Oscylator kwantowy – wyprowadzenie wzoru Plancka

Zastosowanie idei Plancka do obliczenia energii pojedynczego oscylatora (mechanicznego, elektrycznego, itp.)

(1) założymy, że oscylator (mechaniczny, elektryczny, itp.) znajduje się w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, którym jest np. gaz znajdujący się w temperaturze T

oscylator będzie raz odbierał energię od otoczenia (w masę zawieszoną na sprężynie uderzają cząsteczki gazu, które ją poruszają) raz oddawał (masa poruszając się ruchem oscylacyjnym może oddać pęd/energię zderzającym się cząsteczkom gazu)

w termodynamice klasycznej poprawnie rozwiązano problem fluktuacji energii takiego „małego" układu oddziałującego z „dużym" układem (otoczeniem, termostatem)

obowiązywał tu rozkład Boltzmana- Gibbsa

pokazano, że jeżeli podukład znajduje się w termostacie (otoczeniu) o temperaturze T, ma energię E_δ z prawdopodobieństwem równym

$$\Pr\{E_\delta\} = Ce^{-\frac{E_\delta}{kT}}, \qquad (1)$$

gdzie C jest taką stałą, by suma prawdopodobieństw (lub całka) była równa 1 (zgodnie z zasadą, że podukład ma na pewno jakąś energię)

formuła (1) była na tyle ugruntowana, że również Planck ją zastosował do wyznaczenia energii oscylatora, który oddziałuje z termostatem

Planck założył jednak, że oscylator mający częstość rezonansową ω może mieć energie nie dowolną, ale tylko równą całkowitej wielokrotności $\hbar\omega$

oznacza to, że

$$E_\delta = n \cdot \hbar\omega, \qquad (2)$$

gdzie n jest liczbą naturalną

w tym tkwiło rewolucyjne podejście, gdy podstawimy (1) do (2) otrzymamy

$$\Pr\{E_\delta\} = \Pr\{n\} = Ce^{-\frac{n\cdot\hbar\omega}{kT}} = Ce^{-nx}, \qquad (3)$$

gdzie $x = \dfrac{\hbar\omega}{kT}$

wzór (3) mówi o tym jakie jest prawdopodobieństwo, że w oscylator pochłonął n porcji energii z otoczenia

nie należy zapomnieć o wyznaczeniu stałej C, znajdujemy ją z warunku sumowania prawdopodobieństw do 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{n\} = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 \tag{4}$$

ponieważ suma szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \tag{5}$$

stąd $C = 1 - e^{-x}$ i

$$\Pr\{n\} = (1-e^{-x})Ce^{-nx} \tag{6}$$

znając prawdopodobieństwo $\Pr\{n\}$ możemy odpowiedzieć na znacznie ciekawsze pytanie, ile jest średnio kwantów energii w oscylatorze ?

zgodnie z zasadami rachunku prawdopodobieństwa

$$<n>= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \Pr\{n\} \tag{7}$$

co daje (trzeba obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$)

$$<n>= \frac{e^{-x}}{1-e^{-v}} = \frac{1}{e^{x}-1} \tag{8}$$

ponieważ 1 kwant ma energię $\hbar\omega$, stąd otrzymujemy wzór Plancka na energię średnią

$$E = \hbar\omega <n>= \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} \tag{9}$$

w oparciu o (9) wyprowadzimy w przyszłości wzór na promieniowanie ciała doskonale czarnego