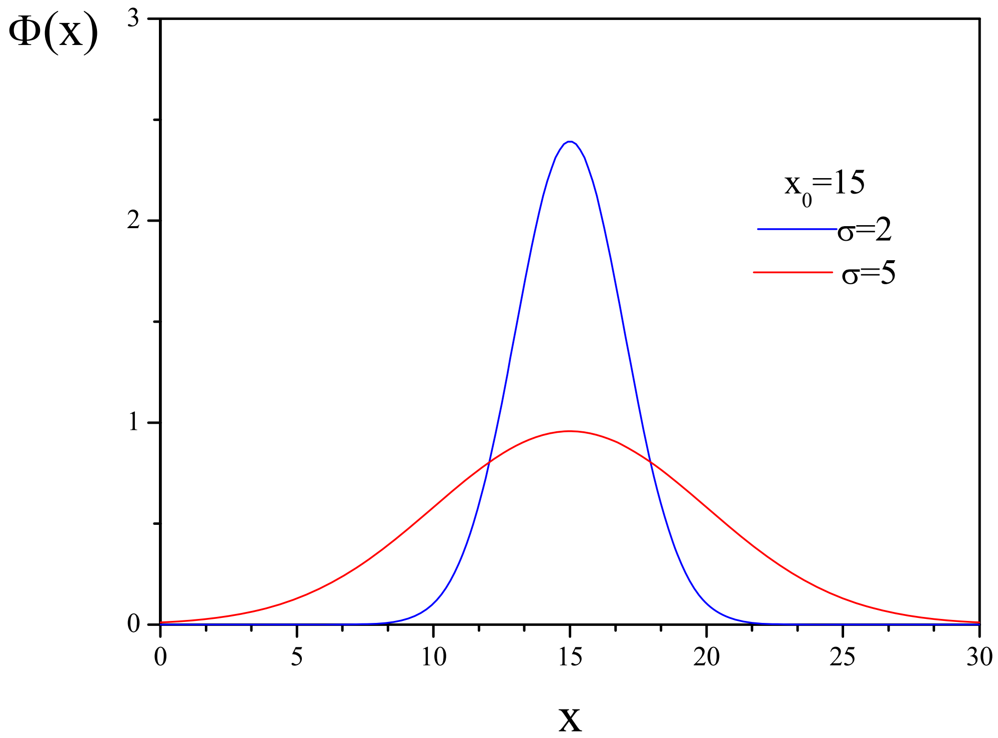


σ jest odchyleniem standardowym

σ^2 jest wariancją

W przedziale x_0-σ < x < x_0+σ mieści się ok. 68% wszystkich pomiarów

Rozkład normalny Gaussa



$$\sigma = u(x) = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}$$

Prawo przenoszenia niepewności

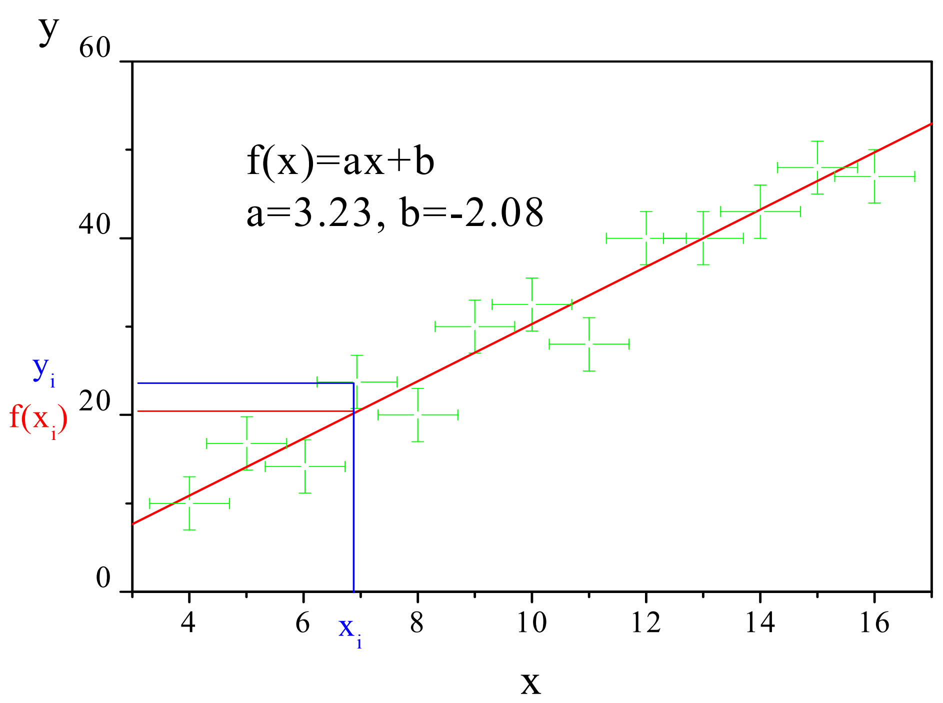
Niepewność standardową wielkości złożonej y=f(x_1,x_2,...x_n) obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n}u(x_n)\right]^2}$$

$$u_{cr}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$$

Metoda najmniejszych kwadratów
Regresja liniowa

$$S^2 = \sum_i^n \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2 = \min$$



Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymuje się układ równań liniowych dla niewiadomych *a* i *b*

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymuje się wyrażenia na *a* i *b*

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

$$W = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

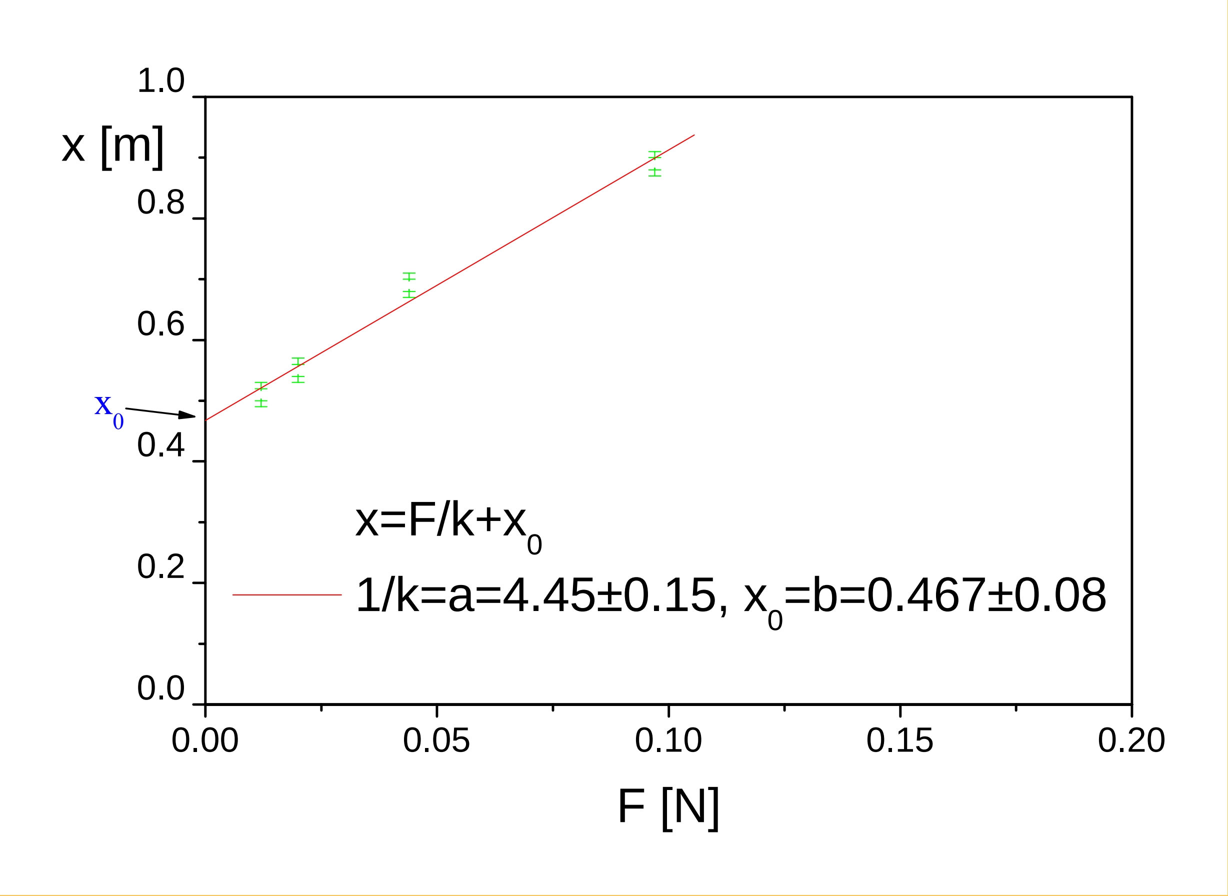
Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe obu parametrów prostej:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a)\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Przykład zastosowania regresji liniowej y=ax+b

Prawo Hooke'a



Regresja liniowa jednoparametrowa

$$S^2 = \sum_i^n \left[y_i - ax_i\right]^2 = \min$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0$$

$$-2\sum x_i y_i + 2a\sum x_i^2 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}}$$

$$\boxed{\sigma_a = \sqrt{\frac{n}{n-2} \bullet \frac{\sum_{i=1}^n \left[(ax_i - y_i)^2\right]}{\sum_{i=1}^n \left[x_i^2\right]}}}$$